







56, 181/c

N. III

181/2

76
CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI,
FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS
NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS
ORDINARII; PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII,
ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE
REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA
MATHESEOS
UNIVERSÆ.

TOMUS SECUNDUS.

*Qui MECHANICAM cum STATICA; HYDROSTATICAM,
AEROMETRIAM atque HYDRAULICAM complectitur.*

EDITIO NOVISSIMA,
MULTO AUCTIONIOR ET CORRECTIONIOR.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCXLVI.

CHRISTIANI WOMEN

THEY ARE THE FIRST TO
RECOGNIZE THE NEED OF
A BETTER EDUCATION FOR
THEIR PEOPLE AND TO
PROMOTE THE SAME.

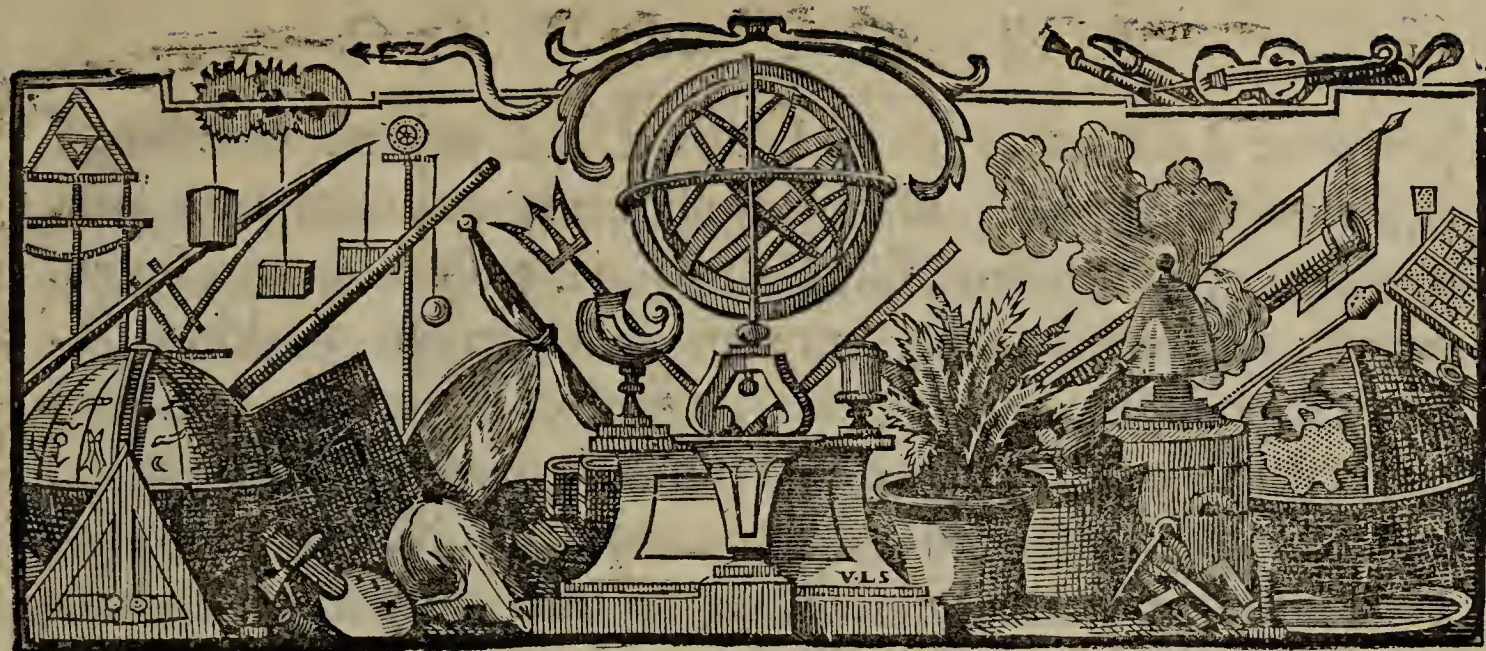
ELLEN V. A.
MATHESON

UNITED STATES
TOMUS SECVNDVS

THE UNIVERSITY OF
CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILL.
1892



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILL.



PRÆFATIO.



NOVA hæc Matheseos Elementa eo fine conscripsimus, ut Mathematicum cultores palmarias Matheseos universæ veritates labore facili intra breve temporis spatium sibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: Ita enim futurum confidimus, ut ad legendos quosvis Autores, qui de rebus mathematicis commentati sunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quascunque à Mathesi diversas Scientias severiùs & fructuosius tractandas accedant. Atque eodem consilio novæ huic Elementorum Editioni plurima adjeci, quæ in priore non leguntur, ut adeo totum opus in Duos Tomos divisum antea, in quatuor nunc secari opus fuerit. Prodit jam Tomus Secundus, qui *Mechanicam*, *Hydrostaticam*, *Aërometriad* & *Hydraulicam* complectitur, atque adeo Motum & Æquilibrium solidorum ac fluidorum exponit. Veteres,

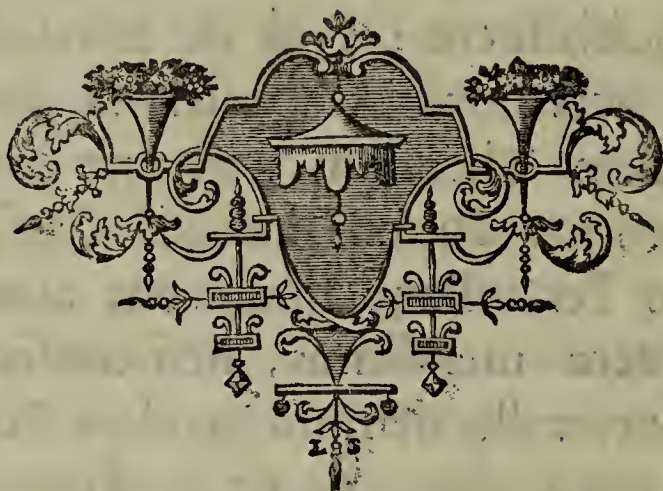
* 3

præ-

præeunte ARCHIMEDE in Libris *De Æquiponderantibus & Insidentibus humido*, ultra æquilibrium gravium non progressi sunt; primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid addere ausus motum gravium ad notiones distinctas & foecundas revocavit, usum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clarissimo specimine demonstrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indivisibilium uberius exculta tandemque ad Analysin certam revocata terebatur, ut sublimiora ingenia ad veritates maxime abstrusas atque abditas accederent. Admiranda igitur de Motu solidorum ac fluidorum hodie prostant inventa, sed ita ab Inventoribus proposita, ut ab iis tangendis arceantur Tyrones & quotquot in Mathesi consensescere omneque tempus suum consumere prohibentur. Nostrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui sedato animo in Elementis nostris tractandis progreditur, eo quo conscripta sunt, ordine, illa eadem facilitate perspiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perspexerat. Ea de causa, Mechanica inprimis & Hydraulica plurimis accessionibus in nova hac Editione aucta. Ita Theoriam de Motu gravium effecimus generalem, ut, cum in priore Editione tantummodo cum GALILÆO motum uniformiter acceleratum exposuerimus, nunc ad accelerationem quacunque lege factam illam extenderimus. Addidimus Methodos investigandi Centrum gravitatis in spatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum, tendentiamque mediam in Motu composito; ut alia taceamus. Integrum Caput octavum de descensu & ascensu corporum

porum in lineis curvis , quod præclara maxime continet ævi hujus inventa ; loco conveniente inseruimus. Theoriam de motu Penduli ex sublimioribus inventis effecimus uberiores : Id quod etiam circa Theoriam de Centro oscillationis curæ nobis cordique fuit. Eadem nobis dicenda sunt de Motu projectorum & de Motu corporum ex percussione. Inprimis autem Theoria de Viribus centralibus uberrimè a nobis pertractata , cujus antea primas tantummodo lineas duxeramus. Caput decimum - quartum integrum de Resistentia medii nunc demum accedit. Non commemoramus ea , quæ passim adspersa a nobis fuere : Quæ de causâ de Hydrostaticæ & Aërometriæ accessionibus specialiora non proferimus. Hydraulicæ tandem Theoriam non uno modo reddidimus ampliorem , eamque duobus integris Capitibus de Cursu fluminum & de Percussione fluidorum auximus. Ac hoc pacto finem , quem intendimus , nos consecutos esse speramus. Cur ex intervallo demum prodeat Tomus Secundus , causæ in vulgus notæ sunt , ut de iis dicere supervacaneum existimem. Operam daturi sumus , ut Tomus Tertius , etsi mole Secundum superaturus , celerius sequatur , si Deo ita visum fuerit. Nullus vero dubito non defuturam in hoc Secundo Tomo materiam , in qua interea industriam suam exerceant Mathematicum cultores , donec Tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo , quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt : Utut ingens quoque eorum farrago sit , quæ ad vitæ non minus jucunditatem , quam necessitatem utilia. Quotquot igitur animum habent sciendi cupidum , ex materiis , de quibus hic instituitur tractatio , plurimum voluptatis percipient. Neque ullus du-
bito

bito fore, ut, qui cum attentione in iis discutiendis versati fuerint, Artem inveniendi ipso usu sibi sint comparaturi, qua deinceps extra Mathesin felicissime utentur. Dabam MARBURGI CATTORUM, die 28 Martii, Anno 1733.





ELEMENTA MECHANICÆ ET STATICÆ.

P R Æ F A T I O.



PLERISQUE Autoribus, qui Mechanicæ Elementa in usum tyronum explicarunt; non omnis Motus ratio habetur, sed ejus tantum qui, vel Virium vel Temporis aliquo compendio, ope Machinarum perficitur. Nec improbandum est eorum institutum; si quidem plura docere non intendunt, quam quæ in construendis & examinandis Machinis usum præbere possunt.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

A

Quo-

Quoniam tamen nobis constitutum est Matheseos Elementa dare, non modo ad usum vitæ humanæ, sed & ad profectum Scientiarum, Physicæ præsertim, sufficientia; ideo consultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illustrandam Motus doctrinam hætenus inventa. Hæc enim necessaria sunt ad Naturæ cognitionem, ut sine iis certa obtineri nunquam possit; cum in Motu plurimorum Phænomenorum ratio contineatur. Ipsarum vero etiam Machinarum consideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in Physicis aliquando versaturus; cum Motus corporum organicorum explicatio frustra sine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars Motuum Scientiæ superstruatur, Experientia clarissime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos necessitatibus vitæ humanæ impulsæ non sine maximo sudore perageremus. Eum igitur in finem, non solum Machinarum simplicium (quod vulgo fieri solet) rationem omnem fideliter exposui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum constructionem scitu necessaria sunt, & desideratam hætenus in istiusmodi Elementis tractationem de Potentiarum ad Machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his solis contenti præterire possunt Motus regulas: Machinarum enim Vires sine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica sejungant; consultius tamen visum fuit sororio vinculo utramque eonnecti, cum ita demonstrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Æquabili.

DEFINITIO I.

1. **M**ECHANICA est Scientia Motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de Æquilibrio Solidorum agit.

DEFINITIO II.

2. *Quies* est permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero est continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. *Moveri nempe dicitur corpus, si successive aliis aliisque corporibus quiescentibus, aut ejusdem corporis quiescentis partibus fit contiguum.*

DEFINITIO III.

4. *Gravitas* est nifus deorsum versus centrum Terræ.

DEFINITIO IV.

5. *Gravitatio* est pressura, quam corpus in aliud sibi subjectum vi Gravitatis suæ exercet.

DEFINITIO V.

6. *Massa* corporis est materia ipsi cohærens, hoc est, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO VI.

7. *Moles* seu *Volumen* est expansio corporis secundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO VII.

9. *Vis Motrix*, seu *Vis* simpliciter, est principium motus, seu id unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, si cum motu actuali conjungitur, qualis est in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, si ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, seu quæ in solo nifu seu conatu ad motum consistit, qualis est in globo ex filo suspenso, & in elatere tenso quod se restituere nititur.

SCHOLION.

10. Hanc Virium distinctionem dudum agnovere inter homines plebeios Molitores nostrates. Mortuam enim vocant aquam in alveo stagnantem aut segniter admodum fluentem; vivam vero, quæ impetu concepto rotis molendinorum circumagendis sufficit. Acutissimus LEIBNITIUS cum magnum momentum in ea situm esse deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in Mechanicam introduxit (a).

DEFINITIO VIII.

11. *Tempus* hic voco eam temporis partem, qua motus durasse supponitur.

DEFINITIO IX.

12. *Spatium* est linea, quam mobile instar puncti consideratum motu suo describere concipitur.

DEFINITIO X.

13. *Velocitas* seu *Celeritas* est ea Vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore spatium datum percurrendi.

COROLLARIUM.

14. Celeritas adeo dupla est, qua eodem tempore spatium duplum describitur: tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum describitur; & ita porro in infinitum, in quacunque multiplicium vel submultiplicium specie.

SCHOLION I.

15. Nimirum celeritas tanto major censetur ab omnibus, quanto majus spatium eodem tempore percurrit mobile. Ponamus mobile A in intervallo unius minuti secundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile B, quod intervallo unius secundi percurrat spatium trium pedum. Ultro fatebuntur omnes

(a) *At. Brudt. An. 1695. p. 194.*

celeritatem ipsius mobilis B majorem esse celeritate alterius A.

SCHOLION II.

16. Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod satis patet attendenti, celeritas quasi per totam mobilis massam diffusa concipitur, ita ut eadem in singulis partibus existat. Proprie loquendo est gradus vis motricis.

DEFINITIO XI.

17. *Linea directionis* est, juxta quam corpus progredi nititur.

DEFINITIO XII.

18. *Velocitas* sumta cum directione dicitur *Conatus*.

SCHOLION.

19. Unde conatus censetur major, quo major est celeritas.

DEFINITIO XIII.

20. *Vis resistendi* dicitur, quæ in contrarium, seu juxta oppositam directionem Vis cujuscunque alterius agit.

SCHOLION.

21. Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.

DEFINITIO XIV.

22. *Quantitas motus*, momentanea scilicet, est factum ex celeritate in massam. LEIBNITIUS appellat *Quantitatem motionis*.

SCHOLION.

23. Pendet nimirum quantitas motus & a quantitate massæ, & a quantitate celeritatis; ita ut in eodem corpore motus existimetur major, si major est celeritas, qua movetur; & in duobus corporibus, quorum eadem est celeritas, ejus motus major sit, cujus massæ quantitas major est.

DE-

DEFINITIO XV.

24. *Motus æquabilis est, si mobile continuo eadem celeritate fertur.*

AXIOMA I.

25. *Nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit.*

SCHOLIION.

26. De hoc Principio plura diximus in Ontologia seu Philosophia prima, integro Capite 2, Sect. I, Part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite supposuit ARCHIMEDES in libris De Æqu ponderantibus.

AXIOMA II.

27. *Si Mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia spatia describit.*

SCHOLIION.

28. Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum spatium dato tempore percurrendum (§. 13.); nulla sane ratio est, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diversa spatia describere deberet. Describit adeo eandem (§. 25). Axiomatis hujus veritatem apertius stabilimus in Philosophia prima (§. 656. Ontol.), ubi etiam Scientiarum Mathematicarum principia demonstrativa ratione a priori ex notioribus simplicioribus deduximus.

AXIOMA III.

29. *Si duo Mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia spatia describunt.*

SCHOLIION.

30. Patet idem per Axioma primum (§. 25). Conferatur eadem Philosophia prima (§. 660).

THEOREMA I.

31. *In motu æquabili, Spatia a mobili percursa sunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis, (*per hypoth.*), mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare si tempore t describit spatium s , alio tempore t priori æquali describit quoque spatium s priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis t spatium bis s , immo tempore quocunque multiplici seu submultiplici $nt(=T)$ spatium $ns(=S)$. Sunt igitur spatia s & S ut tempora t & T (§. 184 *arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA II.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur; Spatia descripta sunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit spatium s , etiam mobile B, quod eadem celeritate fertur, (*per hypoth.*) eodem tempore t percurrit spatium s priori æquale (§. 29). Sed si idem mobile percurrit tempore quocunque alio T spatium S , erit hoc ad alterum s ut T ad t (§. 31). Quare cum spatium s sit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonstrata*; spatia s & S , a mobilibus A & B temporibus t & T descripta, sunt ut tempora t & T , quibus describuntur. Q. e. d.

THEOREMA III.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur; Spatia eodem tempore motu æquabili descripta sunt ut Celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t celeritate c spatium s describit; eodem tempore t celeritate bis c describit spa-

tium bis f , & celeritate quacunque multiplici vel submultiplici nc spatium quodcunque multiplex vel submultiplex nf (§. 31). Erunt adeo spatia f & S ($=nf$) descripta ut celeritates c & C ($=nc$). Quare si mobile B eodem tempore t celeritate C describit spatium S : erit adhuc spatium a mobili A descriptum f ad spatium a mobili B eodem tempore descriptum S ut celeritas illius c ad celeritatem huius C . Q. e. d.

THEOREMA IV.

34. Spatia a duobus mobilibus peracta sunt in ratione composita temporum & celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Describat mobile A celeritate c spatium f tempore t , & B celeritate C spatium S tempore T . Ponamus idem mobile B celeritate c describere spatium q tempore T . Quoniam celeritas c mobilium A & B eadem, erit $q : f = T : t$ (§. 32). Et quia spatia S & q eodem tempore T describuntur, erit $S : q = C : c$ (§. 33). Ergo $Sq : fq = TC : tc$ (§. 213 Arithm.); consequenter $S : f = TC : tc$ (§. 181 Arithm.); hoc est, spatia sunt in ratione composita temporum & celeritatum (§. 159 Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

35. Si $S = f$; erit $CT = ct$, adeoque $C : c = t : T$ (§. 299 Arithm.), hoc est, si duo corpora motu æquabili æqualia spatia describunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM II.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali spatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA V.

37. Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates C & c sunt in ratione composita ex directa spatiorum S & f & reciproca temporum T & t .

DEMONSTRATIO.

Est enim $S : f = CT : ct$ (§. 34). Quare cum sit $fCT = Sct$ (§. 297 Arithm.); erit $C : c = St : fT$ (§. 299 Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM.

38. Quoniam $C : c = St : fT$ (§. 37); erit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{f}{t}$ (§. 181 Arithm.). Quare celeritas C analytice exprimitur per $\frac{S}{T}$, hoc est, celeritas est ut spatium per tempus divisum.

THEOREMA VI.

39. Si duo corpora motu æquabili lata celeritatibus C & c describunt spatia S & f ; tempora T & t , quibus describuntur, erunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $S : f = CT : ct$ (§. 34); erit $fCT = Sct$ (§. 297 Arithm.). Quare $T : t = cS : Cf$ (§. 299 Arithm.) Q. e. d.

THEOREMA VII.

40. Si spatia S & f a duobus mobilibus

libus motu æquabili descripta fuerint ut celeritates C & c , tempora T & t erunt equalia.

DEMONSTRATIO.

Est enim $S: f = CT: ct$ (§. 34). Quare si esse debet $S: f = C: c$ necesse est ut sit $T = t$ (§. 178 Arithm.). Est vero $S: f = C: c$ per hypoth. Ergo etiam $T = t$. Q. e. d.

Idem etiam hoc modo ostenditur. $S: f = C: c$ per hypoth. Sed $S: f = CT: ct$ (§. 34). Ergo $C: c = CT: ct$ (§. 167 Arithm.); consequenter $1: 1 = T: t$ (§. 185 Arithm.). Quare cum sit $1 = 1$, erit etiam $T = t$. Q. e. d.

THEOREMA VIII.

41. Quantitates motus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, Q & q , sunt in ratione composita celeritatum C & c & massarum M & m .

DEMONSTRATIO.

Est enim $Q = CM$, & $q = cm$ (§. 22). Quare $Q: q = CM: cm$, hoc est, Q habet ad q rationem compositam ipsius C ad c & ipsius M ad m (§. 159 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

42. Si $Q = q$; erit $CM = cm$, adeoque $C: c = m: M$ (§. 299 Arithm.): hoc est, si quantitates motus duorum mobilium motu æquabili latorum fuerint æquales; celeritates habent rationem massarum reciprocā.

COROLLARIUM II.

43. Quare si ulterius $M = m$; erit etiam $C = c$: hoc est, si duorum mobilium ejusdem massæ motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM III.

44. Similiter si $C = c$; erit $M = m$: hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moventur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt massæ eorundem æquales.

THEOREMA IX.

45. Duorum corporum quæ motu æquabili feruntur, celeritates C & c sunt in ratione composita ex quantitatibus motus Q & q directæ & massarum M & m reciproca.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q: q = CM: cm$ (§. 41) erit $Qcm = qCM$ (§. 297 Arithm.)

Ergo $C: c = Qm: qM$ (§. 299 Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

46. Si $C = c$; erit $Qm = qM$, adeoque $Q: q = M: m$ (§. 299 Arithm.): hoc est, si duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus massarum rationem habent.

COROLLARIUM II.

47. Quodsi ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $Q = q$; adeoque si duo mobilia æqualem massam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales sunt.

THEOREMA X.

48. In motu æquabili massæ corporum M & m sunt in ratione composita ex quantitatibus motus Q & q directæ & celeritatum C & c reciproca.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q: q = CM: cm$ (§. 41) erit $Qcm = qCM$ (§. 297 Arithm.)

Ergo $M: m = Qc: qC$ (§. 299 Arithm.) Q. e. d.

Co:

COROLLARIUM.

49. Si $M=m$; erit $Qc=qC$, adeoque $Q:q=C:c$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum massæ fuerint æquales; quantitates motus sunt ut velocitates.

THEOREMA XI.

50. In motu æquabili, quantitates motus Q & q sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum M & m atque spatiorum S & s & reciproca temporum T & t .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $C:c=St:fT$ (§. 37)
& $Q:q=CM:cm$ (§. 41)
erit $CQ:cq=CMSt:cmfT$
(§ 213 *Arithm.*)
 $Q:q=MSt:mfT$ (§. 185
Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

51. Si $Q=q$; erit $MSt=mfT$, adeoque $M:m=fT:St$, $S:f=mT:Mt$, $T:t=MS:mf$: hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; 1°. massæ eorundem sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca spatiorum: 2°. Spatia sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca massarum: 3°. Tempora denique sunt in ratione composita massarum & spatiorum.

COROLLARIUM II.

52. Si præterea $M=m$; erit $fT=St$, adeoque $S:f=T:t$ (§. 299 *Arithm.*). Nempe si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac massæ fuerint æquales; spatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM III.

53. Si ulterius $T=t$; erit quoque $S=f$. Duo igitur mobilia, quorum massæ ac quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt.

COROLLARIUM IV.

54. Si præter $Q=q$, fuerit $S=f$; erit $mT=Mt$ (§. 51) adeoque $M:m=T:t$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si duo mobilia, quorum quantitates motus æquales sunt, æquabili motu æqualia spatia percurrunt; massæ eorundem sunt temporibus proportionales, vel, quod perinde est, tempora sunt massis proportionalia.

COROLLARIUM V.

55. Si ulterius $T=t$; erit etiam $M=m$; adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales sunt & quæ eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt, massæ æquales sunt.

COROLLARIUM VI.

56. Si præter $Q=q$, fuerit $T=t$; erit $MS=mf$ (§. 51), adeoque $S:f=m:M$: hoc est, spatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili descripta sunt in ratione massarum reciproca.

THEOREMA XII.

57. In motu æquabili, spatia S & s sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatuum motus Q & q atque temporum T & t & reciproca massarum M & m .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q:q=MSt:mfT$ (§. 50)
erit $QmfT=qMSt$ (§. 297 *Arithm.*).
Unde $S:f=QTm:qtM$ (§. 299
Arithm.). Q. e. d.

COROL.

COROLLARIUM I.

58. Si $S=f$; erit $QTm=qtM$; adeoque $Q:q=tM:Tm$, $M:m=QT:qt$, $T:t=qM:Qm$ (§. 299 *Arithm.*). Quodsi adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia spatia feruntur; erunt 1°. quantitates motus in ratione composita ex directa massarum & reciproca temporum: 2°. massæ in ratione composita quantitatum motus atque temporum: 3°. tempora in ratione composita ex directa massarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM II.

59. Si præter $S=f$, fuerit $M=m$; erit $QT=qt$, adeoque $Q:q=t:T$ (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, quantitates motus sunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia spatia feruntur.

COROLLARIUM III.

60. Si præter $S=f$, fuerit $T=t$; erit $qM=Qm$ (§. 58), adeoque $Q:q=M:m$ (§. 299 *Arithm.*). Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia spatia æquali tempore motu æquabili feruntur, quantitates motus massis proportionales sunt.

THEOREMA XIII.

61. Corporum motu æquabili latorum massæ M & m sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus Q & q atque temporum T & t & reciproca spatiorum S & s .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q:q=MSt:msT$ (§. 50); erit $QmsT=qMSt$ (§. 297 *Arithm.*) Unde $M:m=QTs:qtS$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Si $M=m$; erit $QTs=qtS$, adeoque $Q:q=tS:Ts$, $S:s=QT:qt$ & $T:t=qS:Qs$ *Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.*

(§. 299 *Arithm.*), hoc est, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum massæ æquales, 1°. quantitates motus sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca temporum: 2°. spatia sunt in ratione quantitatum motus & temporum composita: 3°. tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca quantitatum motus.

COROLLARIUM II.

63. Si præter $M=m$ fuerit $T=t$; erit $qS=Qs$, adeoque $Q:q=S:s$ (§. 299 *Arithm.*); hoc est quantitates motus duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, spatiis æquali tempore peractis proportionales sunt.

THEOREMA XIV.

64. In motu æquabili tempora T & t sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum M & m atque spatiorum S & s & reciproca quantitatum motus Q & q .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q:q=MSt:msT$ (§. 50); erit $QmsT=qMSt$ (§. 297 *Arithm.*). Unde $T:t=qMS:Qms$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

65. Si $T=t$; erit $qMS=Qms$, adeoque $Q:q=Ms:ms$, $M:m=Qs:qs$ & $S:s=qM:qM$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquidivertens; erunt 1°. quantitates motus in ratione massarum & spatiorum composita: 2°. massæ in ratione composita ex quantitatum motus directa & spatiorum reciproca: 3°. spatia in ratione composita ex directa quantitatum motus & reciproca massarum.

SCHOLIUM.

66. Suadeo tyronibus, ut hactenus demonstrata numeris illustrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus *A*, cuius massa sit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 secundorum emetiri spatium 12 pedum, & corpus aliud *B*, cuius massa sit ut 5, tempore 8 secundorum emetiri spatium 16 pedum: habebimus $M=7$, $T=3$, $S=12$, $m=5$, $t=8$, $f=16$, adeoque $C=4$, $c=2$ (§. 38.), $Q=28$, $q=10$ (§. 22). Hinc utique deprehenditur.

$$C:c = St:fT \text{ (§. 37)}$$

$$4:2 = 12:16. 3=96:48 = 4:2$$

$$S:f = CT:ct \text{ (§. 34)}$$

$$12:16 = 4.3:2.8 = 12:16$$

$$T:t = cS:Cf \text{ (§. 39)}$$

$$3:8 = 2.12:4.16 = 24:64 = 3:8$$

$$C:c = Qm:qM \text{ (§. 45)}$$

$$4:2 = 28.5:10.7 = 140:70 = 4:2$$

$$M:m = Qc:qC \text{ (§. 48)}$$

$$7:5 = 28.2:10.4 = 56:40 = 7:5$$

$$S:f = TQm:tqM \text{ (§. 57)}$$

$$12:16 = 3.28.5:8.10.7 = 420:560$$

$$I = 12:16$$

$$M:m = TQf:tqS \text{ (§. 61)}$$

$$7:5 = 3.28.16:8.10.12 = 7:5$$

$$Q:q = MST:msT \text{ (§. 50)}$$

$$28:10 = 7.12.8:5.16.3 = 672:240 = 28:10$$

Eodem modo illustrantur singula Theorematum Corollaria.

Sit enim $S=12$, $T=6$, $f=8$, $t=4$; erit $C=12:6=2$, & $c=8:4=2$, consequenter ob $C=c$

$$S:f = T:t \text{ (§. 32)}$$

$$12:8 = 6:4.$$

Sit $S=12$ & $f=12$. Quoniam $S=CT$ & $f=ct$ (§. 34); si $C=2$ & $c=3$, erit $T=6$ & $t=4$. Habemus adeo

$$C:c = t:T \text{ (§. 35)}$$

$$2:3 = 4:6.$$

Si pro S & f ponatur Q & q , pro T & t vero M & m ; idem Exemplum illustrabit primum Theorematis VIII Corollarium (§. 42).

Iisdem observatis Exemplum præcedens in Corollarium primum Theorematis quinti quadrat.

Sit denique $Q=12$, $q=8$, $M=4$, $m=4$; erit $C=12:4=3$, & $c=8:4=2$, (§. 22), adeoque

$$Q:q = C:c \text{ (§. 49)}$$

$$12:8 = 3:2.$$

CAPUT II.

De Motu uniformiter accelerato & retardato.

DEFINITIO XVI.

67. **M**otus acceleratus est, qui nova capit celeritatis incrementa. Uniformiter acceleratus est, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

COROLLARIUM I.

68. In motu adeo uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora quibus acquiruntur.

COROLLARIUM II.

69. Quare si tempuscula elementaria fuerit dt & dT , celeritates elementares iis respondentes dc & dC ; erit $t:T = c:C$ (§. 192 Arithm. & §. præc.) Sunt enim t & T summæ ipforum dt & dT , c & C vero summæ ipforum dc & dC (§. 178. 67. Arithm.)

DEFINITIO XVII.

70. Motus retardatus est, cujus ce-

le-

leritas decrefcit. *Uniformiter retardatus* dicitur, fi continua celeritatis decre-
menta fuerint temporibus proportio-
nalia.

AXIOMA II.

71. *Corpus ſemel quieſcens nunquam movebitur, niſi aliunde ad motum con-
citetur: ſemel autem motum eadem ve-
locitate & ſecundum eandem directio-
nem moveri perget, niſi a cauſa aliqua
ſtatum ſuum mutare cogatur.*

SCHOLION.

72. Hæc ſatis manifeſta ſunt ex Axiomate
omnis Philoſophiæ fundamentali, quod nihil
ſit ſine ratione ſufficiente (§. 25): quemad-
modum idem oſtendimus in Coſmologia. Nec
experientia eidem repugnat, cum ſemper ra-
tio assignari poſſit, tam motus retardati, quam
directionis mutatæ, modo omnes circumſtan-
tias ſatis perpendamus.

COROLLARIUM I.

73. Corpus itaque, quod nonniſi impul-
ſu ſemel facto movetur, per lineam rec-
tam moveri debet.

COROLLARIUM II.

74. Quodſi vero per curvam incedit,
duplici vi urgeatur neceſſe eſt, altera nem-
pe, qua progredieretur ſecundum lineam
rectam, alteram vero, qua a motu rectili-
neo continuo retrahitur.

AXIOMA III.

75. Si niſus & reniſus duorum cor-
porum fuerint æquales; motus nullus
ſubſequitur, ſed corpora ſe mutuo impel-
lentia juxta ſe invicem quieſcunt.

AXIOMA IV.

76. Si corpus motum ſecundum æn-
dem directionem, qua movetur, impelli-
tur; motus acceleratur (§. 67).

AXIOMA V.

77. *Corpus motum a vi reſiſtente re-
tardatur (§. 20. 70.)*

OBSERVATIO I.

78. *Gravitas corporum eadem eſt in
qualibet a ſuperficie Telluris diſtancia, in
qua experimentum capere licet: quam in
poſterum Intervallum non nimis ma-
gnum dicemus.*

OBSERVATIO II.

79. *Gravia deſcendunt motu accele-
rato.*

THEOREMA XV.

80. *Si corpus ex quiete motu uni-
formiter accelerato fertur, ſpatia ſunt
in ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Designet recta AB tempus quo mo-
tus mobilis acceleratur, & rectæ ad
AB applicatæ PM, BC ſint ut celeri-
tates in fine temporis AP, AB acqui-
ſitæ. Quoniam motus uniformiter ac-
celeratur & motus a quiete incipit,
per hypoth. erit $AP : AB = PM : BC$
(§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB
perpendiculares per conſtruct. adeoque
inter ſe parallelæ (§. 256 Geom.). Eſt
igitur ABC triangulum (§. 268 Geom.),
idque rectangulum (§. 91 Geom.).
Ponamus pm eſſe alteri linea PM infi-
nite propinquam: celeritates PM & pm
non different niſi quantitate infinite
parva mR in fine tempuſculi Pp, atque
adeo tempuſculo toto Pp eadem cele-
ritate fertur mobile (§. 4 Analyſ.) ;
conſequenter motus iſto tempuſculo
æquabilis eſt (§. 24). Enimvero in

Tab. I. motu æquabili spatium est ut tempus
 Fig. I. ductum in celeritatem §. 34. *Mech.*
 & §. 159. *Arithm.*), adeoque spatium
 a mobili tempusculo Pp confectum ut
 rectangulum Pp RM (§. 376. *Geom.*);
 consequenter cum singulis tempusculis,
 quibus AP constat, ipsi Pp æqualibus
 istiusmodi parallelogrammula respon-
 deant, quæ simul sumta aream trian-
 gularem APM conficiunt (§. 99. *Ana-*
lyf. infin.), area APM exprimit spa-
 tium à mobili tempore AP confectum.
 Ex eadem ratione triangulum ABC ex-
 primit spatium à mobili tempore AB
 confectum. Sunt igitur spatia tempori-
 bus AP & AB descripta ut triangu-
 la APM & ABC; & consequenter ob eo-
 rundem similitudinem §. 268. *Geom.*),
 in ratione duplicata rectarum AP & AB
 (§. 398. *Geom.*), hoc est, temporum.
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

81. Quoniam in motu uniformiter ac-
 celerato celeritates sunt ut tempora (§. 68);
 spatia erunt etiam in ratione duplicata ce-
 leritatum in fine temporum, quibus de-
 scribuntur, acquisitarum (§. 80).

COROLLARIUM II.

82. In motu uniformiter accelerato tem-
 pora sunt in ratione subduplicata spatio-
 rum (§. 159. *Arithm.* & §. 80. *Mech.*)

COROLLARIUM III.

83. Etiam celeritates in fine temporum
 sunt in ratione subduplicata spatiorum illis
 descriptorum (§. 159. *Arithm.* & §. 81.
Mech.)

THEOREMA XVI.

84. Spatia, quæ corpus motu unifor-
 miter accelerato percurrit, crescunt tem-

poribus æqualibus secundum numeros im-
 pares 1, 3, 5, 7, 9, &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu
 uniformiter accelerato progreditur,
 fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. spatium
 intra momentum 1 confectum erit ut 1,
 intra duo percursum ut 4, intra tria ut
 9, intra quatuor ut 16, intra quinque
 ut 25 &c. (80). Quodsi ergo sub-
 trahas spatium intra minutum unum
 percursum a spatio intra duo confecto
 4; remanebit spatium minuto secundo
 respondens 3. Eodem modo reperi-
 tur spatium minuto tertio absolutum
 $9 - 4 = 5$, spatium quarto respon-
 dens $16 - 9 = 7$, quod quinto con-
 venit $25 - 16 = 9$ &c. & ita porro
 (§. 83. *Analyf.*). Spatium ergo minuti
 primi est ut 1, secundi ut 3, tertii
 ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9, &c.
 adeoque spatia corporis motu unifor-
 miter accelerato progredientis tempo-
 ribus æqualibus augentur secundum
 numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c.
Q. e. d.

THEOREMA XVII.

85. Corpora gravia, in medio non
 resistente, per intervalla non nimis ma-
 gna, motu uniformiter accelerato descen-
 dunt.

DEMONSTRATIO.

Cum gravia descendant motu acce-
 lerato (§. 79); Vis gravitatis ea con-
 tinuo impellere debet (§. 76). Est
 vero gravitas in intervallo non nimis
 magno eadem (§. 78). Quare gravia
 eodem modo temporibus æqualibus
 deorsum impelli debent (§. 25). Itaque
 si

si tempusculo primo impelluntur celeritate c , etiam secundo celeritate c , impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non resistit per *per hypo.* celeritatem semel acquisitam constanter retinent (§. 71), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, consequenter motu uniformiter accelerato descendunt (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

86. Sunt igitur spatia descensus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81.); & secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. crescunt (§. 84).

COROLLARIUM II.

87. Tempora vero, itemque velocitates, sunt in ratione spatiorum subduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION I.

88. Dum gravia descendere supponimus in medio non resistente, ab omni externo impedimento abstrahimus, quocunque tandem nomine veniat & à quacunque causa ortum trahat. Unde motum quoque secludimus, quò, ob vertiginem Telluris in Astronomia adstruendum, in transversum rapiuntur gravia ipso descensus tempore: quamvis in intervallo non nimis magno nulla inde in descensum gravium irregularitas irrepit.

SCHOLION II.

89. GALILÆUS GALILÆI, qui legem descensus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experientiis consonam deprehendit (a). In tabula scilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiore, agglutinata intus membrana, ne scabritie sua pilam æneam bene politam in descensu remoraretur. Eam

postea supra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis successive elevavit, & tempus, in qua pila per canalem descendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit spatia decursa semper esse ut temporum quadrata. Notandum vero spatia computanda esse non in longitudine, sed in altitudine plani, vi eorum, quæ inferius demonstrabuntur.

SCHOLION III.

90. Eadem experimenta, modo tamen diverso, sæpius cum GRIMALDO suo repetiit Joh. Baptista RUCIOLUS (b), plurimos Globos cretaceos ejusdem molis, pondere 8 unciarum, ex diversarum turrium aut ædium fenestris dimittens & tempus descensus perpendiculi vibrationibus dimetiens. Perpendiculi vibrationes numeravit cum GRIMALDO à transitu Caudæ Leonis per Meridianum usque ad alterum transitum, ut certo constaret, quot vibrationes penduli respondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps usus in observationibus Astronomicis, antequam Horologia oscillatoria ab HUGENIO fuissent inventa. Experimenta sequens repræsentat Tabella.

Vibrationes Penduli.	Tempus		Spatium in fine temporis.	Spatium singulis temporibus confectum.
	''	'''	Ped. Rom.	Ped. Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

B 3

SCHO-

(a) In Dialogis de motu locali, Dial. 3. p. m 157. 158.

(b) Almagest. Nov. Tom. I. lib. 2. c. 21. prop. 4. fol. 89. 90.

SCHOLIUM IV.

91. Cum adeo experimenta RICCIOLI in observando maxime exercitati in tanto intervallo instituta Theoriæ apprimè consentiant; vix attendenda esse videntur, quæ in contrarium assert (c) DECHALES, qui se expertum scribit, uno minuto semisecundo grave descensu suo confecisse pedes $4\frac{1}{4}$, duobus $16\frac{1}{2}$, tribus 36, quatuor 60, quinque 90, sex 123. Sufficit, quod ipse a resistencia aëris irregularitatem deducat, quam in Demonstratione insuper habuimus.

THEOREMA XVIII.

92. Si grave in medio non resistente per intervallum non nimis magnum descendit; spatium ab eo decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur quam in fine temporis grave acquirit.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Concipiatur recta AB, quæ tempus Fig. 1. integrum descensus repræsentet, in partes quotcunque æquales divisa, & ad abscissas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ sint ut celeritates cadendo in istis temporibus acquisitæ. Quoniam itaque $AP:AQ=PM:QI$; $AP:AS=PM:SH$ &c. (§. 85); & rectæ PM, QI, SH, BC inter se parallelæ (§. 256 Geom.); erit ABC triangulum (§. 268 Geom.). Et spatium tempore AB percursum est ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonstratione Theorematis xv (§. 80) constat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter descriptum cum sit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique

(c) Statica lib. 2. prop. 11. Mund. Math. Tom. II. f. 275.

istud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 Geom.) Tab. I.
Q. e. d. Fig. 1.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipsius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquisita conficitur, æquale est spatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro descendit.

PROBLEMA I.

94. Dato tempore, quo grave ex altitudine data descendit, spatia definire, quæ singulis istius temporis partibus conficit.

RESOLUTIO.

Sit altitudo data = a , tempus = t , spatium parte temporis 1 confectum x ; erit (§. 86),

$$1:t^2=x:a$$

$$t^2x=a$$

$$x=a:t^2$$

Est adeo spatium parte temporis prima confectum $a:t^2$, adeoque decursum parte secunda = $3a:t^2$, tertia descriptum = $5a:t^2$ &c. (§. 86).

E. gr. supra in Experimentis RICCIOLI (§. 90) intra 4 secunda globus cretaceus descendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo secundo confectum = $240:16=15$, spatium confectum secundo = $15.3=45$, confectum tertio = $15.5=75$, confectum denique quarto = $15.7=105$. Est autem $15+45+75+105=240$.

PROBLEMA II.

95. Dato tempore, quo grave in medio non resistente per spatium datum descendit; determinare tempus, quo aliud spatium datum in eodem medio conficiet.

(RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum spatia sint ut quadrata temporum (§. 86), quærat^{ur} ad spatium per quod grave dato tempore descendit, spatium quod in quæstione est, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis, (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum temporis quæsitum.

2. Quare si inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) prodibit ipsum tempus quæsitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis RICCIOLI (§. 90) intervallo 4 minutorum descendit per spatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus sit spatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt[4]{(135. 16:240)} = \sqrt[4]{(135:15)} = \sqrt[4]{9} = 3$.

PROBLEMA III.

96. Dato spatio, quod grave in medio non resistente dato aliquo temporis intervallo confecit; determinare spatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum spatia sint ut quadrata temporum (§. 86); quærat^{ur} ad quadratum temporis, quo grave per datum spatium descendit, ad quadratum temporis quo aliud quæsitum emetiri debet, atque ad spatium datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui erit spatium quæsitum.

E. gr. Per experimenta RICCIOLI, Globus cretaceus intervallo duorum secundorum confecit spatium 60 pedum: quæritur quantum spatium confecturus sit intervallo 4 secundorum? Reperietur spatium quæsitum $16. 60:4 = 4. 60 = 240$.

THEOREMA XIX.

97. Si corpus fertur motu uniformiter retardato; spatium dimidium ejus percurrit quod motu uniformi eodem tempore conficeret.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum repræ-
sentans recta AB in partes quotcunque
æquales divisa & ad eam applicentur
rectæ BC, SH, QI, PM, quæ sint ut
velocitates temporis partibus o, BS,
BQ, BP, BA respondentes, ita ut, di-
missis perpendicularibus HE, IF, MG,
rectæ CE, CF, CG, CB sint ut cele-
ritates temporibus HE, FI, GM, AB,
hoc est, BS, BQ, BP, BA amissæ.
Quoniam CE:CF=EH:FI & CG:CB
=GM:BA (§. 70); erit ABC trian-
gulum (§. 268 *Geom.*). Quodsi Bb sit
tempusculum infinite parvum, motus
erit uniformis, adeoque spatiolum a
mobili descriptum ut arcus BbcC, con-
sequenter spatium tempore AB confec-
tum ut triangulum ABC, quemadmo-
dum ex Demonstratione Theor. xv
(§. 80) constat. Enimvero spatium a
mobili celeritate BC tempore AB uni-
formiter descriptum est ut rectangu-
lum ABCD (§. 34). Ergo illud hujus
dimidium (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.*

THEOREMA XX.

98. Spatia motu uniformiter retar-
dato descripta temporibus æqualibus se-
cundum numeros impares retrogrado or-
dine decrescunt.

DEMONSTRATIO.

Percurrat mobile tempusculo primo
spatium 7 pedum; dico, quod secun-
do

Tab. I. do confecturum sit spatium 5 pedum,
Fig. 1. tertio spatium 3, quarto spatium unius,
si motus uniformiter retardetur. Sint
enim partes axis trianguli æquales BS,
SQ, QP, PA ut tempora, semiordi-
natæ BC, SH, QI, PM ut celeritates
in initio temporis cujuslibet: erunt
trapezia BSHC, SQIH, QPMI, &
 $\triangle PAM$ ut spatia temporibus istis de-
scripta: quod patet ex Demonstratione
Theorematis præcedentis (§. 97).
Sit igitur $BC = 4$ & $BS = SQ = QP$
 $= PA = 1$, erit $SH = 3$, $QI = 2$,
 $PM = 1$ (§. 70), $BSHC = (4 + 3)$
 $1 : 2 = \frac{7}{2}$, $SQIH = (3 + 2) 1 : 2 = \frac{5}{2}$,
 $QPMI = (2 + 1) 1 : 2 = \frac{3}{2}$ (§. 400
Geom.), $PAM = \frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*),
consequenter spatia æqualibus tempo-
ribus descripta sunt ut $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, hoc est,
ut 7, 5, 3, 1 (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

Tab. I. 99. Si ad altitudinem AE applicen-
Fig. 9. tur celeritates PM, ES, descensu uni-
formiter accelerato per spatia AP, AE
acquisitæ; locus celeritatum AMS erit
Parabola.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AP & AE sunt spatia &
PM atque ES celeritates descensu per
ea acquisitæ; erit $AP : AE = PM^2 : ES^2$
(§. 81), hoc est, quadrata semiordi-
natarum sunt ut abscissæ. Est igitur
AMS Parabola. (§. 402 *Anal. fin.*)
Q. e. d.

COROLLARIUM.

100. Quoniam in motu uniformiter ac-
celerato celeritates sunt ut tempora (§. 68);
si ad spatia AP, AE applicentur tempora

PM, ES, quibus describuntur, curva tem-
poris AMS erit itidem Parabola. Tab. I.
Fig. 9.

PROBLEMA IV.

101. Data celeritate mobilis in mo-
tu quomodocunque accelerato per tempus;
invenire spatium.

RESOLUTIO.

Designet in axe curvæ AP tempus
& semiordinata PM celeritatem eodem
acquisitam, sitque AMS locus celeri-
tatum. Ducatur pm ipsi PM infinite
propinqua. Fiat $AP = t$, $PM = c$,
erit $Pp = dt$ & elementum $PMmp = cdt$
(§. 98. *Analys. infin.*). Enimvero quo-
niam tempusculo dt motus est æqua-
bilis; erit spatiolum a mobili descrip-
tum $= cdt$ (§. 34), consequenter $\int cdt$
sive area AMP designabit spatium tem-
pore AP descriptum. Quare si detur
celeritas c per tempus t , non alia re
opus est, quam ut valore hoc in ele-
mento cdt substituto formula summe-
tur.

E. gr. Sic $c = t^n$: erit $cdt = t^n dt$, adeo-
que $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Sunt igitur spatia
APM & AES temporibus AP & AE decursa
ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$, ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, consequen-
ter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 178. *Arithm.*),
adeoque, ob $t^n = c$, ut ct ad CT . Habemus
itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu conti-
nuo accelerato acquisita fuerit in ratione
quacunque multiplicata vel submultiplica-
ta temporis; spatia sunt in ratione com-
posita celeritatum atque temporum.

PRO-

PROBLEMA V.

Tab. I. 102. *Data celeritate mobile motu continuo, sed quomodocunque accelerato Fig. 9. lati per spatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas = c , tempus = t , spatium r ; elementum spatii dr tempusculo dt percursum est cdt (§. 101). Habemus itaque

$$\frac{cdt=dr}{dt=\frac{dr}{c}}$$

$$t=\int \frac{dr}{c}$$

Quare si celeritas detur per r , non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento $dr : c$ substituto formula summetur:

E. gr. Sit in Hypothesi BALIANI c ut r , erit $dr : r = dt$, adeoque $t = \int \frac{dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analys. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates sunt ut spatia, tempora sunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\int \frac{dr}{r}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiae Hyperbolae 1 divisum (§. 244 in *Analys. infin.*); ideo

Theorema. In hypothesi BALIANI, in qua celeritates sunt ut spatia, tempus exhibetur per spatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio à quadratura Hyperbolae pendet.

Similiter si celeritas fuerit in ratione multiplicata vel submultiplicata quacunque spatii, hoc est, c ut r^n ; erit $dt = \frac{dr}{r^n}$;

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

$$= r^{-n} dr, \text{ consequenter } t = \frac{1}{n+1} r^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{1-n} + \frac{r}{r^n}, \text{ adeoque } T:t = \frac{1}{1-n} \frac{R}{R^n} :$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{r}{r^n} = \frac{R}{R^n} \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c} = Rc : rC.$$

Theorema. Si celeritates acquisitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLION.

103. VARIGNONIUS, Geometra eximius, (a) doctrinam de motu accelerato & retardato *Analysi generali* absolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam *Analysin* faciunt, etsi in *Mechanica*, ubi in *Hypothesibus* naturæ exemplo GALILÆI acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut Tyrones ad solutiones *Problematum Physico-Mathematicorum* præparemus, utque intelligant principia in his *Elementis* stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta *Analysi* cum primis principiis *Matheseos* connexum exhibere lubet.

PROBLEMA VI.

104. Si tempora sint ut abscissæ AP & Tab. celeritates istis acquisitæ ut semiordinate XIII. PN curvæ ANS ejus naturæ, ut semi- Fig. ordinata PN sit ad semiordinatam Hyperbolæ æquilateræ PM in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata dimidii axis AC ad abscissam CP à centro C computatam: invenire spatia dato tempore descripta. 122. a.

C RESO-

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1707. p. 290. & seq.*

RESOLUTIO.

Tab.
XIII.
Fig.
122. a.

Ex superioribus (§. 101) liquet spatia quæsitæ esse ut aream APN, adeoque pendere à quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR est Hyperbola æquilatera, cujus axis transversus AB, centrum C; si fiat $AC = a$, $AP = t$, erit $BP = 2a + t$, adeoque, ob $AP \cdot PB = PM^2$ (§. 507 *Analys.*), $PM^2 = 2at + t^2$; consequenter $PM = \sqrt{2at + t^2}$. Quare cum porro sit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$(a + t)^n : a^n = \sqrt{2at + t^2} : PN$, erit $PN = a^n \sqrt{2at + t^2} : (a + t)^n = c$. Est nempe c celeritas tempore AP acquiritæ, quam PN repræsentat *per hypoth.* Quare si in Elemento spatii $PNnp = c dt$ (§. 101) substituatur valor ipsius c ; prodibit Elementum speciale $a^n dt \sqrt{2at + t^2} : (a + t)^n$. Totum adeo negotium huc redit, ut hoc Elementum summabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$$\begin{aligned} a + t &= x \\ \text{erit } dt &= dx \\ t &= x - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2at &= 2ax - 2a^2 \\ t^2 &= a^2 - 2ax + x^2 \\ 2at + t^2 &= x^2 - a^2 \\ \sqrt{2at + t^2} &= \sqrt{x^2 - a^2} \\ (a + t)^n &= x^n \\ \frac{a^n dt \sqrt{2at + t^2}}{(a + t)^n} &= \frac{a^n dx \sqrt{x^2 - a^2}}{x^n} \end{aligned}$$

Fiat porro

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^3}{a - z}, & x &= \frac{a^3 : 2}{(a - z)^{1:2}} \\ 2x dx &= \frac{a^3 dz}{(a - z)^2}, & x^n &= \frac{a^{3n:2}}{(a - z)^{n:2}} \\ dx &= \frac{a^3 dz}{2x(a - z)^2} = \frac{a^3 dz (a - z)^{1:2}}{2a^{3:2}(a - z)^2} \\ &= \frac{a^{3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}} \\ a^n dx &= \frac{a^{n+3:2} dz}{2(a - z)^{3:2}} \end{aligned}$$

$$\text{Jam } x^2 - a^2 = \frac{a^3}{a - z} - a^2 = \frac{a^2 z}{a - z}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^{2:2} z^{1:2}}{(a - z)^{1:2}}$$

adeoque

$$a^n dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} dz}{2(a - z)^2}$$

Quare tandem habetur

$$\begin{aligned} \frac{a^n dx \sqrt{x^2 - a^2}}{x^n} &= \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} (a - z)^{n:2}}{2a^{3n:2}(a - z)^2} \\ &= \frac{1}{2} a^{(5-n):2} z^{1:2} (a - z)^{(n-4):2} dz \end{aligned}$$

Elementum hoc PNnp areæ APN integrabile est, si n fuerit numerus positivus par binario major.

E. gr. Sit $n = 4$, erit $(n - 4) : 2 = 0$, adeoque $(a - z)^{(n-4):2} = (a - z)^0 = 1$ (§. 55 *Analys.*), consequenter

$$PNnp = \frac{1}{2} a^{1:2} z^{1:2} dz,$$

$$\text{adeoque ANP} = \frac{1}{3} a^{1:2} z^{3:2}$$

$$= \frac{1}{3} z \sqrt{az}$$

Jam quia

$$\frac{x^2 = a^3 : (a - z)}{a - z = a^3 : x^2}$$

$$\frac{z = a - a^3 : x^2}{az = (a^2 x^2 - a^4) : x^2}$$

$$\sqrt{az} = \frac{a \sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$\frac{1}{3} z \sqrt{az} = \frac{a^2 (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}}{3x^3}$$

Porro

Tab.
XIII.
Fig.
122. a.

$$\begin{aligned} \text{Porro} \\ x &= t + a \\ x^2 &= t^2 + 2at + a^2 \\ x^2 - a^2 &= t^2 + 2at \\ \frac{1}{3}x\sqrt{ax} &= \frac{a^2(t^2 + 2at)\sqrt{(t^2 + 2at)}}{3(a+t)^3} \\ &= \text{ANP} \end{aligned}$$

SCHOLI ON.

105. Apparet adeo, Exemplum hoc non alium habere usum, quam ad exercendum Calculum summatorium. Et idem quoque de sequentibus patebit.

PROBLEMA VII.

106. Si celeritas tempore t acquisita fuerit ut $t^{n-1} : (t^{2n} + a^{2n})$; determinare spatium r .

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101), erit $dr = t^{n-1} dt : (t^{2n} + a^{2n})$. Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\begin{aligned} t^{2n} &= a^{2n} - 2x^2 \\ \text{erit} \quad t &= a^{(n-1):n} x^{1:n} \end{aligned}$$

$$dt = \frac{1}{n} a^{(n-1):n} x^{1:n-1} dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n : t$

$$\begin{aligned} t^{n-1} &= a^{n-1} x : a^{(n-1):n} x^{1:n} \\ &= a^{(nn-2n+1):n} x^{(n-1):n} \end{aligned}$$

$$t^{n-1} dt = \frac{1}{n} a^{n-1} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{t^{n-1} dt}{t^{2n} + a^{2n}} &= \frac{\frac{1}{n} a^{n-1} dx}{a^{2n} - 2x^2 + a^{2n}} \\ &= \frac{1}{n} a^{1-n} \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Quare spatium } r = \frac{1}{n} a^{1-n} \int \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Si tangens arcus circuli fuerit x , ra-

dus a , erit $\int \frac{a^2 dx}{x^2 + a^2}$ arcus (§. 158 *Analys. infin.*), ut adeo quadratura curvæ, quæ spatium r exhibet, pendeat à rectificatione arcus circuli.

VARIGNONIUS formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad sinum versum: id quod fit hoc modo. Sit

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{(2a:y-1)} \\ &= a(2ay^{-1}-1)^{1:2} \end{aligned}$$

erit $dx = -a^2 y^{-2} dy : \sqrt{(2ay^{-1}-1)}$. Elementum hoc in præsentem casu sumendum est positivum, quia crescente x decrescit y , consequenter ipsius y differentiale $-dy$.

$$\begin{aligned} \text{Porro } x^2 &= 2a^3 : y - a^2 \\ x^2 + a^2 &= 2a^3 : y \end{aligned}$$

Quamobrem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{a^2 y dy}{2a^3 y^2 \sqrt{(2ay^{-1}-1)}} \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{a^{1-n} dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2na^{n+1}} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \end{aligned}$$

PROBLEMA VIII.

107. Data celeritate e tempore t acquisita, quæ sit ut $t^{n-1} : (t^{2n} - a^{2n})$; invenire spatium r .

RESOLUTIO.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

$$\text{erit } dr = t^{n-1} dt : (t^{2n} - a^{2n}).$$

Ponatur ut ante (§. 106)

$$\begin{aligned} t^{2n} &= a^{2n} - 2x^2 \\ \text{reperietur } \frac{t^{n-1} dt}{t^{2n} - a^{2n}} &= \frac{1}{na^{n-1}} \cdot \frac{dx}{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = a \sqrt{(2ay - 1 + 1)}$$

$$\text{reperietur } \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{dy}{2a\sqrt{(2ay + y^2)}} \text{ ut}$$

ante, adeoque tandem

$$dr = \frac{1}{2na^{n+1}} \frac{ady}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$$

Ponatur denique

$$\begin{aligned} v - a &= y \\ \text{erit } v^2 - 2av + a^2 &= y^2 \\ 2av - 2a^2 &= 2ay \\ v^2 - a^2 &= y^2 + 2ay \\ \sqrt{(v^2 - a^2)} &= \sqrt{(y^2 + 2ay)} \\ dv &= dy \\ \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} &= \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 2ay)}} \end{aligned}$$

Tab. XIII. Quoniam $a^2 dv : 2\sqrt{(v^2 - a^2)}$ est sector hyperbolicus CAM, abscissis à centro computatis (§. 189 *Analys. infin.*), erit dimidius axis Hyperbolæ æquilateræ $= a$, & CP $= v$; consequenter $a^2 dy : \sqrt{(y^2 + 2ay)}$ exprimit eundem sectorem CAM, abscissa AP existente y . Patet itaque determinationem spatii in casu præsentè pendere à quadratura Hyperbolæ.

SCHOLION I.

108. Apparet ex his Problematis, quam utile sit formulas omnes elementorum Arcuum, segmentorum & sectorum pro sectionibus conicis aliisque curvis descriptu facilibus atque cognitarum proprietatum reperire, sibi que familiares reddere, ut formulæ non summabiles ad eas tanquam simpliciores reduci possint, quemadmodum & paulo ante vidimus (§. 106) posse constructiones curvarum ad alias descriptu faciliores reduci, per quas construantur: cujus rei exempla quoque dedimus in *Algebra* (§. 245 & seqq. *Analys. infinit.*)

SCHOLION II.

109. Potest etiam sectoris CAM Elementum independentè à formula $a^2 dv : \sqrt{(v^2 - a^2)}$ XIII. inveniri hoc modo. Sit AC = CB = a , AP Fig. = y , erit PB = $2a + y$, consequenter ob 123. a. PM² = AP.PB (§. 507 *Analys. finit.*) = $2ay + y^2$; PM = $\sqrt{(2ay + y^2)}$, qua in $\frac{1}{2}$ CP = $\frac{1}{2}(a + y)$ ducta prodit area trianguli CMP = $\frac{1}{2}(a + y)\sqrt{(2ay + y^2)}$.

Ergo CmM + mMPp = $\frac{1}{2}dy\sqrt{(ay + y^2)} + ady + ydy a + y = \frac{2aydy + y^2dy + \frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)^2}} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$

Jam mMPp = $dy\sqrt{(2ay + y^2)} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$ Ergo CmM elementum sectoris CMA = $\frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay + y^2)}}$

DEFINITIO XVIII.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempusculo quocunque infinite parvo successive nascitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita resolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempusculi particulis natas. Particulæ istiusmodi elementares quantitatis motus, tempusculo infinite parvo genitæ, dicuntur *Sollicitatio ad motum*.

COROLLARIUM.

111. Quodsi ergo istæ particulæ ponantur æquales, quatenus spectantur ut effectus ab eadem causa tempusculis æqualibus producti; si sollicitatio ad motum dicatur g , erit nifus elementaris seu quantitas motus tempusculo dt genita = gdt .

PROBLEMA IX.

112. Data accelerationis lege; determinare sollicitationem ad motum.

RESO-

RESOLUTIO.

Si sollicitatio sit g , erit quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempusculo isto $= dc$, massa mobilis $= m$. Quoniam tempusculo infinite parvo dt motus æquabilis supponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, adeoque $g = mdc : dt$.

Quare si ex data accelerationis lege determinetur dt per dc , vel contra, prodibit valor ipsius g .

E. gr. In Hypothesi Galilæana gravium, seu in motu æquabiliter accelerato, celeritas c est ut tempus t , adeoque dt ut dc . Quare g ut $mdc : dc$, hoc est, ut m . Quare patet

Theorema. In Hypothesi Galilæana gravium seu in motu æquabiliter accelerato sollicitatio ad motum est ut massa, adeoque constans.

Si fuerit c ut t^n

$$\begin{aligned} \text{erit} \quad & \frac{dc = nt^{n-1} dt}{mdc = mnt^{n-1} dt} \\ g = \frac{dc}{dt} &= \frac{mnt^{n-1} dt}{dt} \\ &= nmt^{n-1} \\ &= nmt^n : t \\ &= nmc : t \end{aligned}$$

Theorema. Si celeritas crescit in ratione temporis multiplicata, erit sollicitatio ad motum ut factum ex massa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directæ & ut tempus reciproce: hoc est, si duo fuerint mobilia, sollicitationes ad motum erunt in ratione composita ex directâ massarum & celeritatum in exponentes dignitatis temporum ductarum, & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMc}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$, seu ut $NMcT$ ad $nmcT$.

PROBLEMA X.

113. Data sollicitatione ad motum; invenire mobilis motu continuo accelerato latitum velocitatem in locis singulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.

RESOLUTIO.

Sit recta, per quam mobile fertur, ^{Tab. XIII.} AB & normaliter ad eam applicatæ AC, PN &c. sint ut sollicitationes ad ^{Fig. 122. a} motum in A, P &c. PM sit ut celeritas à mobili in P acquisita. Ducatur pn ipsi PN infinite propinqua & dicatur $PN = g$, $AP = r$, $PM = c$, massa mobilis $= m$; erit $Pp = dr$. Sit porro tempusculum, quo mobile per Pp descendit, $= dt$: quia motus in spatiolo Pp æquabilis supponitur, erit

$$\begin{aligned} c &= dr : dt \quad (\S. 38) \quad \& \quad g = mdc : dt \quad (\S. 112). \\ \frac{c dt}{dt} &= \frac{dr}{dr : c} \quad \frac{g dt}{dt} = \frac{mdc}{mdc : g} \\ \frac{dr}{c} &= \frac{mdc}{g} \\ g dr &= mdc \\ \int g dr &= \frac{1}{2} mc^2 \end{aligned}$$

Est vero $\int g dr$ area APNC & $\frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} PM^2$. Quare si mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 Arithm.).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine spatii dati AP acquisita est ut recta, quæ potest aream sollicitationum APNC, seu est in ratione subduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

$$C \ 3; \quad c =$$

Tab.
XIII.
Fig.
122. a.

$$c = dr : dt \quad fgd r = \frac{1}{2} mc^2$$

$$\frac{2 fgd r}{m} = c^2$$

$$\frac{\sqrt{2 fgd r}}{\sqrt{m}} = c$$

$$dr : dt = \sqrt{2 fgd r} : \sqrt{m}$$

$$dr = dt \sqrt{2 fgd r} : \sqrt{m}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{2 fgd r} : \sqrt{m}} = dt$$

$$\int \frac{1 dr}{\sqrt{2 fgd r} : \sqrt{m}} = t$$

Quodsi ergo fiat $PL = \frac{1}{\sqrt{2 fgd r} : \sqrt{m}}$,
feu, mobili existente eodem, =
 $1 : \sqrt{2 fgd r}$, area DAPLE designabit
tempus.

Ponamus jam $AQ = R$, $QS = G$,
erit $C = \sqrt{2 fGdR}$, mobili existente
eodem, ut massa poni possit 1, aut ejus
nulla habenda sit ratio. Erit adeo

$$C : c = \sqrt{2 fGdR} : \sqrt{2 fgd r}$$

$$\text{Sed } PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2 fGdR}} : \frac{1}{\sqrt{2 fgd r}} \\ = \sqrt{2 fgd r} : \sqrt{2 fGdR}$$

$$\text{Ergo } PL : QO = c : C$$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollici-
tatione movetur motu continuo accelera-
to; erunt tempora QO & PL; quibus
spatia data AQ & AP conficit, celeritatibus
in fine illorum spatiorum acquisitis reci-
proce proportionalia, nempe ut PM ad QT.

SCHOLIUM I.

114. Consentit Analysis cum iis, quæ
NEWTONUS (a) demonstravit, nisi quod is
Vim centripetam vocet, quod nos Sollici-
tationem appellamus. Communiter enim Ma-
thematici celeritatem sumunt tanquam effec-

(a) In Princip. Phil. Natural. Mathemat. Lib. I.
Prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

tum vis motricis eidem proportionalem, at-
que adeo quantitatem motus tanquam men-
suram vis illius. Quare cum NEWTONUS
vim illam consideret ut urgentem mobile ver-
sus aliquod punctum fixum, eam centripetam
appellat. Alii in casu descensus gravium gra-
vitatem vocant, quia gravitas consideratur
ut causa acceleratrix motus gravium & cele-
ritas momentis singulis descendenti superacce-
dens tanquam effectus illius causæ.

SCHOLIUM II.

115. Ex Theorematis per Problema præ-
sens erutis omnia deducere licet, qua de mo-
tu gravium in Hypothesi Galilæana sive
in alia quacunque demonstrantur. Etenim in
Hypothesi Galilæana est c ut t , adeoque
 dc ut dt . Jam $gdr = cdc$ (§. 113). Ergo
 $gdr = cdt$, consequenter $gdr : dt = c$, adeo-
que, ob $dr : dt = c$, erit $gc = c$. Cum adeo sit
 $g = 1$, gravitas in Hypothesi Galilæana
constans, hoc est, elementa singula, ex qui-
bus quantitas motus tempusculo infinite parvo
constat, sunt inter se æqualia. Jam quia $g = 1$,
erit, in eadem Hypothesi, $fgdr = fdr = \frac{1}{2} c^2$, hoc
est, r ut c^2 , (§. 181 Arithm.) quemadmodum
supra (§. 86). Similiter cum in Hypothesi
BALIANI sit c ut r ; erit $gdr = rdr$ (§. 113),
adeoque $g = r$. Jam initio descensus $r = 0$;
ergo $g = 0$, hoc est sollicitatio ad motum ini-
tio nulla est, seu phrasi communi Mathematico-
rum gravitas nulla est: quod cum sit ab-
surdum, Hypothesis Baliana impossibilis.

COROLLARIUM I.

116. Quoniam $\sqrt{2 fgd r} = APNC$ conti-
nuo crescit, semiordinata $PL = 1 : \sqrt{2 fgd r}$
continuo decrescit. Jam cum sit in A,
 $dr = 0$; erit $AD = 1 : 0 = \infty$. Est igitur
AD asymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLIUM III.

117. Hinc patet ratio, cur curva tempo-
ris ELF ita fuerit delineata, ut cum axe AB
non concurrat, sicuti curva celeritatum AMT,
neque rectam AD ad axem AB normalem se-
cet, sicuti curva sollicitationum CNG.

COROL-

Tab.
XIII.
Fig.
122. a.

COROLLARIUM II.

118. Cum sit $gdr = cdc$ (§. 113), adeoque $g = cdc : dr = PM. mR : Pp$; Sollicitatio ad motum, in quacunque accelerationis Hypothesi; erit ut subnormalis curvæ celeritatum (§. 35 *Analys. infin.*)

PROBLEMA XI.

Tab. XIII. Fig. 123. b. 119. Si sollicitatio centralis sit distantia à centro AD, PD &c. proportionalis; invenire velocitatem in quo vis puncto P & tempus descensus per AP.

RESOLUTIO.

Quoniam AD : PD = AC : PN per hypoth. scala sollicitationum centralium DC est linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit AD = a, AP spatium descensus = r, PN sollicitatio in P = g, erit PD = a - r. Est vero PN ut PD, per hypoth., adeoque g ut a - r. Quare cum sit (§. 113),

$$\begin{aligned} \frac{gdr}{ar - \frac{1}{2}r^2} &= \frac{\frac{1}{2}c^2}{\frac{1}{2}c^2} \\ \frac{fadr - frdr}{ar - \frac{1}{2}r^2} &= \frac{\frac{1}{2}c^2}{\frac{1}{2}c^2} \\ \frac{2ar - r^2}{2ar - r^2} &= c^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD = a, AP = r: si ex centro D radio AD describatur Quadrans AIH, erit semiordinata PI = $\sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Analys. finit.*) Habemus itaque sequens

Theorema. Si sollicitatio centralis sit proportionalis distantiae locorum à centro, velocitates in fine spatii acquisite sunt finibus arcuum respondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem descripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ per demonstrata

$$\begin{aligned} \text{Ergo } dr &= dt \sqrt{(2ar - r^2)} \\ dt &= dr : \sqrt{(2ar - r^2)} \end{aligned}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Tab. XIII. Fig. 123. b.

Quoniam $af \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ est arcus AI

(§. 157 *Analys. infin.*), erit tempus descensus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque sequens

Theorema. In Hypothesi Problematis, tempora descensus per spatia AP sunt ut arcus AI circuli ex centro D descripti.

Quodsi species curvæ celeritatum AMG desideretur, fiat AC = b.

Cum sit AD : AC = DP : PN, per hyp.

$$a : b = a - r : PN$$

erit PN = g = (ab - br) : a = b - br : a

Sed $\frac{1}{2}c^2 = \int gdr$ (§. 113)

$$\begin{aligned} \text{Ergo } \frac{1}{2}c^2 &= \int bdr - \int brdr : a \\ &= br - br^2 : 2a \end{aligned}$$

Patet itaque (§. 421 *Anal. finit.*) sequens

Theorema. In Hypothesi Problematis, locum celeritatum AMG esse Ellipsin, cujus parameter 2AC est dupla sollicitatio initialis, axis 2AD dupla distantia mobilis initio descensus a centro.

Si a = r, erit GD² = 2ab - 2a²b : 2a = 2ab - ab = ab, adeoque GD = \sqrt{ab} .

Cum itaque GD sit Axis dimidius conjugatus (§. 423 *Anal. finit.*); erit in D centrum Ellipseos, & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per spatia AP & AD descendit, si sollicitationes fuerint distantis à centro proportionales, per idem spatium corpus quodvis eodem tempore descendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLIUM.

121. Omnia hæc consona sunt iis, quæ NEWTONUS (a) demonstravit.

CAPUT

(a) In *Princip. Natural. Mathem.* lib. I. prop. 38. p. 119.

CAPUT III.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO XIX.

122. *C*entrum gravitatis est, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una æquiponderare alteri, si neutra alteram movet.

COROLLARIUM I.

123. Quodsi ergo descensus Centri gravitatis impeditur, grave quiescit.

COROLLARIUM II.

124. Quare si corpus ex Centro gravitatis suspenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM III.

125. Totam corporis gravitatem in Centrum gravitatis coactam supponere licet. adeoque pro corpore gravi solum Centrum gravitatis surrogari potest in demonstrationibus.

DEFINITIO XX.

126. *Diameter gravitatis* est recta transiens per Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Intersectio itaque duarum Diameterum determinat Centrum gravitatis.

DEFINITIO XXI.

128. *Planum gravitatis* est figura plana, in qua situm est Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo intersectio duorum Planorum gravitatis aut plurium est *Diameter gravitatis*.

DEFINITIO XXII.

130. *Gravia homogenea* sunt, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO XXIII.

131. *Gravia heterogenea* sunt, quorum gravitates non sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales: singulæ inter se non erunt pondere æquales. Aut si duorum gravium partes sumas volumine æquales, & eadem sint pondere inæquales; gravia inter se heterogenea sunt, licet in se homogenea esse possint.

DEFINITIO XXIV.

132. *Centrum magnitudinis* est punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales,

THEOREMA XXII.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete, in medio non resistente, eodem tempore per idem spatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Descendat grave A per spatium r : erit tempus descensus ut \sqrt{r} (§. 87). Descendat etiam grave B per idem vel æquale spatium r : erit etiam tempus descensus ut \sqrt{r} (§. 87). Si ergo spatium descensus ex quiete idem est, tempus etiam descensus idem est. *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLIION.

134. *Idem observatione confirmatur. Nam in spatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aërometria docemus) levissima plumula eodem tempore ex data altitudine descendit, quo globus plumbeus. Imo si corpora magna & ponderosa in aëre per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines sint mediocres, monente HUGENIO (a). Pendulorum in primis experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus RICCIOLUS globos argillaceos 20 unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole istis æquales, sed pondere subduplos per interval- lum 280 pedum demittens contrarium probare conatur (b), ideo non consentiunt, quia resistentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitæ sunt ut tempus (§. 85); velocitates gravium descendendum ex quiete dato tempore æquales sunt.

THEOREMA XXIII.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendendum dato tempore æquales sunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiæ, quæ cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nîsus versus centrum Terræ (§. 4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, adeoque illud quod quantitati motus accedit,

(a) In *Horologio oscillatorio*. Part. 4. Prop. 5.

(b) *Almag. Nov.* Tom. I. Lib. 2. c. 21. Prop. 1. f. 89.

consequenter sollicitatio ad motum (§. 110). Sed sollicitatio est etiam massæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. Q. e. d.

SCHOLIION.

137. *Liquet jam veritas Definitionis quintæ (§. 6).*

COROLLARIUM I.

138. Massa igitur corporum recte æstimatur per pondus.

COROLLARIUM II.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 41) & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus æquales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocā habent (§. 42).

COROLLARIUM III.

140. Massa invariata, pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA V.

141. *In homogeneis, quæ secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possunt, Centrum gravitatis idem est cum Centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

142. Quodsi ergo linea recta AB bi-Tab. I. fariam secetur in C; erit C Centrum gra- Fig. 2. vitatis.

SCHOLIION.

143. *Tale corpus homogeneum, quod se-Tab. I. cundum longitudinem in partes similes secari Fig. 3. potest, est c. gr. Cylindrus plumbeus. Si enim longitudo AE concipiatur in tres partes æquales ED, DC & CA vel quocunque*
D plures

plures divisa; secabitur in Cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint (§. 535 Geom.); atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium (§. 570 Geom.).

THEOREMA XXIV.

Tab. I. 144. Si Centra gravitatis duorum
Fig. 4. corporum A & B jungantur recta AB; Centri gravitatis communis C distantia BC & AC a Centris gravitatis particularibus B & A sunt reciproce ut pondera A & B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & $AC : CB = 1 : 3$. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec $BD = AC$ & $AE = CB$; erit $EC = CD$ (§. 88 Arithm.). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales divisa, quot nempe librarum sunt pondera junctim sumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomocunque varietur figura (§. 140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffusa concipiatur, Centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipsius B per FD, & gravitas ipsius A per EF uniformiter (§. 142); consequenter pondera A & B junctim sumta rectam ED representabunt. Hujus vero Centrum gravitatis commune est in C (§. cit.). Ergo idem est Centrum gravitatis commune ponderum A & B. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

145. Quodsi gravitates corporum A & B fuerint æquales, Centrum gravitatis com-

mune C erit in medio rectæ AB Centra Tab. I. gravitatis conjungentis. Fig. 4.

COROLLARIUM II.

146. Quia $A : B = BC : AC$; erit $A \cdot AC = B \cdot BC$. Unde patet vires æquiponderantium æstimandas esse per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis. Factum hoc Momentum ponderum vulgo vocant.

SCHOLIUM.

147. Theorema hoc utilissimum Experimento non ineleganti illustrari potest. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter se æqualia, & quorum latitudo sit dupla profunditatis, longitudo vero sextupla latitudinis: quamvis necesse non sit, ut hæ rationes accurate observentur, sufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimensiones. Parentur præterea alia quædam; Tab. Fig. unum sit longitudinis duplæ, alterum triplæ, tertium quadruplæ & ita porro. Quodsi parallelepipedum longitudinis duplæ colloces super latere prismatis trigoni, ita ut latus prismatis ipsum dividat in partes æquales AC & CB; partes AC & CB æquiponderabunt: quo ipso Axioma (§. 141) confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum triplæ longitudinis DE ea lege super prisma, ut ejus latus ipsum dividat in partes DF, FE, quæ sunt in ratione subdupla: pars FE præponderabit. Quodsi vero tria parallelepipeda simplicis longitudinis ipsi DF superimposueris; quatuor parallelepipeda duobus FK, KE in unum FE conjunctis æquiponderabunt. Est enim ipsius FE Centrum gravitatis in K, & ipsius DF in medio L, per experimentum primum. Distantiæ igitur Centrorum gravitatis a fulcro LF & FK sunt ut DF & FE, seu ut pondera (§. 130 Mech. & 573 Geom.). Est ergo ibi Centrum gravitatis commune, ut habet Theorema nostrum (§. 144). Eodem modo deprehenduntur 9 prismata sibi mutuo superimposita æquiponderare uni IH, cujus longitudo illorum longitudinis triplæ, & ita porro.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. I. 148. Quoniam $A:B = BC:AC$ (§. 144);
Fig. 4. erit etiam $A+B:A = BC+AC:BC$
(§. 190 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

149. Reperitur adeo Centrum gravitatis commune duorum ponderum C , si factum ex pondere uno A in distantiam Centrorum gravitatis separatorum AB ($= AC+CB$) dividatur per summam ponderum A & B (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. $A=12$, $B=4$, $AB=24$; erit $BC=24$. $12:16=18$.

COROLLARIUM V.

150. Quodsi pondus A detur & distantia Centrorum gravitatis particularium AB , una cum Centro gravitatis communi C , reperitur pondus $B=A$. $AC:BC$ (§. 302 *Arithm.*), hoc est, si momentum ponderis dati dividatur per distantiam ponderis quaesiti B a Centro gravitatis communi (§. 146). Sit ex. gr. $A=12$, $BC=18$, $AC=6$; erit $B=6$. $12:18=12:3=4$.

PROBLEMA XII.

Tab. I. 151. Ponderum plurium datorum
Fig. 6. a, b, c, d , Centrum gravitatis commune in recta AB determinare.

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis commune duorum ponderum a & b (§. 149): quod sit in F .
2. In F concipiatur applicari pondus $a+b$ duobus reliquis a & b æquale (§. 125), & quæratum porro in recta FE Centrum gravitatis commune ponderum $a+b$ & c (§. 149): quod sit in G .
3. Denique in G concipiatur applicari pondus $a+b+c$ duobus $a+b$ & c æquale (§. 125), & quæratum inter

ipsum & pondus d Centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod sit in H . Tab. I. Fig. 6.

Est adeo H Centrum gravitatis commune ponderum a, b, c & d . Patet etiam, quomodo sit progrediendum, si plura pondera dentur.

Sit e. gr. $a=20$, $b=10$, $c=15$, $d=5$, $AC=9$, $CE=6$, $EB=12$: erit $AF=b$. $AC:(a+b)=10$. $9:30=3$, adeoque $FC=6$ & $FE=FC+CE=12$. Hinc reperitur $FG=c$. $FE:(a+b+c)=15$. $12:45=4$. Quare $GE=FE-FG=8$, & $GB=GE+EB=20$. Invenitur adeo $GH=d$. $GB:(a+b+c+d)=5$. $20:50=2$. Unde $HB=GB-GH=18$, & (ob $AB=AC+CE+EB=27$) $AH=9$.

PROBLEMA XIII.

152. Duobus ponderibus D & E extra Centrum gravitatis commune in C suspensis; determinare quodnam eorum & quantum præponderet. Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in distantiam suam a centro suspensionis, nempe D in AC & E in BC : ex qua parte factum majus prodit, versus eam est præponderatio.
2. Factum minus a majore subtrahatur: erit residuum præpondium.

E. gr. Sit $D=30$ librarum, $E=20$, $AC=2$, $BC=4$: erit $D.AC=60$, $E.BC=80$, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit $AC:CB=d:md$, & pondus $D=mp$; æquiponderabit eidem in B pondus p (§. 150). Sed pondus E majus est quam p . Dicatur ergo excessus

Tab. I. *Fig. 7.* sus r , ita ut sit $E = p + r$. Quoniam momentum ipsius r æquale est momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur mrd (§. 146); excessus momenti ponderis E supra momentum alterius D est mrd . Sed mrd est differentia inter mpd & $mpd + mrd$, hoc est, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo excessus momenti ipsius E supra momentum alterius D, si factum D. AC ex E. CB subtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

153. Ponderum D & E itaque extra Centrum gravitatis in C suspensorum momenta sunt in ratione composita ipsorummet ponderum D & E & distantiarum a puncto suspensionis AC & CB.

COROLLARIUM II.

154. Ponderis itaque ex ipso puncto C suspensi momentum respectu reliquorum D & E nullum est, seu eadem ratione D & E inter se ponderant, ac si pondus in C plane abesset, quia scilicet distantia ejus nulla est.

PROBLEMA XIV.

Tab. I. *Fig. 8.* 155. Determinare præponderationem; ponderibus pluribus a, b, c, d extra Centrum gravitatis in C suspensis.

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera c & d in suas distantias a puncto suspensionis CE & CB: summa dabit momentum ponderum c & d junctim, seu ponderationem versus dextram (§. 153).
2. Ducantur quoque pondera a & b in suas distantias AC & CD: summa denuo dabit ponderationem versus sinistram (§. cit.)

3. Quodsi ergo ponderationem majorem a minore subtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæsitæ.

E. gr. Sit $AC = 6$, $DC = 4$, $CE = 5$, $CB = 8$, $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$, $d = 8$: erit ponderatio versus dextram $= c. EC + d. CB = 20. 5 + 8. 8 = 164$; versus sinistram $= a. AC + b. DC = 12. 6 + 15. 4 = 132$. Præponderant ergo c & d versus dextram momento ut 32.

PROBLEMA XV.

156. Ponderibus quotcunque extra Centrum gravitatis in C suspensis & versus dexteram præponderantibus; determinare punctum F, ex quo si summa omnium ponderum suspendatur; eadem maneat præponderatio versus dextram, quæ fuerat ante in dato ponderum a, b, c, d situ.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera c & d , vel quotcunque fuerint, versus dextram præponderant (§. 155).
2. Cum momentum summæ ponderum in F suspendendæ eidem æquale esse debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in summam ponderum (§. 153). Quare si per summam ponderum dividatur; quotus erit distantia CF, ex qua suspendenda est ponderum summa, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in Problemate præcedente; erit momentum quo pondera versus dexteram præponderant 32. Quodsi hoc divides per summam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ est distantia CF quæsitæ.

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. I. 157. Si Elementa figurarum, quale Fig. 9. $mMNn$, concipiantur instar ponderum ad axem AE appensorum & in vertice A punctum suspensionis; determinabitur punctum in AE, ex quo summa omnium ponderum suspensa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc est Centrum gravitatis (§. 125), summa momentorum omnium pondusculorum per summam pondusculorum divisa (§. 156). Sit enim $AP = x$, $MP = y$, $Pp = dx$; erit unum pondusculum $2ydx$, summa omnium $2fydx$, momentum unius pondusculi $2yxdx$ (§. 153), summa omnium $2fyxdx$, consequenter distantia Centri gravitatis a vertice $AF = fyxdx : fydx$. Quodsi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in *Analysi Infinitorum* docuimus, Centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA XVI.

Tab. I. 158. Determinare Centrum gravitatis in Triangulo BAC.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD basin BC bifariam secans in D. Quoniam $\triangle BAD = \triangle DAC$ (§. 440 *Geom.*): utrumque in totidem ponduscula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata resolvi potest; adeoque Centrum gravitatis $\triangle BAC$ erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat $AD = a$, $BC = b$, $AP = x$, $MN = y$; erit (§. 397 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$

$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur $AE = c$ perpendicularis ad BC, erit $AD : AE = AP : AQ$ (§. 396 *Geom.*), adeoque $AQ = cx : a$ & $Qq = cdx : a$. Unde momentum $yxdx = cbx^2 dx : a^2$, & $fyxdx$

$= cbx^3 : 3a^2$, quæ summa, per aream Tab. I. trianguli $AMN = cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Fig. 10. Geom.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis a vertice $= 2acbx^3 : 3acbx^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodsi pro x substituaturs a ; prodibit distantia Centri gravitatis totius Trianguli a vertice, $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}AD$.

PROBLEMA XVII.

159. Determinare Centrum gravitatis in Parabola. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Ad Parabolam est

$$ydx = a^{1:2} x^{1:2} dx \quad (\S. 103 \text{ Anal. infin.})$$

$$xydx = a^{1:2} x^{3:2} dx$$

$$fxydx = \frac{2}{5} a^{1:2} x^{5:2}$$

$$\text{sed } fydx = \frac{2}{3} a^{1:2} x^{3:2} \quad (\S. \text{cit.})$$

$$\text{Ergo } fxydx : fydx = \frac{2}{5}x = AF \quad (\S. 157).$$

PROBLEMA XVIII.

160. Determinare Centrum gravitatis in omnibus Parabolis superiorum generum & curvis agnatis in infinitum.

RESOLUTIO.

In infinitis Parabolis & curvis agnatis est (§. 105 *Analys. infinit.*).

$$ydx = a^{n:r} x^{m:r} dx$$

$$xydx = a^{n:r} x^{(m+r):r} dx$$

$$fxydx = \frac{r}{m+2r} a^{n:r} x^{(m+2r):r}$$

$$fydx = \frac{r}{m+r} a^{n:r} x^{(m+r):r} \quad (\S. \text{cit.})$$

$$fxydx : fydx = \frac{m+r}{m+2r} x = AF \quad (\S. 157).$$

E. gr. In Paraboloide cubicali, $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analys. finit.*). Ergo $AF = \frac{4}{5}AP$.

In Paraboloide surdesolidali, $m = 1$, $r = 5$. Ergo $AF = \frac{6}{11}AP$.

Tab. I. In Paraboloide biquadratico, $m = 1$, $r = 4$.
Fig. 9. Ergo $AF = \frac{5}{8} AP$.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$,
 $AF = \frac{5}{8} AP$.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, $AF = \frac{7}{11} AP$.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, $AF = \frac{9}{14} AP$.

COROLLARIUM.

161. Distantia ergo FP Centri gravitatis a
basi est $= x - \frac{m+r}{m+2r}x = \frac{mx+2rx-mx-rx}{m+2r}$

$$= \frac{r}{m+2r}x.$$

E. gr. In Parabola Apolloniana, $m = 1$, $r = 2$. Ergo $PF = \frac{2}{5} AP$.

In Paraboloide cubicali, $m = 1$, $r = 3$.
Ergo $PF = \frac{3}{7} AP$.

In curva ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$.
Ergo $PF = \frac{3}{8} AP$.

PROBLEMA XIX.

162. Determinare Centrum gravitatis in Parabola exteriori AST.

RESOLUTIO.

Si $AQ = x$, $QM = y$, Parameter
 $= 1$; erit (§. 388 *Analys. finit.*)
 $x^2 = y$ & hinc

$$\frac{ydx}{x^2dx} = \frac{x^2dx}{x^2dx}$$

$$\frac{xydx}{x^3dx} = \frac{x^3dx}{x^3dx}$$

$$\frac{fxydx}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{4}x^4}$$

$$\frac{fydx}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{3}x^3}$$

$$\frac{fxydx}{fydx} = \frac{\frac{3}{4}x}{\frac{3}{4}x} = \frac{3}{4}AQ = AL.$$

PROBLEMA XX.

163. Determinare Centrum gravitatis in infinitis Parabolis exterioribus superiorum generum, & aliis curvis agnatis.

RESOLUTIO.

Si Parameter $= 1$, pro infinitis
Parabolis superioribus & curvis agnatis
est $x^r = y^n$ (§. 519 *Analys. finit.*).

Quare

$$ydx = x^{r:n}dx$$

$$\frac{xydx}{x^{(r+n):n}dx} = \frac{x^{(r+n):n}dx}{x^{(r+n):n}dx}$$

$$\frac{fxydx}{nx^{(r+2n):n}} = \frac{nx^{(r+2n):n}}{r+2n}$$

$$\frac{fydx}{r+n} = \frac{n}{r+n}x^{(r+n):n}$$

$$\frac{fxydx}{fydx} = \frac{r+n}{r+2n}x = AL.$$

E. g. in Paraboloide cubicali, $r = 3$, $n = 1$.

Ergo $AL = \frac{4}{7} AQ$.

In Paraboloide biquadratico, $r = 4$, $n = 1$.

Ergo $AL = \frac{5}{6} AQ$.

In Paraboloide surdesolidali, $r = 5$, $n = 1$.

Ergo $AL = \frac{6}{7} AQ$.

In curva ad quam $x^3 = y^2$, $r = 3$, $n = 2$.

Ergo $AL = \frac{5}{7} AQ$.

In curva ad quam $x^4 = y^3$, $r = 4$, $n = 3$.

Ergo $AL = \frac{7}{10} AQ$.

PROBLEMA XXI.

164. Determinare Centrum gravitatis in curva ad quam $b^2y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$
(§. 99 *Analys. infinit.*)

$$\frac{xydx}{(bx^3dx - x^4dx) : b^2} = \frac{bx^3dx - x^4dx}{b^2}$$

$$\frac{fxydx}{fydx} = \frac{x^4 : 4b - x^5 : 5b^2}{(5bx^4 - 4x^5) : 20b^2}$$

$$\frac{fydx}{fydx} = \frac{x^3 : 3b - x^4 : 4b^2}{(4bx^3 - 3x^4) : 12b^2}$$

$$\frac{fxydx}{fydx} = \frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)}$$

$$= \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

Est adeo $20b - 15x : 15b - 12x = x : AF$.

PROBLEMA XXII.

165. Determinare Centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.

RESO-

Tab. I.
Fig. 9.

RESOLUTIO.

Tab. I. Sit Mp ad AB normalis ipsi DP infinite propinqua; erit arcus DM infinite parvus. Sit chordæ DE arcus dati DHE diameter AB parallela, quæ instar axis consideretur, ad quem ponduscula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut $MD \cdot PD$. (§. 153). Quoniam itaque ad radium HC , qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) bisecat, ponduscula & numero & momento æqualia utrinque disponuntur; transit is per Centrum gravitatis (§. 122). Sit jam $PC = DG = x$, $DC = a$, erit $DR = Pp = dx$. Jam cum sit angulus CDM rectus (§. 308 *Geom.*), & PDE item rectus (§. 230 *Geom.*), adeoque $PDC = RDM$ (§. 91 *Arithm.*), sintque etiam anguli DRM & DPC recti per construct. erit $MD : DR = DC : PD$, (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur $MD \cdot PD = DR \cdot DC = adx$ (§. 297 *Arithm.*). Summa ergo momentorum arcus DH est $ax = DC \cdot DG$, quæ, divisa per arcum DH , Centri gravitatis F distantiam a Centro circuli C determinat (§. 157.). Est itaque arcus $DH : DG = DC : CK$.

Quodsi pro DH ponatur quadrans AH , & pro DG radius AC ; prodibit distantia Centri gravitatis semiperipheriæ $AC^2 : AH$, hoc est, distantia hæc CF est tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

PROBLEMA XXIII.

166. Determinare Centrum gravitatis in sectore circuli ACB .

RESOLUTIO.

Ex antecedentibus liquet, si DC sec-Tab.II. torem bifariam secet, Centrum gravi-*Fig. 12.* tatis fore in recta DC . Ducatur radio PC arcus PNM , & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam segmentum annulare est pondusculum ex centro C suspensum, & quidem simul differentiale sectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp seu Nn momentum segmenti annularis $PNMmp$, hoc est, differentiale momenti sectoris. Jam momentum arcus $ADB = 2AC \cdot AE$, & momentum arcus $PNM = 2PC \cdot Pn$ (§. 165), & $\triangle ACB = EC \cdot AE$, atque $\triangle PCM = Pn \cdot Cn$ (§. 392 *Geom.*). Est igitur $\triangle ACB : \triangle PCM = EC \cdot AE : Cn \cdot Pn$, & momenta arcuum ADB & $PNM = AC \cdot AE : PC \cdot Pn$ (§. 181 *Arithm.*). Est vero $AC : PC = EC : Cn$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $\triangle ACB : \triangle PCM = AC \cdot AE : PC \cdot Pn$ (§. 184 *Arithm.*); consequenter momentum arcus ADB est ad momentum arcus PNM ut $\triangle ACB$ ad $\triangle PCM$ (§. 167 *Arithm.*), hoc est, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus $AD = p$, $AC = a$, $AE = b$; erit momentum arcus $ADB = 2ab$ (§. 165). Sit porro $PC = x$; reperietur, per modo demonstrata, momentum arcus $PNM = 2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero segmenti annularis $PMmp = 2bx^2 dx : a$. Hujus summa $2bx^3 : 3a$ est momentum sectoris CPM . Quare si fiat $x = a$, erit momentum sectoris $CAB = 2a^3b : 3a = \frac{2}{3}a^2b$, quo per summam ponderum seu arcum sectoris $ACB = ap$ diviso,

Tab. II. viso, prodibit distantia Centri gravitatis sectoris $ACB = 2ab : 3p = 2AC$.
 AE: 3AD. Est vero AC. AE:AD distantia Centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Distantia igitur Centri gravitatis sectoris a centro circuli est ad distantiam Centri gravitatis arcus ut 2 ad 3.

COROLLARIUM.

Tab. I. 167. Distantia ergo Centri gravitatis semicirculi à centro circuli C est $\frac{2}{3} AC^2 : AH$ (§. 166). Quare ut $\frac{2}{3} AH$, seu arcus 60° , ad AC ita AC ad distantiam Centri gravitatis semicirculi à centro circuli (§. 185 *Arithm.*)

PROBLEMA XXIV.

Tab. I. 168. *Invenire Centrum gravitatis segmenti DHED.*

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158): quod sit in L.
2. Quæratum Centrum gravitatis sectoris DCEHD (§. 166); quod sit in F.
3. Cum F sit commune Centrum gravitatis trianguli DCE & segmenti DEHD; quæratum, ad segmentum DEHD, triangulum DCE & LF, quarta proportionalis FK: erit FK distantia Centri gravitatis segmenti K à Centro gravitatis sectoris F (§. 144). Exprimenda vero est ratio segmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præstare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA XXV.

169. *Invenire Centrum gravitatis Lunulæ HIPPOCRATIS ADBEA.*

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis semicirculi ADB (§. 167): quod sit in G. Tab. II. Fig. 13.
2. Quæratum porro Centrum gravitatis segmenti AEBFA (§. 168): quod sit in H.
3. Cum adeo G sit Centrum gravitatis commune Lunulæ HIPPOCRATIS ADBEA & segmenti AEBA; quæratum, ad Lunulam, segmentum & HG, quarta proportionalis GI: erit GI distantia Centri gravitatis Lunulæ I à Centro gravitatis semicirculi G (§. 144).

Exprimenda vero est ratio segmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, nisi numeris utamur.

PROBLEMA XXVI.

170. *Invenire Centrum gravitatis in Parabola truncata SMNH.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis Parabolæ MAN (§. 159): quod sit in F.
2. Quæratum item Centrum gravitatis Parabolæ SAH (§. cit.), quod sit in O.
3. Quoniam Centrum gravitatis commune Parabolæ MAN & Parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratum porro, ad Parabolam truncatam SMNH, Parabolam MAN & distantiam FO, quarta proportionalis OK: erit in K Centrum gravitatis Parabolæ truncatæ (§. 144).

SCHOLIUM.

171. Patet eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illustravimus, semper inveniri Centrum gravitatis differentie duarum figurarum, quarum Centra gravitatis dantur.

RESO-

PROBLEMA XXVII.

Tab. II. 172. *Invenire Centrum gravitatis in Fig. 14. Parallelogrammo & Parallelepipedo.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per Centrum magnitudinis (§. 132) adeoque & gravitatis transit (§. 141); consequenter in I est Centrum gravitatis parallelogrammi (§. 127). Eodem modo patet in K esse Centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum CBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*) utrumque per centrum gravitatis ejus transit (§. 141); adeoque communis intersectio IK est diameter gravitatis (§. 129).
2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum transiens per L & basibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 535 *Geom.*); per Centrum gravitatis transit (§. 141) adeoque in L gravitatis Centrum est.

SCHOLION.

173. *Attendentibus statim manifestum est, non absimili modo Centrum gravitatis in Prismatibus & Cylindris reperiri, esseque illud punctum medium rectæ Centra gravitatis basium oppositarum conjungentis. In Polygonis autem regularibus Centrum gravitatis idem esse cum centro circuli circumscribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum vero Centrum gravitatis segmentorum & sectorum, imo lunularum circuli per superiora*
 Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

inveniri potest; ita per Problema præsens constat, quomodo variorum segmentorum cylindricorum Centrum gravitatis inveniri possit; quorum nempe bases sunt circuli segmenta, sectores, annuli, lunulæ.

PROBLEMA XXVIII.

174. *Invenire Centrum gravitatis Tab. II. Coni & Pyramidis. Fig. 15.*

RESOLUTIO.

Centrum gravitatis Coni esse in axe AC satis claret ex superioribus. Si $AP = x$; $Pp = dx$ & pondusculum in Cono est $prx^2 dx : 2a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3 dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc summa momentorum $prx^4 : 8a^2$, quæ, per summam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis portionis AMN a vertice $A = 6a^2 prx^4 : 8a^2 prx^3 = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AP$; adeoque Coni integri Centrum gravitatis distat a vertice $\frac{3}{4}AC$.

Eodem prorsus modo invenitur distantia Centri gravitatis a vertice in Pyramide $= \frac{3}{4}AC$.

PROBLEMA XXIX.

175. *Invenire Centrum gravitatis Tab. II. Conoidis parabolici ABCD ex rotatione Parabolæ AMBC circa axem AC geniti. Fig. 16.*

RESOLUTIO.

Pondusculum Conoidis MNnm $= pxdx : 2r$ (§. 202 *Anal. infin.*) adeoque momentum $= px^2 dx : 2r$ (§. 153); consequenter summa momentorum $= px^3 : 6r$, quæ, per summam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analys. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis

E por-

Tab. II. portionis conoidicæ AMPN a vertice
Fig. 16. $A = 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3}x$. Est adeo distantia Centri gravitatis a vertice in Conoide parabolico $ABD = \frac{2}{3}AC$.

PROBLEMA XXX.

176. Invenire Centrum gravitatis Conoidis paraboloidici ex rotatione Paraboloidis cujuscunque AMBC circa axem AC geniti.

RESOLUTIO.

Pondusculum Conoidis paraboloidici indefinitum est $px^{2+m}dx : 2r$ (§. 202 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{(2+m):m}dx : 2r$ (§. 153). Hinc summa momentorum $mpx^{(2m+2):m} : (4m+4)r$, quæ, per summam ponderum $mpx^{(2+m):m} : (2m+4)r$ (§. 202 *Anal. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice $A = (2m+4)mrpx^{(2+2m):m}$:

$$(4m+4)mrpx^{(2+m):m} = \frac{m+2}{2m+2}x \\ = \frac{m+2}{2m+2}AP; \text{consequenter in integro}$$

$$\text{Conoide } \frac{m+2}{2m+2}AC.$$

Sit e. gr. $m = 2$; erit $AH = \frac{2}{3}AC$.

Sit $m = 3$; erit $AH = \frac{5}{8}AC$.

Sit $m = 4$; erit $AH = \frac{3}{5}AC$.

Sit $m = 5$; erit $AH = \frac{7}{12}AC$.

PROBLEMA XXXI.

177. Invenire Centrum gravitatis segmenti Sphæræ.

RESOLUTIO.

In segmento sphærico pondusculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analys. in-*

finit.), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde summa momentorum $\frac{1}{2}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ, per summam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Analys. infinit.*) divisa, definit distantiam Centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Est adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc est, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Arithm.*) ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quodsi pro x substituatur r , seu semidiameter Sphæræ, prodibit distantia Centri gravitatis a vertice in hemispherio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo si pro x substituatur $2r$, Sphæræ integræ Centrum gravitatis reperitur distare a vertice semidiametro r , hoc est, idem cum centro Sphæræ.

PROBLEMA XXXII.

179. Invenire Centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico pondusculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Anal. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum summa $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per summam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *Analys. infinit. cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ divisa, distantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4pbx^3) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Est adeo ut

$6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice. Constat vero esse a axem transversum Hyperbolæ genitricis, x altitudinem Conoidis, seu illius abscissam (459 *Anal. fin.*).

PROBLEMA XXXIII.

180. *Invenire Centrum gravitatis segmenti Sphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In Sphæroide elliptico pondusculum $pbx dx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2 dx : 2r - pbx^3 dx : 2ar$ (§. 153.) Quare momentorum summa $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per summam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ divisa, distantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Est adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc est, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$, ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem Ellipsis genitricis, seu ipsum axem majorem Sphæroidis; x autem altitudinem segmenti, seu portionem axis inter verticem & basin interceptam.

COROLLARIUM I.

181. Quod si pro x ponatur a , prodit pro Centro gravitatis totius Sphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Est nempe in medio axe.

COROLLARIUM II.

182. Sphæræ igitur & Sphæroidis elliptici communem axem habentium Centrum gravitatis idem est (§. 178).

COROLLARIUM III.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit distantia Centri gravitatis in dimidio Sphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in Hemisphærio (§. 178). Nam si, ut ibi, fiat $a = 2r$, erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA XXXIV.

184. *Invenire Centrum gravitatis* Tab. II. *in Cono truncato BMND & in Pyra-Fig. 15. mide truncata.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur Centrum gravitatis Coni AMN (§. 174): quod sit in F.
2. Inveniatur quoque Centrum gravitatis Coni majoris BAD (§. cit.): quod sit in G.
3. Quærat, ad Conum truncatum BMND, Conum minorem MAN, & FG, quarta proportionalis GH, erit in H Centrum gravitatis Coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem Coni truncati BMND ad minorem MAN lineis esse exprimendam, nisi numeris utamur.

SCHOLION.

185. Eadem methodo Centrum gravitatis reperies in Conoidibus truncatis, itemque in Sphæra & Sphæroidibus truncatis. Enimvero, quamvis multa adhuc ea de re addi possent, filum tamen abrumpi consultum ducimus; cum ex hætenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant usum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum Centrum gravitatis aut punctum ipsi in superficie corporis cujuscunque respondens Mechanice explorandi, quantum ad praxin sufficit.

PROBLEMA XXXV.

186. *Determinare Centrum gravitatis Mechanice in corpore quocunque.*

RESOLUTIO.

Tab. II. 1. Super fune extenso, aut latere prismatis trigoni FG, corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, transit per Centrum gravitatis (§. 124).

Fig. 17.

2. Super eodem corpus, mutato situ, æquilibretur: erit MN denuo latus plani per Centrum gravitatis trans-euntis (§. cit.)

Intersectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in superficie corporis quæsitum, quod nempe est in diametro gravitatis (§. 126).

Aliter.

Tab. II. 1. Corpus datum O ita collocetur super tabula horizontali, ut, si vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).

Fig. 18.

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, sit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. cit.)

Communis adeo intersectio rectarum AB & CD in superficie corporis punctum C Centro gravitatis imminens determinat (§. 129).

Aliter.

Laminæ Centrum gravitatis invenies, si cuspidi alicujus styli eam imposueris, & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo sustentatur, Centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

187. Corporis adeo humani in directum extensi Centrum gravitatis, vi modi primi, observante BORELLO (a), inter nates & pubim existit. Quare totius Corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura concessit locum.

SCHOLIUM.

188. Quoniam subinde etiam in applicatione methodi superioris distantia Centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in solidis, ut illic per intersectionem duorum, hic trium normalium prodeat Centrum gravitatis; ideo unum saltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus suspendendis utile etiam est nosse perimetrorum Centra gravitatis; ideo nec inconsultum videtur uno alteroque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illustrata (§. 157 & seqq.) huc applicetur.

PROBLEMA XXXVI.

189. Invenire Centrum gravitatis in spatio parabolico mixtilineo APM.

RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & femiordinata pm alteri PM infinite propinqua. Quæraturo primo distantia Centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum Elementum $PMmp$, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 Anal. infinit.) consideretur instar pondusculi ad axem librationis AB in P suspensi, erit momentum ejus $= PMmp$. $\frac{1}{2} PM$ (§. 153), Centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§. 172). Sit jam $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$, adeoque $PpmM = ydx$, consequen-

Tab.
XIII.
Fig.
124.

(a) De motu animalium part. I. Prop. 134. P. m. 167.

Tab. XIII. Fig. 124. quenter momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2 dx$. Jam in parabola $y^2 = x$, parametro existente 1 (§. 388 *Anal. finit.*) atque hinc $2y dy = dx$. Quare momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2 dx = y^3 dy$, eorumque summa $= \frac{1}{4}y^4$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $= \int y dx$, $= \int 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3$. Ergo $QL = \int \frac{1}{2}y^2 dx : \int y dx$ (§. 157) $= 3y^4 : 8y^3 = \frac{3}{8}y$. Quare si fiat $AD = \frac{3}{8}PM$ & ex puncto D ducatur DL ipsi AB parallela; erit in ea Centrum gravitatis spatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex Centro gravitatis O parallelogrammuli PMmp ad AR normalis OK, & consideretur instar pondusculi ad axem librationis AR suspensi, erit PMmp. OK momentum ejus $= xy dx$. Est vero in parabola $y = x^{1/2}$ (§. 392 *Analys. fin.*). Ergo momentum pondusculi $= x^{3/2} dx$, consequenter eorum summa $= \int xy dx = \frac{2}{5}x^{5/2}$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $\int y dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (§. 103 *Analys. infinit.*). Ergo $DL = \int xy dx : \int y dx$ (§. 157) $= 3x^{5/2} : 5x^{3/2} = \frac{3}{5}x$. Quare si fiat $AQ = \frac{3}{5}AP$, & in Q erigatur normalis QL ipsi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L Centrum gravitatis spatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

PROBLEMA XXXVII.

190. *Invenire Centrum gravitatis perimetri Trianguli.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 125. Sit Triangulum ABC æquilaterum, vel isoscele.

1. Bisecentur rectæ in D, E & F: erunt puncta ista Centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§. 142).

2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam divisa, erit G Centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§. 145).

3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC instar ponderum consideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens; fiatque, ducta recta GF, ut $AB + AC + BC : BC = GF : GH$: erit in H Centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 148).

PROBLEMA XXXVIII.

191. *Invenire Centrum gravitatis perimetri figure irregularis cujuscunque, v. gr. Pentagonæ.*

RESOLUTIO.

1. Bisecentur singula latera AE, ED, DC, CB, BA, in G, F, K, I, H, erunt in istis divisionum punctis eorum Centra gravitatis particularia (§. 142).

2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque $AB + AE : AE = GH : HL$; erit in L Centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 148).

3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque $AB + AE + ED : ED = LF : LM$; erit in M Centrum gravitatis commune laterum AB, AE & ED (§. cit.)

4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque $AB + AE + ED + BC : BC = MI : MN$; erit in N Centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (§. cit.)

5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque $AB + BC + CD + DE$

Tab. XIII. Fig. 127. $+DE+EA:DC=NK:NO$; erit in O Centrum gravitatis commune totius perimetri (§. cit.).

S C H O L I O N.

192. Me non monente apparet, hac ratione determinari posse Centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomocunque in eodem plano sitorum.

T H E O R E M A XXV.

193. Omnis figura sive superficialis, sive solida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur factò ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis, seu lineam quam Centrum gravitatis describit.

D E M O N S T R A T I O.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in Centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale factò ex pondere moto in viam Centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ instar gravium homogeneorum considerentur; pondera ipsarum sunt ut volumina (§. 130); adeoque pondus motum est magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur factò ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis. Q. e. d.

Aliter.

Tab. XIII. Fig. 124. Idem etiam Analytice ostenditur de solido rotatione genito hoc modo. Sit $AP=x$, $PM=y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $=r:p$; erit solidum rotatione genitum $=\int py^2 dx : 2r$ (§. 197 Anal. infin.). Sit jam in L Centrum gravitatis, & $pS=QL$, distantia

ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio pS descripti via rotationis Centri gravitatis. Quare cum sit $pS=\frac{1}{2}\int y^2 dx : \int y dx$ (§. 189); erit via rotationis Centri gravitatis $=p\int y^2 dx : 2r\int y dx$. Quare si in hanc viam ducatur planum generans $\int y dx$; erit solidum rotatione genitum $=p\int y^2 dx : 2r$, ut ante.

C O R O L L A R I U M I.

194. Hinc cum parallelogrammum ABDC Tab. II. describatur, si recta AB juxta ductum alterius AC motu sibi semper parallelo descendat (§. 102. & 233 Geom.) & ex Coroll. II. Theor. XXVI. (215.) independenter ab his constet, viam Centri gravitatis E æqualem esse rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc est, altitudini parallelogrammi (§. 227 Geom.); area ejusdem æquatur factò ex basi CD seu linea describente in altitudinem EF.

S C H O L I O N I.

195. Hæc consona sunt iis, quæ de parallelogrammorum areis investigandis demonstrata sunt in Geometria (§. 370. 375. 387. Geom.)

C O R O L L A R I U M II.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC descendente describuntur, soliditatem haberi, si planum describens per altitudinem multiplicetur.

S C H O L I O N II.

197. Hæc denuo consentiunt cum iis, quæ de prismatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonstrata sunt (§. 539 & 541 Geom.).

C O R O L L A R I U M III.

198. Cum circulus describatur, si radius CL Tab. II. circa centrum C. rotetur (§. 131 Geom.); Fig. 20. Centrum vero gravitatis radii CL sit in medio F (§. 142); via Centri gravitatis est peripheria

Tab.II. peria circuli X. radio subduplo descripta ;
Fig.20. consequenter area circuli æquatur facto
ex radio CL in peripheriam radio sub-
duplo CF descriptam.

SCHOLIUM III.

199. Hæc iis consentanea esse, quæ in Geo-
metria de circulo demonstrata sunt (§. 410
Geom.), statim patet consideranti, quod
peripheria radio subduplo descripta sit peri-
pheriæ integro descriptæ dimidia (§. 412
Geom.).

COROLLARIUM IV.

Tab.II. 200. Si rectangulum ABCD circa axem
Fig.21. AD rotetur, ipsum quidem cylindrum, la-
tus vero BC cylindri superficiem describit
(§. 465 Geom.). Est vero Centrum gravi-
tatis rectæ BC in medio F (§. 142) &
Centrum gravitatis plani generantis in me-
dio G rectæ EF; via adeo hujus est peri-
pheria circuli radio EG, illius vero peri-
pheria circuli radio EF descripta. Quare
superficies cylindri est factum ex altitu-
dine BC in peripheriam circuli radio EF
descriptam sive basin, ut in Geometria
demonstravimus (§. 516 Geom.): soliditas
vero cylindri est factum ex rectangulo
generante ABCD in peripheriam circuli
radio EG, qui est ipsius EF seu semidia-
metri cylindri subduplus, descriptam.

SCHOLIUM IV.

201. Sit altitudo plani describentis, adeo-
que cylindri, $BC = a$, semidiameter basis
 $DC = r$, erit $EG = \frac{1}{2}r$, & posita ratione
semidiametri ad peripheriam $= 1 : m$, peri-
pheria radio $\frac{1}{2}r$ descripta $= \frac{1}{2}mr$. Ducta igitur
 $\frac{1}{2}mr$ in aream rectanguli $AC = ar$; erit
soliditas cylindri $= \frac{1}{2}amar^2$. Est vero $\frac{1}{2}mar^2$
 $= \frac{1}{2}r. mr. a$ & $\frac{1}{2}r. mr$ area circuli radio DC
descripti. Constat ergo cylindrum reperiri
æqualem facto ex basi in altitudinem, ut in
Geometria (§. 541) demonstratum.

COROLLARIUM V.

202. Similiter cum Centrum gravitatis

rectæ AB sit in medio M (§. 142) & su-Tab.II.
perficies Coni describatur, si triangulum Fig.15.
ABC circa axem AC rotetur (§. 467 Geom.),
sitque præterea $PM = \frac{1}{2}BC$ (§. 268 Geom.),
superficies Coni æqualis est facto ex ejus
latere AB in peripheriam radio PM, seu
semidiametri baseos BC subduplo descri-
ptam.

SCHOLIUM V.

203. Sit $BC = r$, $AB = a$, ratio radii ad
peripheriam $1 : m$; erit $PM = \frac{1}{2}r$ & peri-
pheria hoc radio descripta $= \frac{1}{2}mr$. Ducta
igitur $\frac{1}{2}mr$ in latus Coni AB, prodit super-
ficies $\frac{1}{2}amr$. Sed $\frac{1}{2}amr$ est etiam factum ex
 $\frac{1}{2}a$ & mr . Ergo superficies Coni producitur
ex peripheria baseos in latus dimidium, ut
in Geometria (§. 519) demonstratum.

COROLLARIUM VI.

204. Si triangulum ACB circa axem AB Tab.II.
rotetur, Conum describit (§. 467 Geom.). Fig.22.
Sed si CB divisa bifariam in D ducatur
recta AD, fiatque $AO = \frac{2}{3}AD$; erit in O
Centrum gravitatis (§. 158). Æquatur er-
go Coni soliditas facto ex triangulo CAB
in peripheriam radio PO descriptam (§.
193). Est vero $AD : AO = DB : OP$ (§. 268
Geom.). Sed $AO = \frac{2}{3}AD$ & $DB = \frac{1}{2}CB$ per
demonstr. Ergo $OP = \frac{2}{3}DB = \frac{1}{3}CB$.

SCHOLIUM VI.

205. Sit $CB = r$, $AB = a$, ratio radii ad
peripheriam $= 1 : m$; erit $OP = \frac{1}{3}r$, peri-
pheria hoc radio descripta $\frac{1}{3}mr$, $\triangle ACB$
 $= \frac{1}{2}ar$, adeoque soliditas Coni $\frac{1}{3}mr. \frac{1}{2}ar$
 $= \frac{1}{6}amar^2$. Est vero etiam $\frac{1}{6}amar^2 = \frac{1}{2}r. mr. \frac{1}{3}a$,
seu factum ex basi Coni in tertiam alti-
tudinis partem, ut in Geometria aliunde de-
monstratum (§. 548 Geom.).

SCHOLIUM VII.

206. Elegans hoc Theorema, quod inter
præcipua seculi superioris in Geometria in-
venta referri solet, jam olim PAPPUS com-
me-

memoravit (a); sed PAULUS GULDINUS, è Soc. Jesu, expressius plurimorum exemplorum inductione ostendit (b). Usi sunt eodem Geometrà, præsertim ante inventum a LEIBNITIO calculum summatorium, cum GULDINO, quemadmodum indicaverat PAPPUS, in dimetiendis solidis & superficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: sed idem usum habere adhuc potest in quibusdam casibus, ubi Calculi summatorii ope idem difficilius præstaretur. Ego in Tyronum gratiam

exemplis tritis regulam illustrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, simulque ostendi, eidem locum esse, si magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri posse a GULDINO etiam annotatum reperio (c): unde nec cum PAPPO ad solum rotationis motum Theorema restrinxi. Illustris LEIBNITIUS (d) invenit, succedere quoque negotium, si axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.

C A P U T IV.

De Quiete & Lapsu Corporum gravium.

DEFINITIO XXV.

207. **L**inea horizontalis vera est, cujus singula puncta a centro Telluris æqualiter distant.

COROLLARIUM.

208. Linea horizontalis est arcus circuli ex centro Telluris per punctum datum descripti (§. 37. 41 Geom.).

DEFINITIO XXVI.

Tab. II. Fig. 20. 209. Linea horizontalis apparens BD est recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

COROLLARIUM.

210. Est adeo ad semidiametrum Telluris in puncto contactus A perpendicularis (§. 308 Geom.).

DEFINITIO XXVII.

211. *Lapsus* est mutatio situs vi gravitatis.

THEOREMA XXVI.

212. Si corpora gravia versus cen-

trum Terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem est perpendicularis, & contra.

DEMONSTRATIO.

- I. Si corpora gravia versus centrum Terræ nituntur, linea directionis eorundem semidiametro Telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 Mech. & §. 38 Anal. infin.), quam apparentem perpendicularis (§. 209). *Quod erat unum.*
- II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis; semidiametro Telluris in directum jacet (§. 210). Continuata igitur in centrum Telluris incidit (§. 470 Geom.). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

213. Cum Terra sit propemodum spherica, ut in Geographia demonstratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terrestrium æquilibrium

(a) Sub finem Præfat. ad Lib. 7. Collect. Mathem.
(b) Lib. 2. & 3. de Centro Gravitatis.

(c) Lib. 2. c. 8. Prop. 3. f. 147.
(d) In Actis Erud. An. 1695. p. 493.

Tab.II. bilium superficies in omnibus suis punctis a centro Telluris æqualiter absunt (§. 470 Geom.). Quare cum experientia constet, gravia per lineas perpendiculares ad superficiem aquarum descendere; gravia niti versus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLIUM.

214. Quodsi Terræ figura non sit perfecte spherica, ex descensu perpendiculari gravium concludi nequit, quod versus centrum illius nitantur: cum in solo circulo, cujus rotatione sphaera generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant (§. 38 Analyf. infinit.). Sed suo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique assumi posse citra erroris assignabilis periculum, gravia niti versus centrum Terræ. Immo in Staticis sufficit, descensum perpendicularem ad libellam aquarum experientia constare.

COROLLARIUM II.

215. Quoniam pro corpore gravi, salva gravitate, solum gravitatis centrum substitui potest (§. 125); linea directionis corporis gravis est recta ex Centro gravitatis ad lineam horizontalem sive apparentem, sive veram perpendicularis.

PROBLEMA XXXIX.

216. Data semidiametro Telluris AC vel LC una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis AD, determinare distantiam puncti extremi D à lineæ horizontali vera AL.

RESOLUTIO.

1. Quadrato semidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
 2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta CD (§. 417 Geom.).
 3. Inde subtrahatur semidiameter CL: quod relinquitur, est distantia li-
- Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

neæ horizontalis apparentis a vera DL. Tab.II.

E. gr. Ponamus semidiametrum Telluris, Fig. 20. qualis vulgo statuitur, 860 miliarium Germanicorum, & AD unius milliaris: erit

$$AC^2 = 739600$$

$$AD^2 = 1$$

$$DC^2 = 739601$$

$$\text{Unde } DC = 860.00057$$

$$CL = 860$$

$$LD = 0.00057 \text{ feu } \frac{57}{100000}$$

Aliter.

Quoniam $GD : AD = AD : DL$ (§. 334 Geom.); erit $DL = AD^2 : GD$ (§. 302 Arithm.). Est vero DL ipsius GL, seu diametri Telluris, particula admodum exigua, quippe in distantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, seu $\frac{57}{172000000}$ diametri Telluris. Quamobrem $AD^2 : GL$ sensibilibiter non differt a $AD^2 : GD$. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Parisinorum seu 129600 linearum (pes enim Parisinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta PICARDUM (a) 39231564 pedum Parisinorum seu linearum 5649345216. Quodsi ergo $AD^2 = 16796160000$ per $GL = 5649345216$ dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

SCHOLIUM.

217. Hac posteriore methodo PICARDUS (b) Tabulam construxit, quam huc transferre in usum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis AD in pedibus Parisinis; altera puncti extremi D altitudinem DL supra lineam horizontalem veram AL.

F

AD

(a) *Traité du Nivellement*, p. 196.

(b) *Loc. cit.* c. 1. p. 7.

AD	DL	AD	DL
300 ped. 0 dig. 0 $\frac{1}{3}$ lin.		3300 ped. 3 dig. 6 lin.	
600	1 $\frac{1}{3}$	3600	4. 0
900	3	3900	4. 8
1200	5 $\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	8 $\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. 9 $\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

COROLLARIUM.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem sensibilem pro vera assumi, consequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi potest.

PROBLEMA XL.

219. *Explorare, utrum planum aliquod propositum sit horizontale, nec ne.*

RESOLUTIO.

Tab.II. 1. Ex trabeculis ligneis construatur triangulum æquicrurum FCG, continuatis cruribus in AB, quo longius, eo melius.

2. Ex vertice C suspendatur globus plumbeus D & basis trianguli FG dividatur bifariam in E.

3. Libella sic constructa collocetur super plano dato, ita ut cruribus suis AC & CB eidem insistat.

Dico, si filum CD transeat per punctum medium E, planum esse horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate sua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 17). Quod si

ergo FG bifariam secet in E; erit CD Tab.II. ad FG perpendicularis (§. 184 Geom.). Fig. 23. Quoniam vero $AC = CB$ per construct. adeoque $AC : CB = CF : CG$; erit $x = 0$ (§. 207 Geom.), consequenter AB ipsi FG parallela (§. 255 Geom.) & CD etiam ad AB (§. 230 Geom.), hoc est, linea directionis globi ad planum, cui libella insistit, perpendicularis. Planum adeo horizontale est (§. 212).

SCHOLIUM.

220. *Figura Instrumenti variis modis mutari solet, eodem tamen semper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes Staticas plerumque sufficit; ita inferius Artem libellandi exposituri alia libellarum genera hac accuratiora describemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus amplissimos continuatur.*

DEFINITIO XXVIII.

221. Per Basin corporis gravis in-Tab.II. telligo figuram, in cuius perimetro Fig. 24. circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipsæ incumbunt.

E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur basis ejus.

THEOREMA XXVII.

222. *Si linea directionis corporis gravis intra basin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; corpus in situ suo acquiescit: sin. illa extra basin cadit, vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; in eam labitur partem versus quam cadit Centrum gravitatis.*

DEMONSTRATIO.

Tab.II. I. Incumbat corpus GB plano cui-
Fig.25. dam alteri firmo ac stabili AFEB,
sitque linea directionis CD. Cum hæc
ex Centro gravitatis C educatur (§.
215); Centrum gravitatis descendere
nititur per rectam CD (§. 19). Sed
juxta eandem ipsi renititur corpus, cui
incumbit, idque satis firmum ac stabile,
ut cedere nesciat, *per hypoth.* Descen-
sus adeo Centri gravitatis impeditur
(§. 75), adeoque corpus quiescit (§.
123). *Quod erat unum.*

Tab.II. II. Incumbant extrema alicujus cor-
Fig.24. poris duobus fulcris FE & CD, &
linea directionis IL intra basin FEDC
cadat. Quoniam linea directionis ex
Centro gravitatis I ducitur (§. 215);
Centrum gravitatis per rectam IL des-
cendere nititur (§. 17). Sed corpus
proprio pondere eo usque incurvari
nequit, ut a fulcris recedant ejus ex-
trema, *per hypothes.* Ergo Centrum
gravitatis impeditur, quo minus des-
cendat; consequenter corpus in hoc
situ acquiescit (§. 123). *Quod erat se-
cundum.*

Tab.II. III. Cadat linea directionis CM cor-
Fig.26. poris IL extra basin. Cum Centrum
gravitatis sit I (§. 215); id secun-
dum rectam CM descendere nititur (§.
17). Quare cum nihil secundum ean-
dem directionem ipsi resistat; actu des-
cendet, adeoque corpus labitur in
eam partem versus quam cadit Cen-
trum gravitatis (§. 211). *Quod erat
tertium.*

Tab.II. IV. Denique corpus grave duobus
Fig.24. fulcris EF & DC ita incumbat, ut

linea directionis IL intra basin FEDC Tab.II.
cadat. Quoniam linea directionis ex Fig.24.
Centro gravitatis I ducitur; Centrum
gravitatis per rectam IL descendere
nititur. Quare cum corpus proprio
pondere eo usque incurvari possit, ut
a fulcris recedat, *per hypoth.* Centrum
gravitatis actu descendit, adeoque cor-
pus labitur in eam partem, versus
quam linea directionis cadit (§. 211).
Quod erat quartum.

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur,
ut linea directionis extra basin emovea-
tur, consequenter, quo longius ea distat
a perimetro basis; eo firmitus corpus in
loco suo consistit.

PROBLEMA XLI.

224. *Invenire, utrum corpus grave
in dato situ extra lapsus periculum con-
stituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Quæratnr Centrum gravitatis cor-
poris gravis (§. 186).
2. Ex eo dimittatur perpendicularis
in lineam horizontalem apparentem,
juxta Problema XL (§. 219), si
opus sit determinandam: quæ erit
linea directionis (§. 215).

Quodsi perpendicularum intra basin
corporis cadit, extra lapsus periculum
constituitur: sin minus, certo ruet
in eam partem, versus quam perpen-
diculum cadit (§. 222).

SCHOLION I.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres in-
clinatæ Bononiensis & Pisana non cor-
ruant; etsi illa anno 1110 excitata ad alti-
tudi-*

tudinem pedum 130 assurgat & perpendicularum a basi intervallo 9 pedum recedat; hæc vero anno 1173 exstructa altitudinem habeat cubitorum 78 & intervallum inter basin atque perpendicularum cubitorum $7\frac{1}{2}$ admittat: id quod expressius ostendit PAULUS CASATUS (a).

SCHOLIION II.

226. Idem Problema motibus animalium explicandis inseruit: qualia inprimis dedit JOHANNES ALPHONSUS BORELLUS (b). E.gr. Cum Centrum gravitatis in homine inter nates & pubim existat; linea directionis intra spatium calcaneis interjectum adeoque intra basin cadit; quando erecto corpore utroque pede pavimento insistit: quare in hoc situ firmiter consistit. Enimvero si pes alteruter elevetur, basis definitur spatio, quod pes unus occupat (§. 221). Cadit adeo linea directionis extra basin, nempe versus dexteram, si pes dexter elevetur, consequenter homo super solo pede sinistro stare non poterit (§. 222), nisi corpus in latere sinistro incurvet, quo linea directionis in pedem sinistrum retrahatur. Enimvero talia fusius prosequi non est nostri instituti: apprimè autem observanda sunt in Picturis & Sculpturis.

SCHOLIION III.

227. Immo hinc ratio reddi potest multorum in structura corporis animalis occurrentium. E. gr. Cum homo erectus stare ac incedere debeat, necessarium utique fuit, ut planum per medium transiens corpus divideret ipsum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales sunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent; quæ sui similes non habent, ut frons, nasus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram,

(a) Mechanic. Lib. I. c. 9. p. 50. & seqq.

(b) De motu Animalium c. 18. usque ad 23. p. 165. & seqq. conf. CASATUM Mechan. Lib. I. c. II. p. 162. & seqq.

ut in partes æquales & similes, adeoque in æquiponderantes, dividi possint.

DEFINITIO XXIX.

228. Centrum motus est punctum, Tab. II. circa quod grave, aut plura gravia Fig. 27. commune Centrum gravitatis habentia rotari possunt.

E. gr. Si pondera P & Q rotari possint circa punctum N, ita ut descendente P ipsum Q ascendat; dicetur N centrum motus.

THEOREMA XXVIII.

229. Distantia IN Centri gravitatis ponderis particularis a Centro gravitatis communi aut centro motus N, est ad lineam directionis Ip perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis Ip corporis p transeat per Centrum gravitatis ipsius (§. 215.) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto Centrum gravitatis corporis existat (§. 78); distantia Centri gravitatis corporis p a Centro motus, vel Centro gravitatis communi N, eadem est quæ distantia ipsius N a linea directionis. Sed distantia ipsius N a linea directionis Ip est perpendicularis NI (§. 225 Geom.). Ergo eadem perpendicularis NI est distantia Centri gravitatis corporis p a puncto N. Q. e. d.

PROBLEMA XLII.

230. Data Centro gravitatis C, una Tab. cum pondere corporis AB; determinare III. vires in A & B requisitas, ut in situ Fig. 28. horizontali sustentetur.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. I. Quærat, ad summam distantiarum
III. virium in A & B applicatarum a
Fig. 28. Centro gravitatis corporis sustentati
C, pondus ejusdem G & distantiam
vis in B applicatæ BC, numerus quar-
tus proportionalis: Dico, hunc esse
virum in A applicandam.

2. Quare si is subtrahatur a pondere
G, relinquetur vis in B applicanda.
Sit ex. gr. $G = 300$ librarum, $AC = 5'$, CB
 $= 8'$: erit $AC + CB = AB = 13'$, adeoque
vis in A applicanda $= G \cdot CB : AB = 300 \cdot 8 : 13$
 $= 184\frac{8}{13}$, consequenter vis in B $= 115\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB sustentatur a
viribus A & B per hypoth. necesse est ut
eadem vi renitentur; quantum illud
deorsum nititur (§. 75). Nititur au-
tem corpus AB deorsum tota vi gra-
vitat, hoc est, quanta est ponderis
G eidem æqualis & ex Centro gravi-
tatis C suspensi (§. 125). Ergo vires
A & B junctim sumtæ ponderi huic
æquantur; consequenter eorum Cen-
trum gravitatis commune in C (vi §.
cit.). Sed cum linea AB sit horizon-
talis, per hypoth. adeoque linea direc-
tionis GC ad eam perpendicularis (§.
215) vires autem in A & B secundum
eamdem directionem renitentur; erunt
quoque earum lineæ directionis ad AB
perpendiculares, & hinc a Centro gra-
vitat, commune C distant intervallis
AC & CB (§. 229). Est adeo AC
 $+ CB : CB = G : A$ (§. 148). Q. e. d.

COROLLARIUM.

231. Corpus adeo AB gravitat in ful-
cra a quibus sustentatur, in ratione re-

ciproca distantiarum a Centro gravitatis
ipsius.

SCHOLIUM.

232. Ne mirentur Tyrones, nos ad vires
resistentes quasunque & grave sursum ur-
gentes ea applicare, quæ de ponderibus deor-
sum nitentibus demonstrata sunt: eodem enim
manente effectu, pondera H & I facili ne-
gotio, si ita visum fuerit, substitui possunt.

PROBLEMA XLIII.

233. Dato Centro gravitatis F cor- Tab. II.
poris IH, una cum gravitate ipsius; de- Fig. 18.
terminare punctum M, quod si plano
horizontali incumbat, pondus datum
G in L appensum corpus IH ex situ
horizontali dimovere nequit.

RESOLUTIO.

Concipiatur in Centro gravitatis F
appensum pondus gravitati totius cor-
poris IH æquale (§. 125), & quærat
ejusdem atque ponderis dati G Cen-
trum gravitatis commune M (§. 149).
Quod si enim punctum M plano hori-
zontali incumbat, pondus G corpus
IH e situ suo dimovere nequit (§. 124).
Q. e. i. & d.

Sit ex. gr. baculi Centrum gravitatis F,
situla aqua plena librarum 24, pondus
baculi 2, $LF = 18''$. Reperietur LM
 $= LF \cdot F : (G + F) = 18 \cdot 2 : 26 = 18 : 13$
 $= 1'' 4'''$ fere. Mirum ergo non est (quod
Statics ignari mirantur) situlam baculo
IH supra mensam posito appensam non
decidere.

PROBLEMA XLIV.

234. Dato corporis AB Centro gra- Tab.
vitat, C, una cum pondere ejus G; de- III.
terminare puncta L & M, in quibus Fig. 28.
supponenda sunt fulcra MN & LO,
ut in data ratione premantur.

RESOLUTIO.

Tab. Sumantur in linea horizontali AB,
III. quæ per Centrum gravitatis C transit,
Fig. 28. rectæ MC & CL in data ratione.
Quodsi fulcra MN & LO in punctis
hac ratione determinatis supponas, ea
premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodsi in M & L fulcrorum loco
humeros aut manus supponant operarii;
pondus portare poterunt, si viribus eo-
rum proportionatum. Unde patet, quo-

modo onus ferendum in data ratione dis-
tribui possit.

SCHOLIUM.

236. Si pondus ferendum ex longurione
extra Centrum gravitatis ipsius suspendatur;
quaerendum est Centrum gravitatis commune
ponderis atque longurionis, & supposito in
eodem pondere utrique equali, reliqua pera-
guntur ut in resolutione Problematis. Exem-
pla specialia, quibus Problemata hæc illus-
trantur, dedit STEVINUS (a).

(a) Stat. Lib. 2. Prop. 7. 8. Operum f. 474. &
seqq.

CAPUT V.

De Motu Rectilineo composito.

DEFINITIO XXX.

237. **M**otus simplex est, qui a vi
una efficitur.

DEFINITIO XXXI.

238. *Motus compositus* est, qui effi-
citur a viribus pluribus conspirantibus.
Dicuntur autem *vires conspirare*, si
directio unius non est opposita direc-
tioni alterius; veluti cum radius cir-
culi circa centrum rotari, & interea
punctum per eam recta incedere con-
cipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus est
compositus (§. 74).

DEFINITIO XXXII.

240. *Angulus directionis* est, quem
lineæ directionis duarum virium con-
spirantium comprehendunt.

THEOREMA XXIX.

241. Si mobile A duplici vi urgea-
tur, altera quidem secundum directio-
nem AB, altera vero secundum direc-
tionem AC, ita ut celeritates sint ut
latera AB & AC; motu composito dia-
gonalem parallelogrammi AD describit.

Tab. II.
Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Si mobile A sola vi secundum AB
impressa moveretur, momento primo
foret in aliquo puncto rectæ AB, ve-
luti in H, & ad rectam HL ipsi AC
parallelam accederet. Si sola vi se-
cundum AC impressa progredieretur,
eodem momento foret in aliquo punc-
to ipsius rectæ AC, veluti in I, &
ad rectam IL ipsi AB parallelam ac-
cederet. Sed cum directiones virium
sibi non opponantur, neutra alteram
impedire valet, adeoque eodem mo-
mento mobile accedet tum ad HL;
tum

Tab.II. tum ad IL; consequenter erit in puncto Fig.19. L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam vero celeritates sunt ut AB ad BD, *per hypoth.* & spatia AH & HL eodem tempore descripta sunt ut celeritates (§. 33), consequenter $AH:HL = AB:BD$; erit AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*), consequenter AL pars diagonalis AD (§. 337 *Geom.*). Eodem modo patet, ductis KM & MG ipsis AB & AC parallelis, quod mobile momento secundo futurum sit in M, tandemque in D. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

242. Quodsi ergo concipiamus rectam AC motu æquabili sibi semper parallelo juxta ductum alterius rectæ AB moveri, ac interea punctum motu æquabili in eadem descendere; punctum repræsentabit corpus, quod duplici vi, juxta directiones AB & AC, celeritatibus quæ sunt ut AB & AC, movetur, adeoque motu composito describetur triangulum ABD.

SCHOLIUM.

243. Solent igitur nonnulli in demonstrando Theoremate præsentem punctum in linea AC descendens, dum ipsa interea juxta ductum rectæ AB promovetur, pro corpore sumere, quod duplici vi juxta hypothesein Theorematis movetur: id quod etiam ad juvandam imaginationem utiliter sumi potest, cum sic pateat possibilitas hypotheseos intuitiva ratione.

COROLLARIUM II.

244. Mobile motu composito eodem tempore describit diagonalem AD, quo motu disjuncto describeret latera parallelogrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM III.

245. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC construi

possit, constructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam super basi Fig.19. communi (vi §. 337. 205. *Geom.*); omnis motus rectilineus, ubi ad demonstrandum utile fuerit, in compositum resolvi potest.

COROLLARIUM IV.

246. Quoniam vero laterum AC & CD ratio varia esse potest, pro diversitate angulorum CAD & DAB; motu quoque variis modis composito eadem recta AD describi (§. 245); adeoque & idem motus rectilineus in varios compositos resolvi potest.

THEOREMA XXX.

247. In motu composito uniformi, velocitas a viribus conspirantibus producta est ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis AD parallelogrammi ABDC, juxta cujus latera agunt separata, ad latus alterutrum AB vel AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC sigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 241). Est ergo diagonalis AD spatium a viribus conspirantibus dato tempore descriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore sunt ut spatia (§. 33). Est ergo celeritas a viribus conspirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

248. Datis itaque viribus conspirantibus, hoc est, data celeritatum ratione, per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per easdem rectas positione datas, aut per angulum directionis; datur motus obliqui celeritas & directio; quia diagona-

Tab.II. diagonalis & magnitudine & positione da-
Fig.19. tur (§. 339 & seqq. *Geom.*)

COROLLARIUM II.

249. Non tamen vice versa motu obliquo dato dantur simplices; quia idem ex diversis simplicibus componi potest (§. 245).

COROLLARIUM III.

250. Motus adeo simplex per diagonalem AD, celeritate ut AD, æquipollet motibus per latera AB & AC, celeritatibus ut AB & AC conjunctis; hoc est, perinde est, siue mobile juxta directionem AD celeritate ut AD, siue simul juxta directiones AB & AC celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241, 246.)

THEOREMA XXXI.

Tab. 251. In motu composito ab iisdem vi-
III. ribus producto major est velocitas, si
Fig.30. angulus directionis minor: illa autem
minor, si hic major.

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eadem sunt, *per hypoth.* erit AC utrique parallelogrammo AFEC & BACD communis, & præterea AB=AF. Evidens est in hypothese anguli majoris describi diagonalem AD, in hypothese minoris vero ipsam AE, & quidem eodem tempore, ob AB=AF, (§. 244). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 33). Quare cum $AD < AE$; velocitas in hypothese anguli majoris minor est, quam in hypothese minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Cum datis cruribus AC & CE cum angulo intercepto ACE, angulus CEA (§. 40 *Trigon.*) & inde porro AE (§. 36 *Trig.*) reperitur; data virium conspiran-

tium celeritate & angulo directionis; in casu quocunque speciali celeritas motus compositi inveniri; consequenter ratio celeritatum, ab iisdem viribus, sub diversis directionum angulis, productarum definiri potest.

THEOREMA XXXII.

253. Si mobile a duabus viribus se-Tab.II.
cundum directiones AB & AC trahitur, Fig.29.
quæ æquipollent tertia trahenti secundum directionem AD; erunt sollicitationes ad motum inter se reciproce ut sinus angulorum, quos linea directionis BA & AC cum linea directionis tertia AD comprehendunt, & alterutra earum erit ad sollicitationem a media pendentem, ut sinus anguli quem linea directionis alterius cum linea directionis tertia comprehendit ad sinum anguli BAC.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipsi AC & DC ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*); erit angulus BDA=DAC & ADC=BAD (§. 255 *Geom.*), ac BACD parallelogrammum (§. 102 *Geom.*). Quoniam vires secundum directiones AB & AC trahentes in sollicitando mobili ad motum, seu quatenus mobile ad motum urgent (§. 110), æquipollent vi mobile secundum directionem AD trahenti, *per hypoth.* sollicitationes laterales sunt ut AB & BD=AC (§. 335 *Geom.*) media vero sollicitatio ut AD (§. 250). Erunt igitur (§. 33 *Trigon.*) laterales ut sinus angulorum BDA & BAD, & lateralis secundum directionem AB trahens ad mediam secundum directionem AD trahentem ut sinus anguli BDA seu DAC ad sinum anguli ABD.

Tab. II. ABD seu BAC (§. 233 *Geom.* & §. 5 *Fig. 29. Trigon.*), lateralis vero agentis secundum directionem AC sive BD ut sinus anguli BAD ad finem anguli BAC. Q. e. d.

SCHOLION.

254. Sollicitationes sunt in ratione composita massarum & celeritatum initialium (§. 110. 22), consequenter celeritatum in motu æquabili, ubi c est ut dc. Rectæ, per quas exponuntur motus in resolutione compositi in simplices, sunt ut celeritates (§. 250). Quare si per eas exponuntur sollicitationes, massæ corporum, in quibus concipiuntur vires, supponendæ sunt æquales (§. 181 *Arithm.*) id quod semper facere licet, cum corpori, cuicunque data celeritate lato, vel data celeritate initiali instructo, dari possit aliud eidem in sollicitatione ad motum æquivalens, quod habet massam datam (§. 146), quia celeritates initiales sunt ut distantia a centro motus. Atque hæc ratio est, cur in præsentente tractatione, præcisa massa corporum, ea consideramus instar punctorum, in quibus non spectatur nisi celeritas initialis.

DEFINITIO XXXIII.

255. Per *Tendentiam* intelligimus rectam velocitatis & directionis repræsentatricem. Et *Tendentia media* vocatur, quæ in motu composito pluribus datis simul substitui potest.

PROBLEMA XLII.

Tab. XIII. 256. Si mobile A urgetur secundum directiones BA, CA, DA, EA celeritatibus ut AB, AC, AD, AE; determinare directionem & celeritatem mobilis in motu composito, qui ex simplicibus istis resultat: seu datis quocunque tendentiis AB, AC, AD, AE; invenire mediam AK.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

RESOLUTIO.

1. Per Centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiæ mediæ ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A.
2. In hanc ex A transferatur AG toties, quot sunt tendentiæ datæ. Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex singulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares Bb, Cc, Dd, Ee, Gg: tendentiæ BA æquivalent bA, secundæ CA laterales Cc & cA, tertiæ DA laterales Dd & dA, quartæ EA laterales Ee & eA (§. 250, 255). Jam cum directiones Bb, Cc, Dd & Ee sibi mutuo non sint contrariæ, tendentiæ cognomines in determinanda media sunt attendendæ: ex adverso cum directiones bA & cA sint contrariæ directionibus dA & eA, sintque velocitates versus partem S majores velocitatibus versus partem R per hypoth. excessus tendentiarum versus S supra tendentias versus R attendendus erit in media determinanda. Jam si parallelogrammum AgGH compleatur; tendentiæ perpendiculares Bb, Cc, Dd & Ee æquivalent mediæ 4AH & excessus contrariarum fortiorum supra debiliores $Ae + Ad - Ab - Ac$ æquivalent tendentiæ mediæ parallelæ 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero si AH continuetur in I, donec fiat $AI = 4AH$ & ducatur IK parallela

Tab. XIII. Fig. 128. rallela ipsi HG, erit etiam $IK = 4HG$ & $AK = 4AG$ (§. 268 *Geom.*). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleant diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque AB, AC, AD & AE tendentiæ AK æquipollent, adeoque ipsa AK media est (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

257. Ex Demonstratione adeo Problematis præsentis patet, si mobile ad motum urgeatur viribus B, C, D & E eo modo, ut, si B sola ageret, mobile A progredieretur secundum directionem AB celeritate ut AB; si sola C ipsum impelleret, secundum directionem AC

celeritate ut AC; si sola vis D mobile urgeret, secundum directionem AD celeritate ut AD, si denique sola vis E mobile A ad motum concitaret, secundum directionem AE celeritate ut AE; idem mobile A viribus B, C, D, E una agentibus moveri secundum directionem AK celeritate ut AK. Patet vero eodem prorsus modo tendentiam mediam determinari, si plures quotcunque dentur. Opus autem est in Demonstratione resolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonstrari possit, AK esse directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas sit ut 4 AG absque ea patet (§. 156).

Tab. XIII. Fig. 128.

CAPUT VI.

De Descensu Gravium in plano inclinato.

DEFINITIO XXXIV.

258. **P**lanum inclinatum est, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XXXV.

259. Gravitatem absolutam voco, qua corpus descendit libere in medio non resistente, seu in descensu libero ad motum sollicitatur.

DEFINITIO XXXVI.

260. Gravitatem respectivam appello, qua corpus descendit, parte aliqua ad superandam resistantiam impensa, seu qua in descensu per resistantiam impedito ad motum sollicitatur. Talis est, qua descendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad resistantiam plani vincendam impenditur, seu qua ad motum sollicitatur super plano inclinato.

THEOREMA XXXIII.

261. Si grave in plano inclinato consistit, gravitas respectiva est ad gravitatem absolutam ut altitudo plani AB ad longitudinem AC.

Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D secundum directionem AC descendere nitatur in plano inclinato, libere autem descenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212); si erigatur in D, DG perpendicularis ad AC, & ducatur GF ipsi AC parallela occurrens ipsi DH in F, exponet DF gravitatem absolutam, DG vero partem, quæ resistantiam plani vincit, & FG gravitatem respectivam (§. 250, 260). Quodsi parallelogrammum DGFE compleatur; erit

Tab. erit $EF=DG$ & $FG=ED$ (§. 335 III. *Geom.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ut DF ad FG sive DE . Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares existant, *per hypoth.* inter se parallelæ sunt (§. 256 *Geom.*), adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti sunt, *per hypoth.* erit $DF:DE=CA:AB$ (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas absoluta ad respectivam ut CA ad AB (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

262. Cum adeo globus D super plano inclinato gravitate tantum respectiva gravitet; pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, si fuerit ad ipsum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC .

COROLLARIUM II.

263. Quodsi longitudo plani CA sumatur pro sinu toto, erit AB sinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ponderis super plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipsum sustentans, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM III.

264. Hinc gravitates respectivæ ejusdem corporis super diversis planis inclinatis sunt inter se ut sinus anguli inclinationis. Est enim ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas absoluta ad respectivam super eodem (§. 263) & ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas absoluta ad respectivam super hoc plano (§. cit.). Quare ut sinus anguli inclinationis planorum, ita sunt gravitates re-

spectivæ ejusdem corporis super iisdem Tab. (§. 196 *Arithm.*). III.

Fig. 31.

COROLLARIUM IV.

265. Major ergo gravitas respectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa est, quo minor hic existit: cum crescentibus angulis crescant, decrescantibus decrescant sinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2. *Trigon.*).

COROLLARIUM V.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas respectiva degenerat in absolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas respectiva prorsus expirat, hoc est, grave secundum longitudinem plani nullum nifum exercet.

COROLLARIUM VI.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipsi æqualis est: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA XLIII.

268. Invenire sinum anguli inclinationis plani, super quo data vi pondus datum sustentari possit.

RESOLUTIO.

Fiat ut pondus datum D ad vim datam L , ita sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani (§. 262).

E. gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum; reperietur angulus inclinationis $2^{\circ} 52'$

$$\text{Log. } 1000 = 30000000$$

$$\text{Log. } 50 = 16989700 \}$$

$$\text{Log. Sin. tot. } 100000000 \}$$

Log. Sin. inclin. = 8 6989700, cui in tabulis quam proxime respondent $2^{\circ} 52'$.

THEOREMA XXXIV.

269. Si pondus L juxta directionem perpendicularem AB descendit, & pondus

Tab. D juxta directionem plano inclinato
III. parallelam attollit; altitudo ascensus
Fig. 3¹. ponderis D est ad altitudinem descensus
alterius L ut sinus anguli inclinationis
C ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Ascendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam ascendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari descendat, per *hypoth.* erit altitudo, per quam ipsum descendit, ipsi CD æqualis. Altitudo igitur ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut DH ad CD. Enimvero si CD sumatur pro sinu toto, DH est sinus anguli inclinationis C (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut sinus anguli inclinationis & sinus totus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

270. Est igitur altitudo descensus CD ponderis L ad altitudinem ascensus DH ponderis D; ut reciproce pondus D ad pondus L ipsi æquiponderans (§. 263).

COROLLARIUM II.

271. Quare cum sit CD. L = DH. D (§. 297 *Arithm.*), & nismus atque renismus æquiponderantium D & L æquales sint (§. 75); momenta ponderum D & L sunt in ratione composita massarum & altitudinum, per quas in plano, sive inclinato sive perpendiculari, vel ascendant vel descendunt (§. 159 *Arithm.*).

THEOREMA XXXV.

Tab. XIII. Fig. 129. n. 1. 2. 272. Si pondera E & D trahentia rectam AB habeant Centrum gravitatis commune in C; erunt ea inter se in ratione reciproca distantiarum CH & CI, nempe $E : D = CI : CH$.

DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendicularares, & ex Centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipsi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac si planis inclinatis BD & AE incumbere; perinde erit ac si in B suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod est ad D ut FB ad BD, & in A suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod est ad E ut AG ad AE (§. 261). Sit pondus prius P; alterum Q: erit $P : D = BF : BD$ & $Q : E = AG : AE$. Enimvero, propter parallelismum linearum GE & DF atque AB, angulus $GEA = HAC$ & $FDB = ABD$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I sint recti per *construct.* erit $BF : BD = CI : CB$ & $AG : AE = CH : CA$ (§. 267 *Geom.*), consequenter $P : D = CI : CB$ & $Q : E = CH : CA$ (§. 167 *Arithm.*). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem sint in æquilibrio per *demonstr.* erit $P : Q = AC : CB$ (§. 144), consequenter $P : E = CH : CB$ (§. 200 *Arithm.*), & hinc tandem $D : E = CH : CI$ (§. 199 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

273. Quoniam pondera D & E sibi invicem æquilibrantur, si sub obliqua quacunque directione rationem reciprocam distantiarum habuerint, hoc est, si $D : E = CH : CI$ (§. 272); est vero $E. CH = D. CI$ (§. 297 *Arithm.*); vires æquiponderantium etiam sub directionibus obliquis æstimandæ

mandæ sunt per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. 274. Si pondera five ex Centro gravitatis communi, five ex alio quocunque extra illud posito suspendantur; momenta sunt in ratione composita massarum & distantiarum a puncto suspensionis N: nempe in eo situ, quo Centrum gravitatis ipsius P descendit per altitudinem IK & Centrum gravitatis alterius ponderis Q ascendit per altitudinem OH, ut Q. ON & P. IN (§. 146. 271. 273). Sed cum verticales ad N sint æquales (§. 156 Geom.), & lineæ directionum KI & HO sint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); ON:NI = HO:IK (§. 267 Geom.). Quare momenta ponderum Q & P sunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc est, in ratione composita massarum & altitudinum, per quas perpendiculariter Centrum gravitatis vel ascendit, vel descendit. Superior igitur (§. 146. 273) constituta virium æstimatio cum præfente consentit.

COROLLARIUM III.

275. Vires adeo æquales sunt, quæ pondera elevant per altitudines ipsis reciproce proportionales.

SCHOLIUM I.

276. Hoc principium ad demonstrandas machinarum vires sine demonstratione assumit CARTESIUS (a). Ait enim, quod iisdem viribus, quibus pondus v.gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli potest, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

SCHOLIUM II.

277. Hinc etiam ratio patet, cur currus onustus difficilior trabatur super plano inclinato, quam super horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ est ad pondus totum ipsius in ratione altitudinis ad

(a) In Traët. de Mechanica (qui inter Posthuma habetur) pag. 13.

longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilior trabatur in via lutosa & arenosa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si enim recta FD sit longitudini plani AE parallela, hoc est, linea directionis currus, atque FC altitudini ED parallela ope perpendiculari definiatur, & ex C ducatur perpendicularis DC ad FD, erit $y = 0$ & $0 = x$ (§. 233 Geom.) hincque $y = x$. Quare ob rectos D & B, $FC:FD = EA:EB$ (§. 267 Geom.).

THEOREMA XXXVI.

278. Vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & velocitatum.

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, sed non actu moveant pondera, sunt vires mortuæ (§. 9); adeoque in quacunque directione in ratione composita massarum & distantiarum a centro motus (§. 146. 273). Enimvero si ponamus Centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æqualiter, eodem tempore describent arcus distantis proportionales (§. 138. 412 Geom.): qui cum sint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 185 Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

279. In conatu jam adest celeritas initialis dc, elementum ejus, qua moveretur mobile, si motus actu sequeretur. Quare cum celeritas sit ut elementum ejus dc; mirum non est, quod vires hic sint in ratione celeritatum prodiutarum & massarum composita. Sunt nempe in ratione composita massarum & celeritatum initialium, quibus

instruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, consequenter distantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.

COROLLARIUM.

280. Quodsi ergo massæ æquales sunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA XXXVII.

Tab. III. Fig. 33. 281. Pondera E & F super planis inclinatis AC & CB ejusdem altitudinis CD æquiponderantia sunt ut longitudo planorum AC & CB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant, per hypoth. eadem vis, quæ pondus E super plano inclinato AC sustentare valet, etiam alterum F super plano inclinato CB sustentabit, & hæc dicatur V. Est vero $V:E = DC:AC$ & $V:F = DC:CB$ (§. 262). Ergo $E:F = AC:CB$ (§. 196 Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

Tab. III. Fig. 34. 282. SIMON STEVINUS (a) ingeniosam affert hujus Theorematis demonstrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo GIH, illud per se patet, partes GK & HK æquilibrari: æquipollet enim GKH catenæ in punctis G & H suspensæ. Quodsi jam IH non æquiponderet ipsi GI, pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa GIH orietur; qui cum sit absurdus, patet partes catenæ IH & GI, adeoque pondera quævis alia, quæ itidem sunt ut longitudo planorum IH & GI æquiponderare. Supponit adeo

(a) Element. Static. Lib. 1. Prop. 19. f. 448. Operum.

motum perpetuum esse absurdum, seu id Axiomatis instar sumit.

COROLLARIUM.

283. Quodsi communis planorum altitudo CD sumatur pro sinu toto, CB & CA sunt coscæntes angulorum inclinationis A & B (§. 11 Trigon.). Pondera igitur F & E super planis inclinatis CB & CA æquiponderantia sunt ut coscæntes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut sinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 Trigon.).

THEOREMA XXXVIII.

284. Grave super plano inclinato descendit motu uniformiter accelerato.

DEMONSTRATIO.

Gravitas respectiva est ad absolutam in constante ratione (§. 261), cumque adeo hæc non mutetur, (§. 78), illa quoque omni descensus tempore eadem. Quare cum eodem semper modo vis gravitatis grave ad motum sollicitet (§. 25); singulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato descendit (§. 67). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

285. Sunt igitur spatia descensus in ratione duplicata temporum (§. 80), itemque velocitatum (§. 81).

COROLLARIUM II.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus crescunt secundum numeros impares (§. 84).

COROLLARIUM III.

287. Tempora vero sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem ratione existunt (§. 83.)

COROLLARIUM IV.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato descendente decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM V.

289. Descensus adeo gravium super planis inclinatis iisdem legibus adstringitur, quibus descensus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLIUM.

290. Hinc GALILÆUS leges illas exploraturus experimenta sumsit in planis inclinatis (§. 89): tardior enim, ut in Theoremate sequente demonstratur, est descensus in plano inclinato, & hinc spatia facilius notari possunt.

THEOREMA XXXIX.

291. Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati est ad celeritatem quam perpendiculariter descendens eodem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatam descendit, producantur a gravitate respectiva, dum vero perpendiculariter descendit, ab absoluta. Si celeritates sint ut C & c , tempusculum dt , massa mobilis m , gravitas absoluta & respectiva ut G & g , erit $G:g = \frac{mdC}{dt} : \frac{mdc}{dt}$ (§. 112), $= dC:dc$ (§. 181 Arithm.) $= C:c$ (§. 187 Arithm.). Sed G ad g ut longitudo plani ad altitudinem ipsius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis t celeri-

tates C & c sunt ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato descendentis est in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis (§. 263).

THEOREMA XL.

293. Spatium a gravi in plano inclinato confectum AD est ad spatium AB quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in descensu perpendiculari in fine temporis dati. Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in D constitutum habet, duplum ipsius AD spatium confecisset (§. 288). Similiter si ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in B habet, duplum ipsius AB confecisset (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur spatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percurra, per hypoth. ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB sunt ut eadem celeritates (§. 181 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

294. Est igitur spatium in plano inclinato percursum ad spatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari descenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 291), itemque ut sinus anguli inclinationis B ad sinum totum (§. 292).

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. 295. Si ex angulo recto B ad AC per-
 III. pendicularis demittatur; erit $AC:AB$
 Fig.35. $= AB:AD$ (§. 330 *Geom.*). Quare eo-
 dem tempore, quo grave ex A perpen-
 diculariter descendit in B, super plano in-
 clinato perveniet in D (§. 294).

COROLLARIUM III.

296. Dato igitur spatio descensus per-
 pendicularis in altitudine plani AB, ha-
 betur spatium eodem tempore in plano
 inclinato percurrendum AD, si ex B ad
 AC perpendicularis dimittatur.

COROLLARIUM IV.

297. Similiter dato spatio in plano in-
 clinato percurso AD, invenitur spatium
 AB per quod eodem tempore grave per-
 pendiculariter decidisset, si ex D perpen-
 dicularis erigatur, quæ cum catheto plani
 AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM V.

Tab. 298. Cum in semicirculo anguli D, E,
 III. F, C, recti sint (§. 317 *Geom.*); grave
 Fig.36. per omnia plana AD, AE, AF, AC eo-
 dem tempore descendit, quo nempe per
 diametrum AB, si ea fuerit ad lineam ho-
 rizontalem LM perpendicularis (§. 296).

PROBLEMA XLIV.

Tab. 299. Dato spatio AD in plano in-
 III. clinato AC percurso; determinare spa-
 Fig.35. tium quod in alio plano inclinato AF
 eodem tempore percurreret.

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicu-
 laris DB occurrens altitudini AB in
 B: erit AB spatium, per quod eo-
 dem tempore caderet perpendicula-
 riter grave (§. 297).
2. Quare si ex B demittatur perpendi-
 cularis BE ad planum AF; erit AE

spatium quod in plano inclinato AF Tab.
 conficit grave eodem tempore, quo III.
 cadit perpendiculariter ex A in B Fig.35
 (§. 296); consequenter & in in-
 clinato AC ex A in D pervenit.
Q. e. i. & d.

COROLLARIUM.

300. Cum sit AB ad AD ut sinus totus
 ad sinum anguli inclinationis C & AB ad
 AE ut sinus totus ad sinum anguli inclina-
 tionis F (§. 294); spatia AD & AE, quæ
 grave eodem tempore in diversis planis
 inclinatis percurrere valet, sunt ut sinus
 angulorum inclinationis C & F (§. 196
Arithm.) & reciproce ut gravia per eadem
 plana descendunt (§. 283); conse-
 quenter etiam reciproce, ut longitudines
 planorum AC & AF æque-altorum (§.
 281). Et hinc Problema per calculum va-
 riis modis solvitur.

THEOREMA XLI.

301. *Velocitates, quæ in diversis pla-
 nis inclinatis eodem tempore acquirun-
 tur, sunt ut spatia eodem tempore per-
 cursa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis
 AB ad plana AC & AF perpendicula-
 res BD & BE; erunt AD, AB & AE
 spatia eodem tempore percurra (§. 299).
 Cum adeo sit, ut AB ad AC ita ve-
 locitas per AD acquisita ad velocitatem
 per AB acquisitam, & ut AB ad AF
 ita velocitas per AE acquisita ad velo-
 citatem per AB acquisitam (§. 291);
 consequenter ob $AB:AC=AD:AB$
 & $AB:AF=AE:AB$ (§. 330 *Geom.*
 & §. 169 *Arithm.*), velocitas per AD
 acquisita ad velocitatem per AB acqui-
 sitam

Tab. III. Fig. 35. sitam ut AD ad AB & velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AE ad AB (§. 167 *Arithm.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquisitæ sunt ut spatia AD & AE isto tempore percursa (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Velocitates in diversis planis inclinatis eodem tempore acquisitæ sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera per ista plana descendunt, necnon reciproce ut eorundem planorum æque altorum longitudines AC & AF (§. 300).

THEOREMA XLII.

303. Si grave per planum inclinatum AC ad lineam horizontalem CB pervenit; eandem celeritatem acquisivit quam in descensu perpendiculari AB usque ad eandem lineam horizontalem CB acquireret.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD spatium eodem tempore percursum, quo percurritur AB (§. 296), adeoque celeritas per AB acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquisita est ad celeritatem per AD acquisitam in ratione subduplicata ipsius AC ad AD (§. 287) $= \sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum sit $AC : AB = AB : AD$ (§. 330 *Geom.*), adeoque AC ad AD in ratione duplicata $AC : AB$ (§. 216 *Arithm.*) $= AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arithm.*), consequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} = AC : AB$; erit

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

celeritas per AC acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 167 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquisita est celeritati per AB acquisitæ æqualis (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. III. Fig. 35.

COROLLARIUM I.

304. Grave igitur per diversa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

COROLLARIUM II.

305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 304). Quare si per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac si statim ab initio in plano inclinato HK motum fuisset.

Tab. III. Fig. 37.

COROLLARIUM III.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior sit quam per perpendicularum IM (§. 291), grave per LI & IK descendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam si constanter per LM perpendiculariter descendisset (§. 90 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

307. Quodsi grave descendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodsi ergo ubi ad M pervenit, motum suum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, nisi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. cit.). Quamobrem si ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum est, quam acquireret per OQ, seu QR (§. cit.). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquireret celeritatem, ac si perpendiculariter per QR descendisset.

Tab. III. Fig. 38.

H

COROL-

COROLLARIUM V.

Tab. 308. Cum itaque curvæ ex rectis in-
III. finite parvis componantur; grave per
Fig. 38. curvam QS descendens eandem adipiscitur
celeritatem, quam ex casu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA XLIII.

Tab. 309. Tempus descensus per planum
III. inclinatum AC est ad tempus descensus
Fig. 35. perpendicularis per AB, ut longitudo plani
AC ad altitudinem AB: tempora
vero descensuum per diversa plana in-
clinata aque-alta AC & AG sunt ut
longitudines planorum.

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale est tempo-
ri, quo motu uniformi percurritur
AC dimidia celeritate in C acquisita
(§. 288), & tempus per AB æquale est
tempori, quo motu uniformi percurritur
eadem AB celeritate dimidia in B
acquisita (§. 9). Sed celeritates istæ
dimidiæ æquales sunt (§. 303). Tem-
pora igitur sunt ut AC & AB (§. 32).
Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, tempora
descensuum per AC & AG esse ut AC
& AG. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLIV.

Tab. 310. Si diameter circuli AB fuerit
III. ad lineam horizontalem LM perpendi-
Fig. 36. cularis; grave ex quovis peripheriæ
puncto D, E vel C eodem tempore
descendit in B, quo nempe diametrum
AB percurrit.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC:
erit tempus, quo GB percurritur, ad
tempus, quo BC percurritur, ut BG ad

BC (§. 309). Tempus vero, quo GB Tab.
percurritur, est ad tempus, quo AB per- III.
curritur, in ratione subduplicata BG Fig. 36.
ad AB (§. 87), hoc est, cum sit
 $BG:BC=BC:AB$ (§. 330 *Geom.*)
in ratione BG ad BC (§. 216 *Arithm.*).
Tempus adeo descensus per GB ad
tempus descensus per BC & per diame-
trum AB eandem rationem habet (§.
167 *Arithm.*). Ergo tempus quo per-
curritur BC æquale est tempori, quo
AB percurritur (§. 177 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA XLV.

311. Descensus per semicycloidem DEF Tab.
& per quemcunque ejus arcum DG sunt III.
aqui diuturni. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes in-
finitesimas resolutus, quarum una sit
Mm, & semicyclois DEF in numero
totidem divisa, quarum una Ee: erit
 $DG:DF=Mm:Ee$ (§. 171 *Arithm.*).
Concipiamus porro semicycloidem DF
in E & arcum DG in M ita dividi,
ut sit $DF:DG=DE:DM=Ee:Mm$
(§. 167 *Arithm.*). Ducantur denique
semiordinatæ TE, te, NM, nm, item-
que chordæ in circulo genitore DB,
DL, DO. Quoniam $DF=2AD$, DE
 $=2DB$, $DM=2DO$ & $DG=2DL$
(§. 168 *Analys. infinit.*), & $DF:DE$
 $=DG:DM$, per *hypoth.* erit $DA:DB$
 $=DL:DO$ (§. 181 *Arithm.*), & hinc
 $DA^2:DB^2=DL^2:DO^2$ (§. 260 *Arith.*).
Quoniam vero $DA:DB=DB:DT$
(§. 330 *Geom.*); erit $DA^2:DB^2$
 $=DA:DT$ (§. 216. 259 *Arithm.*).
Similiter quia $DA:DL=DL:DH$ &
 $DA:DO=DO:DN$; erit $DA^2:DL^2$
 $=DA$

Tab. = DA:DH & DA²:DO² = DA:DN
 III. (§.cit. Arith.), consequenter DL²:DO²
 Fig.39. = DH:DN (§. 196 Arithm.). Quam-
 obrem ulterius DA:DT = DH:DN
 (§. 167 Arith.), & AT:DT = HN:DN
 (§. 193 Arithm.), adeoque AT:HN
 = DT:DN (§. 173 Arithm.) & $\sqrt{AT}:$
 $\sqrt{HN} = \sqrt{DT}:\sqrt{DN}$ (§. 260 Arithm.).
 Sed ut \sqrt{AT} ad \sqrt{HN} ita velocitas in
 E ad velocitatem in M (§. 307. 87),
 ita etiam DB ad DO (§. 310. 301),
 immo DE ad DM (§. 168 Analys.infini-
 & §. 181 Arithm.). Ergo velocitas in
 E ad velocitatem in M ut Ee ad Mm
 per demonst. consequenter cum tem-
 pus per Ee sit ut spatium Ee per ve-
 locitatem in E divisum, & tempus per
 Mm ut spatium Mm per velocitatem
 in M divisum (§. 37); tempus per Ee
 æquale est tempori per Mm (§. 185,
 149 Arith.), & hinc tempus per omnia
 Ee, hoc est per DF, æquale est tem-
 pori per omnia Mm, hoc est per DG.
 (§. 88 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA XLVI.

Tab. 312. Si plana DC & FH cum ho-
 III. rizontalibus CK & HI æquales efficiunt
 Fig.40. angulos; similiter inclinata sunt.

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quan-
 do cum horizontalibus angulum effi-
 ciunt obliquum (§. 258); non alio
 modo quam per angulos, quos cum
 horizontalibus suis efficiunt, distingui
 potest eorum inclinatio (§. 476 Geom.).
 Jam anguli æquales sunt similes (§. 174
 Geom.), adeoque per eos planorum in-
 clinatio distingui nequit (§. 24 Arithm.).
 Ergo plana, quæ cum suis horizonta-

libus angulos efficiunt æquales, simili- Tab.
 ter inclinata sunt (§. cit.). Q. e. d. III.
 Fig.40.

COROLLARIUM.

313. Cum in planis inclinatis similibus
 DC & FH anguli C & H sint æquales (§. 312)
 & demissis in horizontales CK & HI per-
 pendicularibus DK & FI anguli K & I
 recti (§. 78 Geom.); erit CD: FH = DK:FI
 (§. 267 Geom.), hoc est, altitudines lon-
 gitudinibus proportionales sunt.

THEOREMA XLVII.

314. Si duo gravia per duo aut plu-
 ra plana AB, BC & EG, GH similiter
 inclinata & proportionalia incedant, ut
 nempe sit AB:BC = EG:GH; tempo-
 ra descensus erunt in subduplicata ratio-
 ne longitudinum AB, BC & EG, GH.

DEMONSTRATIO.

Sit AB:BC = a:b; erit ob AB:BC
 = EG:GH, per hypoth. EG = ma &
 GH = mb. Cum plana AB & EG sint
 similiter inclinata, per hypoth. non ali-
 ter quam partes ejusdem plani percur-
 runtur, adeoque tempus per AB est
 ad tempus per EG ut \sqrt{a} ad \sqrt{am}
 (§. 287). Eodem modo ostenditur,
 esse tempus per BC ad tempus per
 GH ut \sqrt{b} ad \sqrt{mb} , & ita porro, si
 plura fuerint plana. Quare tempus per
 AB + BC est ad tempus per EG + GH
 ut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma} + \sqrt{mb}$ (§. 192
 Arithm.), hoc est, ut 1: \sqrt{m} (§. 181
 Arithm.) seu ut $\sqrt{a+b}$ ad $\sqrt{ma+mb}$
 (§. 178 Arithm.): quæ ratio subdu-
 plicata planorum AB + BC & EG + GH.
 Q. e. d.

COROLLARIUM I.

315. Quoniam AB:EG = AP:EQ &
 CB:GH = BN:GO (§. 313) sunt pro-
 H 2 por-

Tab. III. portiones inter se similes, ob $AB : EG = CB : GH$ per *hypoth.* erit $AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO$ (§. 192 *Arithm.*) = [ob $AP + BN = DM + MK = DK$ & $EQ + GO = FL + LI = FI$, (§. 226 *Geom.*)] $DK : FI$. Tempus igitur per plana similia & proportionalia AB, BC & EG, GH , cum sit in ratione subduplicata $AB + BC$ & $EG + GH$ (§. 314), in

ratione quoque subduplicata altitudinum DK & FI existit.

COROLLARIUM II.

316. Et quia superficies curvæ AB & DE similes ac similiter positæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & similibus constant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione subduplicata AB ad DE . Tab. III. Fig. 41.

CAPUT VII.

De Ascensu Gravium, cum Perpendiculari, tum in plano inclinato.

THEOREMA XLVIII.

317. **S***I grave, in medio non resistente, vi impressa, sive perpendiculariter sive per planum inclinatum ascendit; motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impressa perpendiculariter ascendit, a vi gravitatis absolutæ secundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum ascendit, a vi gravitatis respectivæ secundum directionem plani (§. 260) continuo deorsum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam absolutæ, quam respectivæ in omnibus locis, per quæ grave descendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), consequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

318. Grave igitur, sive perpendiculariter sive per declive, in medio non resistente ascendens spatium percurrit subduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi describeret cum ea celeritate quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM II.

319. Eiusdem igitur spatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decrescunt ut numeri impares 7, 5, 3, 1, (§. 98); adeoque ascensus tandem sistitur: consequenter ubi vis impressa fuerit absunta, corpus vi gravitatis rursus descendit.

COROLLARIUM III.

320. Sunt adeo inverse ut spatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes divisum; momento primo grave A descendet per spatium 1, B ascendet per 7; secundo A descendet per 3, B ascendet per 5; tertio A descendet per 5, B ascendet per 3; ultimo A descendet per 7, B ascendet per 1 (§. 86. 319).

COROL.

COROLLARIUM IV.

321. Unde grave vi impressa ascendens ad eam altitudinem ascendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua sursum propellitur.

COROLLARIUM V.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim ascendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non resistente.

PROBLEMA XLV.

323. Dato tempore quo grave impetu impresso ad altitudinem datam ascendit; determinare spatia singulis momentis confecta.

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem descendisse, & quærantur spatia singulis momentis percurra (§. 94): hæc enim inverso ordine sumta eadem sunt cum spatiis ascensus quæsitis (§. 320).

Ex. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 secunda ascendit per interval- lum 240 pedum. Quærantur spatia singulis temporibus confecta? Quodsi corpus descendisset, primo minuto descendisset per 15 pedes, secundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque ascendit per 105, secundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15. pedes.

PROBLEMA XLVI.

324. Dato tempore quo grave vi impressa ad datam altitudinem ascendit; determinare tempus quo ad altitudinem aliam datam pervenit.

RESOLUTIO.

Quærat tempus, quo grave per altitudinem desideratam decidere potest

(§. 95): eodem enim ad eandem ascendet (§. 320. 322).

Vide supra exemplum Probl. II. (§.95).

THEOREMA XLIX.

325. Vires corporum vivæ sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Corpus E cadendo per AB acquirit vim ascendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiscitur, qua per altitudinem CD elevari potest (§. 322). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD eleventur, in ratione composita altitudinum AB & CD atque massarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ consumuntur. Sed AB & CD sunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per istas altitudines acquisitarum (§. 86). Ergo vires E & F sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote, non solo nisu, sed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Constat igitur vires vivas esse in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Q. e. d.

Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM.

326. Quare si massæ fuerint æquales; vires sunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 Arithm.)

SCHOLIUM I.

327. Errant qui promiscue vires omnes in ratione composita massarum & velocitatum esse statuunt, propterea quod mortuæ in eadem

dem deprehenduntur (§. 278). Errorem communem detexit & emendavit (a) Vir illustris LEIBNITIUS. Aliam Theorematis Leibnitiani demonstrationem invenit, & per litteras mecum pro humanitate sua communicavit Celeberrimus BERNOULLIUS, quam ipsis Viri ingeniosissimi verbis huc

Tab. IV. Fig. 43. „ moveri oblique in elastrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP existente 30 gr. cujus nempe sinus CP est semissis radii CL. Suppono autem eam esse resistantiam in elastro, ut ad illud tendendum requiratur præcise unus velocitatis gradus in illo corpore, si perpendiculariter impingeret. Quid ergo jam fiet post incurfionem obliquam corporis C in elastrum L? Quoniam motus per CL componitur, ut notum est, ex duobus collateralibus per CP & PL (vide §. 245), & cum CP, secundum quam corpus directe impingit in elastrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, consumetur hic motus per CP, tenso elastro (perinde enim esset ac si corpus C celeritate CP perpendiculariter incurreret in elastrum, quod per hypothesin eam celeritatem destruere potest), remanente corporis celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit $= PL = \sqrt{3}$ (ponitur enim CL = 2), & applicato in M alio simili elastro faciente cum LM angulum LMQ, cujus sinus LQ = CP = 1; per eandem rationem manifestum est, corpus C post tensionem elastri L tensurum esse elastrum M, amisso motu per LQ & servato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat MN = QM = $\sqrt{2}$, ibique substituto elastro simili tertio constituyente cum MN angulum MNR semirectum, quo scilicet MR iterum sit $= CP = 1$; patet similiter motum per MR totum impendi in tensionem elastri N, corpore interim

(a) Acta Eruditorum, An. 1686. p. 161. & seqq.

„ moveri pergente directione & celeritate Tab. IV. Fig. 43. „ RN = 1. Denique si hac celeritate res- „ dua impingat perpendiculariter in el- „ strum O, huic flectendo totam suam vim „ reliquam dabit; ipsum itaque corpus „ ad quietem redigetur. Hisce ita præ- „ missis; patet nunc potentiam corporis „ C tantam fuisse, ut per se solum ten- „ dere possit præcise quatuor elastra talia, „ ad quæ singula seorsim tendenda requi- „ ritur dimidia velocitas corporis æqualis „ ipsi C; adeoque cum effectus illius qua- „ druplo major sit quam effectus hujus, „ evidens est quoque vim corporis velo- „ citate 2 gr. quadruplam esse vis corpo- „ ris ejusdem vel æqualis velocitate 1 gr. „ Haud absimili modo demonstrarem cor- „ pus C, velocitate 3 gr. tendere posse 9 „ elastra, ad quorum unum tendendum „ unus velocitatis gradus in eo corpore „ requiritur, & tandem in genere nume- „ rum elastrorum tensorum semper esse „ quadratum numeri graduum velocitatis. „ Unde igitur sequetur, vires corporum „ æqualium esse in duplicata ratione cele- „ ritatum. Q. e. d.

SCHOLIUM II.

328. Prodiit nuper Parisiis Tractatus Mathematici hujus eminentis (b), in quo hanc virium mensuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnata multo apparatu stabilivit. Præterea Viri celeberrimi GRAVESANDIUS (c), HERMANNUS & BÜLFINGERUS (d) eandem mensuram aliis modis demonstrarunt, & POLENUS (e) experimentis confirmavit. Ego in Principiis Dynamicis (f) Analysi vere Dynamica eandem virium mensuram erui. Qui vires vivas a mortuis non distinguunt, vires promiscue

(b) Discours sur les Loix de la Communication du Mouvement, à Paris 1727.

(c) In Element. Phys. Tom. I. p. 112. Edit. poster.

(d) In Comment. Acad. Scient. Petropolitana pp. 1. 45.

(e) In Tractatu de Castellis, p. 56. & seqq.

(f) In Comment. Acad. Scient. Petropolitana p. 231.

miscue æstimant per celeritatem in massam ductam.

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 39. 329. Si grave vel perpendiculariter per AD, vel per quamcunque superficiem FED, descendat & impetu concepto per aliam DC rursus ascendat; in punctis æque-altis veluti in G, H & Q, eandem vim eandemque celeritatem habebit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave, vi cadendo per AD vel FD acquisita, ad C usque ex D per DGC ascendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipsi superest vis, qua ad C usque ascendere valet. Sed eandem vim adipiscitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q

(§. cit.). In punctis adeo æque-altis G, H & Q eandem vim habet. Quod erat unum. Tab. III. Fig. 39.

Sunt autem vires cadendo acquisitione in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales sint, per demonstr. celeritatum quoque quadrata, consequenter ipsæ celeritates æquales sunt. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

330. Quodsi adeo grave per superficiem quamcunque FED descendat & per aliam similem ac æqualem similiterque positam DGC rursus ascendat; idem omnino est, ac si eadem linea eadem velocitate singulis sui partibus bis percurreretur (§. 329). Unde tempora descensus & ascensus per æqualia spatia æqualia sunt (§. 25).

CAPUT VIII.

De Descensu & Ascensu Corporum in Lineis Curvis.

DEFINITIO XXXVII.

331. CURVA Isochrone dicitur, in qua grave sine acceleratione descendit, hoc est, æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva Isochrone tempora descensus sunt ut altitudines ejusdem.

SCHOLIUM.

333. Problema de Curva Isochrone inveniendi proposuit LEIBNITZ (a), & suppressa analysi demonstrationem syntheticam

(a) *Nouvelles de la République des Lettres*, Septembre 1687.

dedit (b). Dedit autem solutionem ope Calculi differentialis tunc temporis nascentis JACOBUS BERNOULLI (c): dedere post eum alii alias.

PROBLEMA XLVII.

334. Invenire Curvam Isochronam. Tab. XIII.

RESOLUTIO.

Sit linea horizontalis BC, altitudo per quam grave ad eandem descendit AC, Curva Isochrone GMB. Sit $AP = x$, $PM = y$; erit, ducta pm ipsi PM infinite propinqua, $Pp = dx$, $mR = dy$ Fig. 130.

(b) In *Actis Erudit.* An. 1689. p. 196. & seqq.
(c) In *Actis Erudit.* An. 1690. p. 217. & seqq.

Tab. XIII. *Fig.* 130. $= dy$ & $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam in Curva Isochrone tempora descensus sunt ut altitudines, per quas descenditur (§. 332); erit tempus per Mm ut Pp , adeoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquisita eadem est cum celeritate in P acquisita (§. 308), adeoque in ratione subduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arcus infinite parvus Mm percurritur, $= \sqrt{x}$. Jam cum per arculum Mm grave motu æquabili feratur, erit ipse tanquam spatium a mobili percursum (§. 12) $= dx\sqrt{x}$ (§. 34). Est itaque in Curva Isochrone

$$\begin{aligned} \frac{dx\sqrt{x}}{x dx^2} &= \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx^2 + dy^2} \\ \frac{dx\sqrt{x}}{x dx^2 - dx^2} &= \frac{dy^2}{dy^2} \\ \text{hoc est } \frac{dx^2(x-1)}{dx\sqrt{(x-1)}} &= \frac{dy^2}{dy} \\ \text{Fiat } x-1 &= v \\ \text{erit } dx &= dv \\ \frac{dx\sqrt{(x-1)}}{v^{1:2} dv} &= \frac{dv\sqrt{v}}{v^{1:2} dv} \\ \text{adeoque } v^{1:2} dv &= dy \\ \frac{\frac{2}{3}v^{3:2}}{\frac{4}{9}v^3} &= y \\ \frac{4}{9}v^3 &= y^2, \text{ five } v^3 = \frac{9}{4}y^2 \end{aligned}$$

Apparet adeo, Curvam Isochronam esse e numero Paraboloidum quadratico-cubicalium (§. 519 *Analys. finit.*), cujus abscissa $= u$, semiordinata $PM = y$, parameter $\frac{9}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, est x , sed $v = x - 1$; curva BMG lineam verticalem AC non secat in A , sed in G ; consequenter mobile cadere debet per altitudinem AG , antequam in curva GMB descendere possit. Et quia $AG = 1$, parameter vero $= \frac{9}{4}$;

Tab. XIII. *Fig.* 130. si sit parameter $= p$, erit $p = \frac{9}{4} AG$, adeoque $\frac{4}{9}p = AG$, hoc est, altitudo AG , per quam descendere debet grave antequam per curvam ita descendere potest ut altitudines descensus sint tempori proportionales, est quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile adeo non ex quiete descensum inchoat, sed ea celeritate quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem.

S C H O L I O N.

335. Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter se parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero Problema in hypothesisi directionum convergentium solvit VARI-
GNONIUS (a). Labet igitur solutionem in eadem hypothesisi subjungere.

P R O B L E M A XLVIII.

336. Invenire Lineam Isochronam Tab. XIV. a. in hypothesisi directionum in Centro Telluris convergentium. *Fig.* 131.

R E S O L U T I O.

Sit distantia AC puncti horizontalis A , unde grave cadit, a centro Telluris $C = b$, $AP = x$ ut ante, AN arcus radio AC descriptus $= y$, quia ad AC perinde ac in Problemate præcedente semiordinatæ ad eandem altitudinem perpendicularis (§. 38 *Analys. infinit.*). Sit porro radius Cn ipsi CN infinite propinquus, & radiis CP atque Cp particula infinite parva Pp differentibus describantur arcus concentrici PM & pm ; erit $MR = Pp = dx$, $Nn = dy$ &

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1699.* p. 1. & seqq.

Tab. & ob similitudinem sectorum CnN & XIV. a. CmR (§. 138, 412 Geom.).

Fig. CN:Nn=Cm:mR

131. $b:dy=b-x:$

adeoque $mR=(b-x)dy:b.$

Porro ob angulum ad R rectum (§. 38 *Analys. infinit.*).

$MR^2+mR^2=Mm^2$ (§. 417 *Geom.*)

adeoque $Mm^2=dx^2+(b-x)^2dy^2:b^2$

$= (b^2dx^2+(b-x)^2dy^2):b^2$

Enimvero, vi *Analys. præcedentis* (§. 334)

$Mm^2=xdx^2$

Ergo $xdx^2=(b^2dx^2+(b-x)^2dy^2):b^2$

$b^2xdx^2-b^2dx^2=(b-x)^2dy^2$

$b dx \sqrt{(x-1)}=(b-x) dy$

$\frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x}=dy$

$\int \frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x}=y$

Cum y fit arcus AN, & eo dato determinetur punctum M, ducto ex centro C radio CN & intervallo CP ob $AP=x$ noto, seu $=b-x$, arcu PM; non alia re opus est, quam ut arcus AN ex assumpta AP sive x determinetur: id quod fit ope curvæ BQD. Si enim Elementum ejus $PpQq$ ponatur $=b dx \sqrt{(x-1)}:(b-x)$; cum sit $Pp=dx$, erit semiordinata $PQ=b \sqrt{(x-1)}:(b-x)$. Quare si area BPQ dividatur per $AB=1$; prodibit recta arcui AN æqualis. Construatut itaque parallelogrammum rectangulum ABLK, æquale areæ BPQ, cujus altitudo constans $AB=1$; erit $BL=AK=AN$ arcui; qui adeo circuli quadratura præsupposita determinari potest. Apparet ita-

que Curvæ Isochronæ in præsentī casu Tab. XIV. a. constructionem pendere a quadratura curvæ BQD & quadratura circuli. Fig. 131.

Ut curvæ BQD natura investigetur fiat

$$\frac{PQ=b\sqrt{(x-1)}:(b-x)=0}{\text{erit } x-1=0}$$

$$x=1$$

Patet adeo, semiordinata PQ evanescēte, x degenerare in $AB=1$, sive in B, ubi $PQ=0$, esse AB adhuc $=1$. Fiat porro $PQ=b\sqrt{(x-1)}:(b-x)=\infty$

erit $\frac{b-x=0}{b=x}$

Ergo ubi $AP=x$ degenerat in $AC=b$, semiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis est asymptotus curvæ BQD.

Ut curvæ BQD constructio detegatur, fiat $BP=v$, erit, ob $AP=x$ & $AB=1$.

$$\frac{x=v+1}{x-1=v}$$

$$PQ=\frac{b\sqrt{(x-1)}}{b-x}=\frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Quoniam \sqrt{v} est semiordinata parabolæ, cujus vertex B, abscissa BP, parameter $AB=1$ (§. 392 *Anal. finit.*); construatur circa axem BC parabola BHS, erit $PH=\sqrt{v}$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectæ AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*).

$CP:PH=CA:AV$

$b-v-1:\sqrt{v}=b:\frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$

Tab. XIV. a. Fig. 131. Est igitur $AV = PQ$, adeoque punctum curvæ Q , a qua constructio Isochronæ pendet, habetur si parallelogrammum $PAVQ$ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum, si sit $VQ = AP = y$ & $AV = PQ = x$, $AB = a$; erit.

$$x = \frac{b\sqrt{(ay - a^2)}}{b - y}$$

$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b - y)^2}$$

$$x^2(b - y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

seu ob $(b - y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$

$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0$$

Si fiat $x = 0$.

$$\text{erit } a^2b^2 - ab^2y = 0$$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

Est igitur semiordinata AB in origine abscissarum $A = a$, quod convenit cum superioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Analys. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Anal. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad Curvam Isochronam in hypothese directionum convergentium eruatur, fiat præter $AB = 1$, $BP = v$, arcus mR , radio $CP = CR$ descriptus $= dz$, cum sit $Pp = dv$, erit $Mm^2 = dz^2 + dv^2$

(§. 417 *Geom.*). Est vero $Mm^2 = xdx^2$ Tab. XIV. a Fig. 131. vi superioris *Analys.* Quare cum fit.

$$\begin{aligned} x &= v + 1 \\ \text{erit } dx &= dv \\ \frac{dx^2}{dx^2} &= \frac{dv^2}{dv^2} \\ xdx^2 &= (v + 1)dv^2 \\ &= vdv^2 + dv^2 \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\begin{aligned} dz^2 + dv^2 &= vdv^2 + dv^2 \\ \frac{dz^2}{dz^2} &= \frac{vdv^2}{dv^2} \\ \frac{dz}{dz} &= \frac{v^{1/2}dv}{dv} \\ z &= \frac{2}{3}v^{3/2} \\ \frac{3}{4}z^2 &= v^3 \end{aligned}$$

hoc est, $\frac{3}{4}AB.PM^2 = BP^3$

Quoniam PM est arcus circuli radio CP descriptus, Curva Isochrona BMC in hypothese directionum convergentium transcendens est (§. 380 *Analys.*).

Ut Curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$, seu $\frac{dz}{dv} = \sqrt{v}$.

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ \text{erit } \frac{dz}{dv} &= 0 \\ dv &= \infty \end{aligned}$$

Est vero in B , $v = 0$ & $dv = \infty$. Axis igitur CB curvam BMC in C tangit, adeoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quod si fiat $CP = 0$, arcus quoque radio CP descriptus $mR = dz = 0$: punctum ergo M coincidit cum C , adeoque curva BMC cum axe in C concurrit,

quæ

Tab. quæ in Beam tangit. Necesse igitur est
XIV. a. ut ibidem sit ad axem concava, con-
Fig. sequenter punctum flexus contrarii
131. habet.

Jam in puncto flexus contrarii M
est $Mm^2 = CP. dPp$ (§. 309 *Anal. infin.*). Fiat igitur $CB = c$; cum sit $BP = v$, erit $CP = c - v$, adeoque $Pp = -dv$. Jam

$$dz = v^{1/2} dv$$

$$\text{adeoque } v^{-1/2} dz = dv$$

$$-v^{-1/2} dz = -dv$$

$$\frac{x}{2} v^{-3/2} dz dv = -ddv = dPp, \text{ ob constantem } dz,$$

$$\frac{1}{2} (c - v) v^{-3/2} dz dv = CP. dPp$$

Porro $Mm^2 = dz^2 + dv^2$
 $= v dv^2 + dv^2$

Habemus itaque

$$v dv^2 + dv^2 = \frac{1}{2} (c - v) v^{-3/2} dz dv$$

$$= \frac{1}{2} (c - v) v^{-1} dv^2$$

$$v + 1 = (c - v) : 2v$$

$$v^2 + v = \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} v$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v = \frac{1}{2} c$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v + \frac{9}{16} = \frac{1}{2} c + \frac{9}{16}$$

$$v + \frac{3}{4} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16}\right)}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16}\right)} - \frac{3}{4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)} - \frac{3}{4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} AC. AB + \frac{1}{16} AB^2\right)} - \frac{3}{4} AB$$

ob $c + 1 = AC$.

Sit Cl ultimum elementum curvæ,
erit $bl = dz$ & $bC = dv$, & ob rectum
ad b (§. 38 *Anal. infin.*), bl ad bC ut
sinus anguli bCl ad sinum anguli bC

(§. 33 *Trigon.*), adeoque $dv : dz$ Tab.
 $= \sin. bCl : \sin. bC$. Si Cl sit ultimum XIV. a.
curvæ elementum, punctum l infinite Fig.
parvo intervallo ab axe AC distat, seu 131.
cum eo coincidit, atque adeo punctum l
est in axe AC & angulus bCl idem cum
 ACG , intra quem curva BMC com-
prehenditur. Quare $dv : dz = \sin. ACG :$
 $\text{Cofin. } ACG$. Est vero $dz = dv \sqrt{v}$, adeo-
que $dz : dv = \sqrt{v} : 1 = \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$.
Est igitur sinus anguli ACG , intra quem
curva continetur, ad ejus cosinum, in
ratione subduplicata rectarum CB &
 BA (§. 159 *Arith.*). Et per hoc Theo-
rema, angulus ACG , consequenter ar-
cus AG , determinatur, qui Curvæ Iso-
chronæ toti construendæ sufficit.

Denique in æquatione $dz = dv \sqrt{v}$
substituatur valor ipsius $v = x - 1$,
erit $dz = dx \sqrt{x - 1}$.

$$\text{Fiat } dz = 0$$

$$\text{erit } dx \sqrt{x - 1} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$= AB$$

Quare cum x denotet altitudinem,
per quam grave cadit, seu motus ac-
celeratricem, & dz in puncto B sit $= 0$,
ubi axis BC Curvam tangit, per demon-
strata; grave non ex quiete motum in
curva BMC incipere debet, sed ea ce-
leritate, quam acquirit cadendo per
altitudinem AB .

Angulus, intra quem continetur Cur- Tab.
va Isochrona in hypothesi directionum XIV. a.
convergentium, determinatur, si super Fig.
 AC , hoc est recta inter locum A , un- 132.

Tab. de descensus incipit, & Centrum
XIV.a. Telluris C interjecta, describatur se-

Fig. micirculus; & in B, ubi Curva axem
132. tangit, erigatur perpendicularis BD,

factaque BE = BA ducatur ex C rectæ
ED parallela CF perpendiculari BD ul-
tra semicirculum continuatæ in F oc-
currens: est enim ACF angulus quæsi-
tus, consequenter arcus AG ex centro
C radio CA descriptus curvæ con-
struendæ sufficit. Etenim AB:BD = BD:
BC (§. 327 Geom.). Quare AB ad
BD in ratione subduplicata AB ad BC
(§. 216, 159 Arithm.), seu AB:BD
= √AB:√BC; consequenter √BC:√AB
= BD:AB aut BE (§. 169 Arithm.).

Quoniam, FC parallela ipsi DE per
constr. erit BD:BE = BF:BC (§.
268 Geom.), adeoque √BC:√AB
= BF:BC (§. 167 Arithm.). Est vero
etiam BF:BC = Sin.BCF.Sin.CFB (§. 33
Trig.) = Sin.ACG:Cosin.ACG. Er-
go Sin.ACG:Cos.ACG = √BC:
√AB (§. 167 Arithm.). Est igitur
ACG angulus quæsitus.

Quodsi super AH = ½ AC semicir-
culus AIH describatur, & in B perpen-
dicularis excitetur, ductisque AI & IH
fiat IK = AL = ¼ AB & LO = KA,
erit O punctum axis, cui punctum fle-
xus contrarii respondet. Est enim AB:
AI = AI:AH sive ½ AC (§. 330 Geom.),
adeoque AI = √½ AC. AB (§. 377
Geom.). Quare cum angulus AIK sit re-
ctus (§. 317 Geom.), erit AK =
√(½ AC. AB + ¼ AB²). Et quia LB =
¾ AB & LO = AK per constr. erit
BO = √(½ AC. AB + ¼ AB²) - ¾ AB.

Quare in O est punctum axis, quod
puncto flexus contrarii respondet.

SCHOLIUM I.

337. Atque ita Calculo analytico eruimus
præcipuas Curvæ Isochrone proprietates in hy-
pothesi directionum convergentium, quæ præ-
senti instituto inserviunt. Constat enim; quo-
modo sit construenda, supposita quadratura cur-
væ cujusdam per parabolam construendæ &
quadratura circuli. Constat præterea, quanam
sint puncta, quibus ductus curvæ determina-
tur, nempe quod in B axem tangat, eique
convexitatem obvertat, punctum O respon-
deat flexui contrario, ita ut curva portioni
axis OC concavitatem obvertat, in C denique
eadem cum axe concurrat: tota autem intra
angulum ACG contineatur. Quoniam tamen
curva ista & rectificabilis, & quadrabilis est,
quadraturam & longitudinem in Corollariis
determinare libet.

COROLLARIUM I.

338. Quoniam Mm = dx √ x (§. 336) Tab.
= x^{1/2} dx, erit arcus curvæ BM = ⅔ x^{3/2} XIV.a.
= ⅔ x √ x. Sed x = v + 1 (§. cit.). Ergo Fig.
BM = (⅔ + ⅔ v) √(v + 1) - ⅔ = ⅔ x √ x 131.
- ⅔ = ⅔ $\frac{AP \cdot \sqrt{AP}}{AB}$ - ⅔ AB. Quare si super Tab.
XIII.

AP describatur semicirculus & erecta in B
perpendiculari BC & in D (est autem AD
= ⅔ AP) perpendiculari DE ducatur recta
AE occurrens ipsi DE in E, tandemque ex
EA resecetur EG = ⅔ AB: erit AG longitu-
do arcus. Est enim AP:AC = AC:AB (§.
330 Geom.), adeoque AC = √ AP, ob AB
= 1. Porro, cum ED ipsi BC parallela (§.
256. Geom.), AB:AC = AD:AE (§. 268
Geom.). Ergo AE = $\frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{2}{3} \frac{AP \cdot \sqrt{AP}}{AB}$.

Quare cum GE = ⅔ AB, per constr. erit uti-
que recta AG arcui curvæ æqualis.

COROL.

COROLLARIUM II.

Tab. 339. Quoniam Elementum areæ est XIV. a. sector infinite parvus $CmR = mR. \frac{1}{2} CR$

Fig. $= v^{1:2} dv (\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v) (\S. 336) = \frac{1}{2}cv^{1:2} dv$

$$\begin{aligned} 131. & -\frac{1}{2}v^{3:2} dv; \text{erit area BMC} = \frac{1}{3}cv^{3:2} - \frac{1}{5}v^{5:2} \\ & = (\frac{1}{3}cv - \frac{1}{5}v^2) \sqrt{v} = (5cv - 3v^2) \sqrt{v} : 15 \\ & = \frac{(5CB.BP - 3BP^2) \sqrt{BP}}{15AB}, \text{ ob } AB = 1. \end{aligned}$$

Quodsi fiat $v = c$, erit area integra $= (5c^2 - 3c^2) \sqrt{c} : 15 = \frac{2}{15}c^2 \sqrt{c} = \frac{2}{15}BC^2 \sqrt{BC} : AB$, denuo ob $AB = 1$.

SCHOLION II.

Quoniam $v = RP$, et area curva incipit in puncto B, non opus est, ut de quantitate adjicienda solliciti simus. Sed cum in Corollario primo origo ipsius x in A, curva autem in B: ideo pro x substitui debebat v ut constaret de quantitate adjicienda.

COROLLARIUM III.

341. Si CM ad PM perpendicularis ($\S. 38$ Anal. infinit.) fiat infinite magna, erit ea axi AC parallela & PM arcus, itidemque alter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrat ($\S. 82, 256$ Geom.). Quare cum x five AP, intuitu infinitæ b five AC, $= 0$; erit $b - x = b$, adeoque æqua-

$$\text{tio } y = \int \frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x} (\S. 336) \text{ degenerat in sequentem } y = \int b dx \sqrt{(x-1)} : b$$

$= \int dx \sqrt{(x-1)}$; qui est casus Leibnizianus ($\S. 334$).

SCHOLION III.

342. Cum Centrum Terræ ingenti admodum intervallo distet, & altitudines in quibus gravium descensus nobis usui esse potest, respectu illius distantie, sint admodum exiguæ; casus directionum parallelarum praxi satisfacit, qui etiam ob faciliorem curvæ descriptionem sese commendat ($\S. 334$ Mech. & $\S. 581$ Analys.). In illo igitur acquiescere

poteramus, nisi nobis quoque propositum esset speciminibus illustribus docere, quomodo principiis Mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in solvendis Problematis arduis sit utendum, & quo ordine ratiocinia sint concatenanda ut non perturbato animi statu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget de solutione generali Problematis in duplici hypothesei hactenus considerati nonnulla addere. Nimirum solvimus Problema de curva Isochrona in hypothesei accelerationis Galilæana, propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea perre licet, satisfacit, ita ut in hac hypothesei natura quoad interrogari possit ($\S. 85$ & seqq.). Enim vero cum aliæ quoque hypotheses non sint impossibiles, atque Geometra sit Problema in omni hypothesei solvere, quamdiu ignoratur quanam illarum sit hypothesei natura; ut ostendamus restat quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem adeo solutionem hic inprimis admittimus, in usum Artis inveniendi; ut appareat progressus a solutionibus particularibus ad generales.

PROBLEMA XLIX.

343. Invenire Curvam Isochronam in quacunque accelerationis hypothesei.

RESOLUTIO.

Quodsi acceleratio alia statuatur, Tab. quam quæ in hypothesei Galilæana XIV. a. obtinet, directionibus parallelis manentibus, Curvæ Isochronæ BMC accedat ^{Fig. 134.} curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem descripta, cujus semiorinata PN, GE exprimunt celeritates per abscissas iisdem respondentes AP, AG acquisitas.

Sit itaque $AP = x$, $PM = y$, $PN = v$,

Tab. reperitur, eodem prorsus quo supra
XIV. a. (§. 334) modo, $Mm = vdx$, ut adeo
Fig. habeamus
134.

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= v^2 dx^2 \\ \hline dy^2 &= v^2 dx^2 - dx^2 \\ \hline dy &= dx \sqrt{(v^2 - 1)} \end{aligned}$$

Quodsi jam sit $v = \sqrt{x}$, quemadmodum in hypothesi *Galileana*: prodibit $dy = dx \sqrt{(x - 1)}$, prorsus ut supra (§. cit.). Solutio itaque particularis convertitur in universalem, aut potius specialis in generalem, si pro \sqrt{x} pones v , id quod regulis Logicis, quas stabilivimus, ad amissum congruit (§. 710 Log.).

Tab. Quodsi magis arriserit ope loci sollicitationum centralium, seu Scalæ gravitatis IQO Problema solve; pari
XIV. a. Fig. facilitate idem præstatur. Accedat enim porro ad Curvam Isochronam BMC & curvam celeritatum ANE, Scala sollicitationum centralium IQO; & sit communis abscissa AP in altitudine acceleratrice $AP = x$, $PM = y$, $PN = v$, $PQ = g$; erit $v^2 = 2 \int g dx$ (§. 113). Quare si pro v^2 hunc valorem substituas, prodibit $dy = dx \sqrt{(2 \int g dx - 1)}$. Quodsi jam supponas, quemadmodum id obtinet in hypothesi *Galileana* (§. 112), gravitatem constantem, quæ adeo sit ut 1; erit $dy = dx \sqrt{(2 \int dx - 1)} = dx \sqrt{(2x - 1)}$, vel, cum hic sola ratio attendatur, minime autem magnitudo absoluta, $dy = dx \sqrt{(x - 1)}$, ut supra (§. 334).

SCHOLIUM.

344. In Curva Isochrona tempora descensus sunt ut altitudines per quas descenditur (§. 332). Inveniri autem possunt etiam Curvæ aliæ, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque constantem vel quomodocunque assignabilem habet. Quamobrem, in gratiam Artis inveniendi, solutionem Problematis generalem apponimus, sub quo Curva Isochrona tanquam casus particularis continetur.

PROBLEMA L.

345. Inveniri Curvam, in qua grave descendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem per quam descendit relationem datam; seu ut tempora descensus habeant inter se relationem ex datis altitudinibus dato modo assignabilem; suppositis quacunque accelerationis lege, & directionibus sive parallelis, sive convergentibus.

RESOLUTIO.

Non differt resolutio Problematis præsentis a resolutione præcedentis, nisi quod circa axem communem describatur, præter curvam descensus BMC, curva celeritatis ANE, etiam curva temporis ASH. Nimirum grave in curva BMC ea lege descendit, ut in M sit celeritas ut semiordinata PN, tempus vero ut PS.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PS = t$, $PM = y$; erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, itemque, ob suppositum per Mm motum æquabilem, vdt , ut supra (§. 334).

Habe

Tab. XIV. a. Fig. 136.

$$\begin{aligned} \text{Habemus itaque } v dt &= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \\ \frac{v^2 dt^2}{v^2 dt^2 - dx^2} &= \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2} \\ \frac{v^2 dt^2 - dx^2}{dy^2} &= \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2} \\ \frac{dy}{v} &= \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)} \\ y &= \int \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)} \end{aligned}$$

Quod si ergo, in dato casu speciali, v exprimatur per x & dt per dx , prodit æquatio curvæ descensus respondens.

Sit ex.gr. $v = \sqrt{x}$ & $t = x$, quemadmodum in Curva Isochrone, supposita accelerationis lege Galileana; erit $dt = dx$, adeoque $y = \int \sqrt{(x dx^2 - dx^2)} = \int dx \sqrt{(x - 1)}$, ut supra (§. 334).

Quod si quis in casu directionum convergentium Problema resolvere velit, non novo calculo opus est, sed in æquatione prima paulo ante (§. 336) inventa, pro $x dx^2$ substitui debet $v^2 dt^2$: quo facto habemus:

$$\begin{aligned} v^2 dt^2 &= \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2} \\ \frac{v^2 b^2 dt^2}{b^2} &= \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2} \\ \frac{v^2 b^2 dt^2 - b^2 dx^2}{(b - x)^2} &= dy^2 \\ \frac{dy}{b - x} &= \frac{b \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)}}{b - x} \end{aligned}$$

Quod si etiam hic, in dato casu speciali, v & t per x determinantur, æquatio curvæ descensus prodit.

Ex.gr. Sit ut ante $v = \sqrt{x}$, $t = x$, quemadmodum pro Curva Isochrone supposuimus; erit

$$dy = \frac{b \sqrt{(x dx^2 - dx^2)}}{b - x} = \frac{b dx \sqrt{(x - 1)}}{b - x},$$

ut supra (§. 336).

SCHOLIUM.

346. Ubi adeo Problema in casu particulari

solutum, veluti in casu LEIBNITII, non difficilis est solutio universalis, quamcumque universalitatem eidem donare volueris: id quod etiam in aliis Problematis similiter obtinet. Enimvero ubi solutio generalis ad casum specialem applicanda, plus difficultatis oritur; quatenus nempe formulæ, quæ per substitutionem prodeunt, vel summandæ, vel ad quadraturas aut rectificationes simpliciorum curvarum reducendæ. Atque ea ratio est, cur Geometræ eminentes Artem inveniendi sive Analysin promoturi parum solliciti fuerint de solutionibus generalibus, modo particulares dare possent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.

DEFINITIO XXXVIII.

347. Curva Isochrone paracentrica dicitur, per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiam Curva accessus & recessus æquabilis.

Sit BMC curva quæsitæ, D punctum fixum in axe datum, DM esse debet ut tempus descensus ab A in M.

SCHOLIUM.

348. Problema de Curva Isochrone paracentrica inveniendæ primum propositum est a LEIBNITIO (a); sed cum solutu difficilior sit priore, dudum intactum reliquerunt Geometræ, donec tandem solutionem daret JACOBUS BERNOULLI (b), & simul solutiones LEIBNITII Fratrisque Joannis (c) eliceret. Generalius deinde idem Problema solvit VARIGNONIUS (d). Labet hic dare solutionem præcedenti, quantum licet, af- finem.

PROBLEMA LI.

349. Invenire Curvam Isochronam paracentricam.

RESO-

(a) In *Artis Erudit.* A. 1689. p. 198.

(b) In *Artis Erudit.* A. 1694. p. 277.

(c) Ibid. p. 371. 394.

(d) In *Comment. Academ. Reg. Scient.* A. 1699. p. 9. & seqq.

RESOLUTIO.

Tab. XIV.b. Sit A punctum, unde descensum in-
choat grave; D punctum, a quo vel
Fig. recedit, vel ad quod accedit, prout ca-
137. sus tulerit. Radio AD describatur se-
micirculus ANF, ductisque ad punctum
curvæ M rectis DM & Dm infinite
propinquis, agantur ad axem normales
NQ & PM, itemque nq , quæ erit
ipsi NQ infinite propinqua. Ducatur
NT tangens circulum in N (§. 38 *Anal.*
infin.) & nO normalis ad NQ, tan-
demque radio DM arcus MR ex cen-
tro D.

Sit jam $DN = DA = DF = a$, $DQ = z$, $DM = t$, erit $mR = dt$, $Qq = nO = dz$, & $QN = \sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quærat jam, ut in Problemate anteriore de Curva Isochrone (§. 334 & 336) arcus Mm duplici modo, nempe 1°. ex principiis pure Geometricis, 2°. & ex principiis Mechanicis, seu conditione Problematis.

II. Quoniam TN circulum tangit in N, per construct. angulus TND rectus est (§. 38. *Anal. infinit.*), adeoque $\triangle DNQ \sim \triangle QNT$, seu angulus $DNQ = QTN$ (§. 329 *Geom.*). Sed, ob parallelismum rectarum nO & QT (§. 256 *Geom.*) angulus $OnN = QTN$ (§. 233 *Geom.*). Ergo $OnN = DNQ$ (§. 87 *Arithm.*). Quare cum DQN & nON sint recti, per construct. erit (§. 267 *Geom.*)

$$NQ : DN = nO : Nn$$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = dz :$$

$$\text{Ergo } Nn = adz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$$

Porro ob sectores DnN & DRM si- Tab. miles (§. 138, 412 *Geom.*) XIV.b.

$$DN : Nn = DM : MR$$

$$a : \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = t :$$

$$\text{Ergo } MR = tdz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$$

$$\text{Hinc } MR^2 = t^2 dz^2 : (a^2 - z^2)$$

$$\text{Sed } mR^2 = dt^2$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo } Mm^2 &= \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2 \\ &= \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2} \end{aligned}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum Mm æquabilis supponitur, erit spatium Mm in ratione composita temporis & celeritatis in M acquisitæ (§. 34). Sed tempus est ut mR sive dt (§. 347), & celeritas in M acquisita in hypothesi *Galileana* seu gravitatis constantis ut \sqrt{AP} (§. 87). Ergo $Mm = dt. \sqrt{AP}$. Est vero, ob parallelas QN & PM (§. 268 *Geom.*)

$$DN : DQ = DM : DP$$

$$a : z = t :$$

$$\text{Ergo } DP = tz : a$$

$$AP = AD + DP$$

$$= a + tz : a$$

$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

Unde $Mm = dt. \sqrt{AP}$, per demonstr.
 $= dt. \sqrt{(a^2 + tz)} : \sqrt{a}$

$$Mm^2 = \frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{1. a}$$

hoc est, sumta a pro unitate,

$$Mm^2 = \frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{a^2}$$

Habes

Tab.
XIV.b.
Fig.
137.

Habemus itaque

$$\frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{a^2} = \frac{a^2 dt^2 - z^2 dt^2 + t^2 dz^2}{a^2 - z^2}$$

$$a^4 dt^2 + a^2 tz dt^2 - a^2 z^2 dt^2 - tz^3 dt^2 = a^4 dt^2 - a^2 z^2 dt^2 + a^2 t^2 dz^2$$

$$a^2 tz dt^2 - tz^3 dt^2 = a^2 t^2 dz^2$$

$$dt \sqrt{(a^2 z - z^3)} = adz \sqrt{t}$$

$$\sqrt{a}$$

$$dt \sqrt{(a^3 z - az^3)} = adz \sqrt{at}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3 z - az^3)}}$$

$$h.e. a^{-1:2} t^{-1:2} dt = adz : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$$

$$2a^{-1:2} t^{1:2} = af(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$$

$$2a^{1:2} t^{1:2} = a^2 f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$$

$$2a^{1:2} t^{1:2} = a^2 f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$$

Atque hæc est æquatio, quam dedit LEIBNITIUS pro Curva Isochrone paracentrica (a). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2 f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis absolute summari nequit. Dari autem potest constructio, sive per quadraturam, sive per rectificationem aliqujus curvæ. Dabimus primo constructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3 dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$ est elementum areæ, erit semiordinata $v = a^3 : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$ (§. 98 *Anal. infinit.*)

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$v = \infty$$

$$erit \sqrt{(a^3 z - az^3)} = 0$$

$$a^3 z - az^3 = 0$$

$$a^2 - z^2 = 0$$

$$z = a$$

Quando itaque z fit a , hoc est, DQ

Tab. XIV.a. degenerat in DC, semiordinata CR fit infinita. Est adeo CR asymptotus curvæ.

Fig. (a) In *Actis* loc. cit. p. 371. & 372.

138. *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. II.

Fiat

$$z = 0$$

erit

$$v = \frac{a^3}{0}$$

Quare ubi z fit 0, seu evanescit, semiordinata DS est Asymptotus curvæ.

Quoniam $v = a^3 (a^3 z - az^3)^{-1:2}$

erit

$$dv = -\frac{1}{2} a^3 (a^3 z - az^3)^{-3:2} (a^3 dz - 3az^2 dz)$$

Si jam fiat $dv = 0$,

erit

$$-\frac{1}{2} a^3 (a^3 z - az^3)^{-3:2} (a^3 dz - 3az^2 dz) = 0$$

$$a^3 dz = 3az^2 dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} a^2 = z$$

Quando itaque $DQ = \sqrt{\frac{1}{3}} a^2$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analys. infin.*)

$$Quoniam v = \frac{a^3}{\sqrt{(a^3 z - az^3)}} = \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)} \sqrt{az}}$$

$$erit \sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : \frac{a^2}{\sqrt{az}} = a : v$$

Est vero \sqrt{az} semiordinata GQ parabolæ DGB, cujus parameter = a & abscissa DQ = z (§. 392 *Anal.*) & $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ semiordinata QF circuli AFC radio DA = a descripti (§. 377 *Anal.*). Curva igitur quadranda ita constructur. Circa communem axem AC describatur semicirculus AFC radio AD = a , & parabola DGB cujus vertex in D centro semicirculi, parametro a radio semicirculi

K

æqua-

Tab.
XIV.b.
Fig.
138.

Tab. æquali. Fiat deinde $DI = GQ$ & DO
 XIV.b. $= DA$, itemque $DL = QF$, ductisque
 Fig. OK ipsi AI & KT ipsi LO parallelis; erit
 138. $DT = QN$. Est enim

$$DI : DA = DO : DK$$

$$\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

$$DL : DO = DK : DT$$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = \frac{a^2}{\sqrt{az}} : \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)} \sqrt{az}}$$

Demisso itaque ex T perpendiculari
 TN ad QN; punctum N est in curva
 quæsitæ. Quod si tandem spatio SDQNH
 fiat æquale rectangulum ADZV, erit
 ob $AD = a$, $DZ = a^2 \int (dz : \sqrt{(a^2 z - z^3)} - az^3)$.

$$\text{Habemus ergo } \frac{DZ}{4a} = \frac{1}{4} \frac{DZ^2}{4a} = \frac{at}{4a}$$

Unde rectæ t , quibus puncta in Iso-
 chrona paracentrica determinantur, fa-
 cile inveniuntur. Nimirum fiat Db
 $= \frac{1}{4} DZ$ & ducatur bc ipsi ZA parallela;

Tab. erit (§. 268 Geom.) $DA : DZ = Db :$
 XIV.b. Dc , consequenter $Dc = t$. Quare si ex
 Fig. centro D radio Dc describatur arcus se-
 137. cans DN in M; erit punctum M in iso-
 chrona paracentrica.

Videamus jam porro, quomodo sum-
 matio formulæ $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\int a dz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$
 reducatur ad rectificationem arcus cu-
 jusdam. Quoniam $adz : \sqrt{(a^2 z - z^3)}$
 est elementum arcus, per hypoth. erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectifican-
 dæ dx & dy per z dari debent, quadra-
 tum $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ seu ejus mul-
 tiplum dividendum est in duo alia,
 quorum latera, si fieri potest, sunt sum-
 mabilia. Quamobrem cum numerator
 $a^2 dz^2$ debeat esse aggregatum duorum
 quadratorum, evidens est requiri, ut
 quadrata non modo diversa habeant
 signa, verum etiam tales denomina-
 tores, qui in se invicem ducti produ-
 cunt $a^2 z - z^3$. Enimvero cum $a^2 z - z^3$
 in istiusmodi factores resolvi nequeat,
 fieri autem id possit, si mutetur, in
 $a^2 z^2 - z^4$, cum tunc factores sint $az + z^2$
 & $az - z^2$ (§. 86 Anal.); fractio
 $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ ducatur in z ut
 habeatur $a^2 z dz^2 : (a^2 z^2 - z^4)$. Qua-
 re si laterum numeratores dicantur in-
 terea q & w ; erunt latera $q dz : \sqrt{(az + z^2)}$
 & $w dz : \sqrt{(az - z^2)}$. Ex differen-
 tiandi regulis constat, fore latera summa-

$$\text{bilia, si fiat } q = \frac{a + 2z}{2} \text{ \& } w = \frac{a - 2z}{2}$$

$$\text{adeoque ipsa latera fiant } \frac{(a + 2z) dz}{2 \sqrt{(az + z^2)}}$$

$$\text{\& } \frac{(a - 2z) dz}{2 \sqrt{(az - z^2)}}$$

Videamus itaque, an quadratorum
 summa $= \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$. Quoniam itaque

$$dx = \frac{(a + 2z) dz}{2 \sqrt{(az + z^2)}} \text{ \& } dy = \frac{(a - 2z) dz}{2 \sqrt{(az - z^2)}}$$

$$\text{erit } dx^2 = \frac{(a^2 + 4az + 4z^2) dz^2}{4az + 4z^2} \text{ \& } dy^2$$

$$= \frac{(a^2 - 4az + 4z^2) dz^2}{4az - 4z^2}, \text{ seu reductione}$$

ad eandem denominationem facta :
 $dx^2 = (4a^3z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)dz : (16a^2z^2 - 16z^4)$
 & $dy^2 = (4a^3z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)dz : (16a^2z^2 - 16z^4)$, adeoque $dx^2 + dy^2 = 8a^3zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^3dz^2 : (2a^2z - 2z^3)$, seu multipulum quadrati dividendi, consequenter $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz\sqrt{a^3} : \sqrt{(2a^2z - 2z^3)}$.

$$\begin{aligned} \text{Est vero } \frac{dt}{\sqrt{t}} &= \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}} \\ \frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} &= \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} \\ \frac{adt}{\sqrt{2at}} &= \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} \\ \frac{at^{-1:2}dt}{\sqrt{2a}} &= \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} = dv \\ \frac{2at^{-1:2}}{\sqrt{2a}} &= \sqrt{2at} = v \\ 2at &= v^2 \\ t &= v^2 : a \end{aligned}$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipsius t inveniri potest ; pro construenda Curva Isochrone paracentrica prius construi debet curva, in qua altera coordinata est $\sqrt{(az + z^2)}$ seu semiordinata hyperbolæ æquilatæ, cujus axis transversus $= a$, abscissa $= z$ (§. 507 *Analys.*), altera $\sqrt{(az - z^2)}$, seu semiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abscissa $= z$.

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(az + z^2)} & y &= \sqrt{(az - z^2)} \\ \text{erit } x^2 &= az + z^2 & y^2 &= az - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}a^2 + x^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)}} &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + az + z^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)}} \\ z &= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)} - \frac{1}{2}a \\ az &= a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a^2 \\ z^2 &= x^2 + \frac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{4}a^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ az - z^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2 \\ y^2 &= \\ y^2 + x^2 + a^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 &= 4a^2x^2 + a^4 \\ y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 &= 2a^2x^2 - x^4 \end{aligned}$$

Est itaque curva tertii generis (§. 382 *Analys.*).

$$\begin{aligned} \text{Fiat } x &= 0 \\ \text{erit } y^4 + 2a^2y^2 &= 0 \\ y &= 0 \\ \text{Fiat } y &= 0 \\ \text{erit } 2a^2x^2 - x^4 &= 0 \\ 2a^2 &= x^2 \\ \sqrt{2a^2} &= x \end{aligned}$$

In vertice ergo D est origo utriusque Tab. indeterminatæ x & y . Quando ergo XIV.b. $DG = x = \sqrt{2a^2}$, semiordinata y evanescit, adeoque curva secatur axem in G. Fig. 139.

Porro si æquatio differentietur, erit

$$\begin{aligned} 4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy \\ = 4a^2xdx - 4x^3dx \end{aligned}$$

Quare si fiat $dy = 0$, erit

$$\begin{aligned} 4y^2xdx &= 4a^2xdx - 4x^3dx \\ y^2 &= a^2 - x^2 \\ y &= \sqrt{(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

quæ est maxima applicata (§. 63 *Analys. infinit.*). Quoniam vero

Tab. XIV.b. Fig. 139. $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ est semiordinata circuli HI (§. 377 *Anal.*), maxima applicata cadit in I, ubi circulus ex centro D radio $DN = a$ descriptus curvam secat.

Ponatur in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipfius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habemus

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2 \\ \hline 2a^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ \hline a &= \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ \hline a^2 &= x^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ \hline \frac{3}{4}a^2 &= x^2 \\ \hline x &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = DH \end{aligned}$$

Quodsi ponamus abscissarum originem in G & $GQ = v$, erit $DQ = x = b - v$, adeoque æquatio, ob $b = \sqrt{2a^2}$, in hanc degenerat :

$$b^2(b-v)^2 - (b-v)^4 = y^4 + 2y^2(b-v)^2 + b^2y^2$$

Fiat jam $v > b$, e. gr. $= \frac{3}{2}b$

$$\text{erit } b - v = b - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2}b$$

$$(b - v)^2 = \frac{1}{4}b^2$$

$$(b - v)^4 = \frac{1}{16}b^4$$

consequenter

$$\frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{16}b^4 = y^4 + \frac{1}{2}b^2y^2 + b^2y^2$$

$$\text{h. e. } \frac{5}{16}b^4 = y^4 + \frac{3}{2}b^2y^2$$

Cum itaque valor ipfius y non fiat imaginarius, etiamsi v seu GQ sumatur major quam GD , seu axe curvæ $GIFDIG$; curva ultra D continuatur, adeoque se mutuo secant partes in D , hoc est, curva nodum in D habet. Ex constructione autem patet, partem inferiorem fore priori similem.

Ut determinetur angulus, sub quo curva axem in D secat, investiganda est, ut supra (§. 336), ratio laterum infinite parvorum Dq & qf . Quodsi

enim Df sumatur pro situ toto, fq sinus, Dq cosinus anguli quaesiti. Quodsi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genetricium abscissa sumatur dz , semiordinata hyperbolæ erit $\sqrt{(adz + dz^2)}$ (§. 507 *Analys.*), circuli vero $\sqrt{(adz - dz^2)}$ (§. 377 *Analys.*), hoc est, cum dz^2 differentiale secundi gradus respectu primi adz evanescat, utrobique $= \sqrt{adz}$. Quoniam itaque per constructionem Dq est semiordinata hyperbolæ & qf semiordinata circuli; erit ad verticem $qf = qD$, adeoque qDf angulus curvæ cum axe semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus curvæ rectus est.

Potest idem etiam aliis modis ostendi. Nimirum

$$qD = dx = \frac{(a + 2z)dz}{2\sqrt{(az + z^2)}}$$

$$qf = dy = \frac{(a - 2z)dz}{2\sqrt{(az - z^2)}}$$

Sed in casu instantis evanescentiæ, z fit dz . Quare si pro z substituatur dz , erit

$$qD = \frac{adz + 2dz^2}{2\sqrt{(adz + dz^2)}}$$

$$qf = \frac{adz - 2dz^2}{2\sqrt{(adz - dz^2)}}$$

Est vero dz^2 respectu $adz = 0$. Ergo per ea, quæ modo diximus,

$$qD = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \frac{1}{2}\sqrt{adz}$$

$$qf = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \frac{1}{2}\sqrt{adz}$$

Ergo $qD = qf$, ut ante.

Idem inveniri debet, si in æquatione differentiali ad curvam pro x substituatur

Tab. XIV.b. Fig. 139.

Tab. XIV.b. Fig. 139. tur dx & pro y ponatur dy . Aequatio enim $a^2 x dx - x^3 dx = y^3 dy + x^2 y dy + a^2 y dy$ facta substitutione in sequentem degenerat :

$$a^2 dx^2 - dx^4 = dy^4 + dx^2 dy^2 + a^2 dy^2.$$

Quare sit $dx^4 = 0$, $dy^4 = 0$, $dx^2 dy^2 = 0$ erit $a^2 dx^2 = a^2 dy^2$

$$\frac{dx^2 = dy^2}{dx = dy}$$

hoc est, $qD = qf$, ut ante.

Immo potest etiam in æquatione ad curvam $2a^2 x^2 - x^4 = y^4 + 2y^2 x^2 + 2a^2 y^2$ pro x substitui dx & in locum ipsius y surrogari dy : quo facto habemus,

$$2a^2 dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2 dy^2 dx^2 + 2a^2 dy^2$$

Sed $dx^4 = 0$, $dy^4 = 0$, $2 dy^2 dx^2 = 0$

$$\text{Ergo } 2a^2 dx^2 = 2a^2 dy^2$$

$$dx = dy, \text{ ut ante.}$$

Ut tandem etiam intelligatur natura Isochronæ paracentricæ, cum pro ea sit,

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} = dv$$

seu $t = v^2 : 2a$,

$$\text{fi fiat } \frac{dz = 0}{\text{erit } \frac{dv = 0}{\text{adeoque } t = 0}}$$

$$\text{adeoque } t = 0$$

Curva itaque axem in D secat.

Ex ipsa autem constructione apparet, si $DQ = z$ fiat $= a$, seu DN , rectam DM in O cadere, atque adeo curvam axem ibidem secare, ultra eum ex altera parte continuandam. Est vero tum $v = DFIG$, adeoque $DO = (DFIG)^2 : 2a$.

Patet idem ex valoribus x & y . Etenim si sit,

$$z = a$$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)}$
 $= \sqrt{2a^2} = DG$
 & $y = \sqrt{(az - z^2)}$
 $= \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$
 adeoque $DO = t = v^2 : 2a$
 $= (DFIG)^2 : 2a$

Habemus hinc

$$DO : DFIG = DFIG : 2a$$

Quoniam vero curva Isochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, se mutuo in O partes secant.

SCHOLIUM.

350. Poterat quoque Problema præsens ad modum præcedentis variis modis universalius resolvi, nimirum in quacunque gravitatis hypothesis, cum in solutione Galilæanam supposuerimus, sumentes celeritatem acquisitam in ratione subduplicata altitudinis. Sed non opus est, ut istiusmodi solutionibus immoremur.

DEFINITIO XXXIX.

351. Curva Tautochrone dicitur, in qua mobile per quoscunque arcus eodem tempore descendit.

COROLLARIUM.

352. Quoniam descensus per Cycloidem & quemcumque ejus arcum sunt æquidistanti (§. 311); Cyclois Curva Tautochrone est (§. 351).

PROBLEMA LII.

353. Determinare tempus descensus per curvam, in quacunque gravitatis hypothesis, siue directiones supponantur parallelae, siue convergentes.

Tab.
XIV.b.
Fig.
140.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AP, per quam descendit grave, AMB curva descensus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquisita, C centrum gravium. Radiis CM & Cm infinite propinquis describantur arcus PM & pm, sitque AP = x, PM = y: erit Pp = MR = dx, Rm = dy, adeoque Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quoniam motus per M æquabilis, erit Mm = dt. PN (§. 34); consequenter $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dt \cdot PN$

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{PN}$$

Si punctum C infinite distet, arcus PM & pm evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodsi, ex hypothesei gravitatis speciali, substituatur valor ipsius PN, sive celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypothesei. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam substituatur valor ipsius y per x; prodibit tempus in casu speciali dato.

In hypothesei Galilaana, PN = \sqrt{x} , sive, si parameter parabolæ quæ curva celeritatum ANR, fuerit a, PN = \sqrt{ax} (§. 87). Ergo tempus per Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$, adeoque $dt^2 = (dy^2 + dx^2) : ax$.

Sit jam curva descensus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AQ; erit, in hypothesei directionum parallelarum, AQ = PM = y, QM = AP = x, adeoque (§. 388 *Analys.*).

$$x^2 = ay$$

$$2x dx = a dy$$

$$\begin{aligned} 4x^2 dx^2 : a^2 &= dy^2 \\ \text{Ergo } dt^2 &= \frac{(4x^2 dx^2 + a^2 dx^2) : ax}{a^2} \\ &= \frac{(4x^2 + a^2) dx^2}{a^3 x} \\ dt &= \frac{dx \sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{a^3 x}} \end{aligned}$$

Quoniam $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri. Elementum arcus parabolici Mm = dx $\sqrt{(4x^2 + a^2)} : a$ (§. 146 *Anal. infin.*) dividendo per celeritatem in M acquisitam = \sqrt{ax} .

Est igitur $t = \int (dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a \sqrt{ax}) = PO$.

Quodsi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum construi debet, dividendo spatium APN per quantitatem constantem a; erit Elementum illius curvæ PNnp = $dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$.

Quare cum sit Pp = dx; erit semiordinata ejus PN = $\sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$, seu, si a = 1, PN = $a \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$. Est vero \sqrt{ax} semiordinata parabolæ, cujus abscissa AP = x, parameter = a (§. 392 *Analys.*); $\sqrt{(4x^2 + a^2)}$ abscissa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis transversus = 2a, semiordinata = 2x (§. 147 *Anal. infin.*). Curva

igitur, a cujus quadratura pendet constructio curvæ temporum, ita construatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§. 472 *Analys.*), cujus centrum in C, axis dimidius AC = a, qui simul parabolæ AMT parameter. Ducta semiordinata parabolæ PM;

Tab.
XIV.b.
Fig.
140.

Tab.
XIV.b.
Fig.
141.

Tab. PM, fiat $CQ = 2AP = 2x$, erit ex Q
 XIV.b. erecta ad CQ perpendiculari $QO = \sqrt{(4x^2 + a^2)}$. Ducatur TF parallela ipsi
 Fig. CX per punctum M, & AH parallela ipsi
 141. QG, erit $TL = CA = a$ & $TC = PM = \sqrt{ax}$. Fiat $TG = QO = \sqrt{(4x^2 + a^2)}$
 & ducatur FG parallela ipsi LC, erit
 (§. 268 Geom.)

$$\begin{aligned} TC : TL &= TG : TF \\ \sqrt{ax} : a &= \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \\ TF &= \frac{a \sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{ax}} \end{aligned}$$

Quod si ergo MP continuetur in N, donec $PN = TF$, erit punctum N in curva per cujus quadraturam curva temporum construi debet.

Si curvæ temporum constructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$\begin{aligned} dx \frac{\sqrt{(a^2 + 4x^2)}}{a\sqrt{ax}} &= \sqrt{(dz^2 + dy^2)} \\ \text{erit } \frac{a^2 dx^2 + 4x^2 dx^2}{a^3 x} &= dz^2 + dy^2 \end{aligned}$$

$$\text{Fiat jam } dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$$

$$\begin{aligned} dy^2 &= \frac{4x^2 dx^2}{a^3 x} \\ &= \frac{4x dx^2}{a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{erit } \frac{a^{-1:2} x^{-1:2} dx}{2a^{-1:2} x^{1:2}} &= dz \\ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} &= z \\ dy &= 2x^{1:2} a^{-3:2} dx \\ y &= \frac{4}{3} x^{3:2} a^{-3:2} \\ &= \frac{4x\sqrt{x}}{3a\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Si sit $a = 1$; erit

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{ax} & y &= \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} \\ z^2 &= 4ax & \frac{2}{15}ay^2 &= x^3 \end{aligned}$$

Æquatio prima est ad parabolam Apollonianam (§. 388 Anal.) cujus parameter $4a$, abscissa x , semiordinata z : altera vero ad parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{2}{15}a$, abscissa ad parabolam externam relata $= x$, semiordinata $= y$, seu abscissa $= y$, semiordinata $= x$ (§. 519 Analys.) Construenda igitur est parabola, parametro $4a$, AMR (§. 393 Anal.) & alia Tab. secundi generis, cujus parameter $\frac{2}{15}a$, XIV.b. ANT (§. 581 Analys.): erit PM = z Fig. abscissa, PN = AQ = y semiordinata 142. curvæ, a cujus rectificatione pendet constructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, substituatur in æquatione $x^3 = \frac{2}{15}ay^2$ valor ipsius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus, erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam

$$\frac{z^6}{64a^3} = \frac{2}{15}ay^2$$

adeoque $\frac{z^6}{64a^3} = 36a^4 y^2$ quæ est curva quinti generis (§. 382 Analys.) ex familia parabolæ, seu paraboliformium (§. 519 Analys.).

Sit DMA quadrans circuli, cujus Tab. radius $CA = a$, $CP = x$, erit Mm = XIV.a. $adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 153 Anal. infin.), Fig. adeoque $dt = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)} \sqrt{ax}$, quod 143. elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda Curva Isochrone paracentrica reperimus;

perimus; quæ ad ejus summationem spectant, ibidem relegenda sunt.

Tab. III. Sit CMD Cyclois, AOD semicirculus genitor, DN = x , AD = a , erit Fig. 39. AN = $a - x$. Quare cum Mm = $dx\sqrt{a}$: \sqrt{x} (§. 168 *Analys. infin.*); erit

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{x}} \\ &= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-x^2)}} \\ &= \frac{adx\sqrt{a}}{a\sqrt{(ax-x^2)}} \\ t &= \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{adx}{\sqrt{(ax-x^2)}} \end{aligned}$$

Enimvero $\int (adx : \sqrt{(ax-x^2)})$ = arcui DO (§. 157 *Analys. infin.*). $\sqrt{a} = \sqrt{AC}$, & $a = AD$. Ergo tempus descensus per arcum MC = \sqrt{AD} . DO : AD.

Quodsi ergo x , sive DN, degeneret in a , sive AD; erit tempus descensus per semicycloidem CMD = \sqrt{AD} . DOA : DA.

PROBLEMA LIII.

Tab. 354. Determinare tempus descensus XIV.b. in convexitate curvæ in quacunque gravitatis hypothese, sive directiones sint Fig. 140. parallelae sive convexa.

RESOLUTIO.

Sit ANR curva per quam grave descendit, AP = x , PN = y , erit Nn = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit celeritas in P acquisita = v , erit ut in Probl. præced. (§. 353), si elementum temporis fuerit dt , $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : v$.

In hypothese Galileana, $v = \sqrt{x}$. Tab. XIV.b. Ergo $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$. Quare si ex æquatione ad curvam descensus substituatutur ut ibidem valor ipsius dy^2 ; prodibit æquatio ad curvam temporis.

Sit ANR parabola; erit (§. 21 *Anal. infin.*)

$$\begin{aligned} adx &= 2ydy \\ \frac{adx}{2y} &= dy \end{aligned}$$

$$dy^2 = a^2 dx^2 : 4y^2 = a^2 dx^2 : 4ax$$

Quare

$$\begin{aligned} dt &= \sqrt{(dx^2 + \frac{a^2 dx^2}{4ax})} : \sqrt{x} \\ &= \frac{dx \sqrt{(4ax + a^2)}}{\sqrt{4ax} \sqrt{x}} \\ &= \frac{dx \sqrt{(4ax + a^2)}}{2\sqrt{ax^2}} = \frac{dx \sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}}{x\sqrt{a}} \\ t &= \int dx \sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)} : x\sqrt{a} \end{aligned}$$

Quare si hic valor sumitur pro spatio curvilineo per \sqrt{a} diviso; erit semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)} : x$. Est vero $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter = a , si abscissæ a foco, cujus distantia a vertice = $\frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analys.*) computentur. Quare curvæ quadranda vertex est in foco parabolæ & assumpta parametro a pro unitate, semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, est quarta proportionalis ad parabolæ abscissam a centro computatam, semiordinatam & parametrum. Sit semiordinata hujus curvæ = v , erit

$$v =$$

$$\begin{aligned} v &= a \sqrt{(4ax + a^2)} : 2x \\ vx &= \frac{1}{2} a \sqrt{(4ax + a^2)} \\ v^2 x^2 &= a^3 x + \frac{1}{4} a^4 \end{aligned}$$

Est igitur curva tertii generis (§. 382 *Analys.*), sed facillimæ, quemadmodum apparet, constructionis.

Quodsi constructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$, abscissa scilicet existente z , semiordinata y ; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2 dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$\begin{aligned} dz^2 &= \frac{4axdx^2}{4ax^2} & dy^2 &= \frac{a^2 dx^2}{4ax^2} \\ &= dx^2 : x & &= adx^2 : 4x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= x^{-1/2} & \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{a}}{2x} \\ z &= 2x^{1/2} & y &= \int \frac{dx \sqrt{a}}{2x} \\ &= 2\sqrt{x} & & \end{aligned}$$

Est vero \sqrt{x} semiordinata parabolæ, cujus parameter $= 1$, (§. 392 *Anal.*) & $\int \frac{dx}{x}$ spatium hyperbolicum asymptoticum, cujus latus potentia $= 1$ (§. 120 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis constructio, construetur, si abscissæ fiant semiordinatis parabolæ duplis, semiordinatæ autem spatiis hyperbolicis dimidiis per \sqrt{a} divisæ æquales, axe parabolæ existente simul asymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempora descensus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit Cyclois, & diameter circuli genitoris $= 1$, erit N^o XIV.b. $= dx : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analys. infin.*), adeoque $dt = dx : x$. Pendet adeo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120 *Analys. infin.*) : Et quoniam $t = \int dx : x$, sed $\int dx : x$ logarithmus ipsius x sumtus in logarithmica, cujus subtangens $= 1$ (§. 243 *Analys. infin.*), tempus descensus per convexitatem Cycloidis etiam per Logarithmos determinari potest.

DEFINITIO XL.

355. *Curva Brachystochrona* est, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam, descendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *Curva celerrimi descensus*.

SCHOLION.

356. *Problema hoc proposuit Joannes BERNOULLI. Analyti suppressa Cycloidem esse monuerunt LEIBNITIUS (a) & HOSPITALIUS (b). Solutionem integram exhibuit Jacobus BERNOULLI (c), Methodo Synthetica ex natura descensus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam Cycloidi convenire postea ostendit. Joannes vero (d) ex fundamentis Dioptricis id solvit, propterea quod advertit eam eandem esse cum curvatura radii per medium uniformiter densum propagati. Equidem solutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus descensus per arcum Mm infinite parvum sit minimum; hoc vero sit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$ in hypothesi Galilæana (§. 354), non alia re opus esse videbatur.*

(a) In *Actis Eruditorum*. A. 1697. p. 203.

(b) Ibid. p. 217.

(c) Ibid. p. 212.

(d) Ibid. p. 207. & seqq.

tur, quam ut ejus differentiale ponatur nihilo æquale (§. 63 Analys. infin.). Enimvero tentanti apparebit, sic nos delabi ad æquationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam Joannis BERNOULLI, sine supposita identitate Brachystochronæ cum curvatura radii per medium non uniformiter densum.

PROBLEMA LIV.

Tab. XIV.b. Fig. 144. 357. Invenire Curvam Brachystochronam, sive celerrimi descensus.

RESOLUTIO.

Sint semiordinatæ PM, pm & Qn infinite propinquæ, & Pp = pQ; erunt arcus Mm & mn infinite parvi, & demissis perpendicularibus MR & mO, erectaque perpendiculari nS ipsi pm continuatæ in S occurrente, erit MR = mO = nS, & RS respectu arcus Mm constans.

Sit jam AP = x, PM = y; erit Pp = pQ = MR = nS = dx, mR = dy, & Mm = √(dx² + dy²). Sit RS = b; erit mS = On = b - dy, adeoque mn = √(dx² + b² - 2bdy + dy²).

Quoniam motus per Mm est æquabilis, erit toto tempusculo descensus celeritas constans, nempe ea quæ descensu per altitudinem AP acquisita. Ex eadem ratione celeritas in descensu per arcum mn constans est, nempe ea, quæ descensu per altitudinem Ap acquisita. Sit prior = c, posterior = C, erit tempus descensus per Mm = √(dx² + dy²) : c. & tempus per mn = √(dx² + b² - 2bdy + dy²) : C (§. 39); consequenter tempus descensus per Mm + mn = dt = $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}}{C}$

Quoniam tempusculum minimum est, & dx constans, dy vero variabilis, erit (§. 63 Anal. infinit.).

$$ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}} \quad \text{hoc est}$$

$$\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}}$$

five

$$\frac{mR}{e. Mm} = \frac{mS}{C. mn}$$

$$C. mn. mR = c. Mm. mS$$

adeoque

$$Mm : mn = C. mR : c. mS$$

Jam in hypothese Galileana, C = √Ap, & c = √AP (§. 87). Quare Mm : mn = mR. √Ap : mS. √AP.

Quæ est proprietas Curvæ Brachystochronæ a Jacobo BERNOULLI alia via eruta.

Quod si fiat Mm = mn, erit C. mR = c. mS, adeoque

$$c : C = mR : mS$$

$$\& c : mR = C : mS$$

hoc est, elementa semiordinatarum mR & mS, sive nO, sunt ut celeritates acquisitæ, seu ad has celeritates in ratione constante: id quod est fundamentum solutionis Joannis BERNOULLI ex dioptriciis principiis ab ipso derivatum.

Quod si jam arcus Mm = √(dx² + dy²) sumatur constans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquisita = v, & ratio constans ipsius dy ad eandem = Mm : a, erit

dy:

$$\begin{aligned} dy : v &= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : a \\ \frac{ady}{a^2 dy^2} &= \frac{v \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{v^2 dx^2 + v^2 dy^2} \\ \frac{ady}{a^2 dy^2} - \frac{v^2 dy^2}{v^2 dx^2 + v^2 dy^2} &= \frac{v^2 dx^2}{v^2 dx^2 + v^2 dy^2} \\ \frac{ady}{a^2 - v^2} &= \frac{v^2 dx^2}{v^2 dx^2 + v^2 dy^2} \\ \frac{ady}{a^2 - v^2} &= \frac{v dx}{\sqrt{(a^2 - v^2)}} \end{aligned}$$

Formula hæc generalis est & in omni hypothese gravitatis, etiam utcunque variabilis, obtinet. Quodsi jam substituaturs valor ipsius v ex data gravitatis hypothese, prodibit formula specialis.

Sit itaque in hypothese gravitatis constantis

$$v^2 = ax, \text{ adeoque } v = \sqrt{ax}$$

$$\begin{aligned} \text{erit } dy &= \frac{dx \sqrt{ax}}{\sqrt{(a^2 - ax)}} \\ &= \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}} \\ &= \frac{x dx}{\sqrt{(ax - x^2)}} \end{aligned}$$

Est vero $x dx : \sqrt{(ax - x^2)}$ differentia inter $adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ & $(adx - 2x dx) : 2\sqrt{(ax - x^2)}$. Ergo

$$\begin{aligned} dy &= \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \frac{(adx - 2x dx)}{2\sqrt{(ax - x^2)}} \\ y &= \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \int \frac{adx - 2x dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} \\ &= \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \sqrt{(ax - x^2)} \end{aligned}$$

Tab. XV. Fig. 145. Est vero $\sqrt{(ax - x^2)}$ semiordinata circuli DH diametro CB = a descripti (§. 377 *Analys.*) & $\int (adx : 2\sqrt{(ax - x^2)})$ arcus CH (§. 157 *Anal. infin.*). Quam-

obrem $y = \text{arculi CH} - \text{DH} = \text{PM}$. Tab. XV. Fig. 145. Est vero in Cycloide MH = arcui BH (§. 575 *Analys.*) & AC = PM + MH + HD = arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analys.*). Ergo in eadem arc. CH = PM + HD, consequenter PM est æqualis differentie inter arcum CH & ejus sinum HD.

Curva igitur celerrimi descensus sive Brachystochrona est Cyclois, adeoque eadem cum Tautochrone (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in Cycloide PM = arc. CH - HD (§. 357); si utrumque æquationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium = $\frac{1}{2}$ OC, prodibit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ OC. PM} &= \frac{1}{2} \text{ OC. arc. CH} - \frac{1}{2} \text{ OC. HD} \\ \frac{1}{2} \text{ OC. arc. CH} &= \text{Señ. COH} \quad (\S. 435 \text{ Geom.}) \\ \frac{1}{2} \text{ OC. HD} &= \triangle \text{ COH} \quad (\S. 392 \text{ Geom.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ OC. PM} &= \text{Señ. COH} - \triangle \text{ COH} \\ &= \text{segmento HIC} \quad (\S. 436 \text{ Geom.}) \end{aligned}$$

Est adeo Cyclois externa segmentorum circularium repræsentatrix.

SCHOLIUM I.

359. Eleganter hanc Cycloidis proprietatem, etsi ad Mechanicam non spectet, hic tamen annotari consultum fuit, ubi ex demonstratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus HC = $adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 157 *Anal. infin.*), qui in $\frac{1}{2} \text{ CO} = \frac{1}{4} a$ ductus producit elementum sectoris = $a^2 dx : 8\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 435 *Geom.*). Quodsi porro DH altitudinem $\triangle \text{ COH} = \sqrt{(ax - x^2)}$ in basin ejus dimidiam $\frac{1}{2} \text{ CO} = \frac{1}{4} a$ ducas, prodibit area $\triangle \text{ COH} = \frac{1}{4} a \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 392 *Geom.*), cujus adeo elementum = $(a^2 dx - 2ax dx) : 8\sqrt{(ax - x^2)}$.

Tab. XV. *Quare si hoc elementum trianguli ab elemento sectoris auferas, relinquetur elementum segmenti* $HIC = axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 436 Geom.). *Est vero elementum ipsius* $PM = xdx : \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 357). *Quodsi ergo idem in* $\frac{1}{4}a$ *seu* $\frac{1}{2}CO$ *ducas, prodibit* $axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ *elementum sectoris modo repertum, consequenter sector* $= \frac{1}{4}af (xdx : \sqrt{(ax - x^2)}) = \frac{1}{2}CO. PM.$

SCHOLIUM II.

360. *Quodsi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime descendere debet, Cyclois describenda est per duo puncta data. Quamobrem ut Problema ad praxin transferri possit, ostendendum adhuc erit, quomodo Cyclois per data duo puncta describatur.*

PROBLEMA LV.

Tab. XV. Fig. 146. 361. *Describere Cycloidem per data duo puncta A & C transeuntem.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Describatur Cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B secet.
3. Fiat deinde $AB : AC = ED : FG$, erit FG diameter circuli genitoris Cycloidis per puncta A & C transeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG describi potest (§. 573 Anal.).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonstrandum, esse $AB : AC = ED : FG$, quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter se parallelæ (§. 256 Geom.). Et quoniam HA,

DE & GF perpendiculares ad AF per constr. erunt quoque eadem inter se parallelæ (§. cit. Geom.). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 Geom.), consequenter (§. 268 Geom.) $AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ$, ob $EP = AS$ & $AT = FQ$ (§. 168 Arithm.). Sed $SB = \text{arc. EN} - \text{PN}$ & $TC = \text{arc. FR} - \text{QR}$ (§. 357). Ergo $EP : FQ = \text{arc. EN} - \text{PN} : \text{arc. FR} - \text{QR}$ (§. 167 Arithm.), consequenter DE. EP : FG. FQ = segm. EN : segm. FR (§. 185 Arithm.), quia scilicet $\frac{1}{2}DE$ (arc. EN — PN) = segm. EN & $\frac{1}{2}FG$ (arc. FR — QR) = segm. FR (§. 436 Geom.). Est vero $DE : EN = EN : EP$ & $FG : FR = FR : FQ$ (§. 330 Geom.), adeoque DE. EP = EN^2 & FG. FQ = FR^2 (§. 377 Geom.), consequenter $EN^2 : FR^2 = \text{segm. EN} : \text{segm. FR}$ (§. 167 Arithm.). Sunt itaque segmenta EN & FR similia (§. 406 Geom.), & hinc etiam arcus cognomines similes sunt, consequenter $EP : FQ = ED : FG$ (§. 12 Trigon.). Quare cum sit $AB : AC = EP : FQ$ per demonstrata; erit etiam $AB : AC = ED : FG$ (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

Aliter.

Potest idem multo brevius ex principiis nostris similitudinis ostendi, alibi propositis (a); scilicet cum omnes Cycloides sint inter se similes, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC sunt chordæ arcuum cycloidicorum eandem basin

(a) In Actis Erudit. A. 1715, p. 213, & seqq.

Tab. basin AF sub eodem angulo secantes,
XV. adeoque eodem modo determinatæ, &
Fig. diametri circulorum genitorum sunt re-
146. ctæ ex medio basium normaliter erectæ,
consequenter itidem eodem modo de-
terminatæ. Patet ergo esse diametros
circulorum genitorum ED & FG ipsis
AB & AC proportionales. Q. e. d.

SCHOLION I.

362. Patet hinc præstantia principiorum nostrorum similitudinis, ob quam merentur quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipsis aditum aperuimus. Sanè si quis *Analysin* similitudinis invenire vellet, ex istis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero *Analysin*, quæ ad similitudinem spectant, multo facilius reperirentur, quam per *Analysin* magnitudinum quæ nunc sola utimur in Geometria.

SCHOLION II.

363. *Supposuimus in demonstratione, segmenta circularum similia esse in ratione duplicata chordarum, nempe $EN^2 : FR^2 = \text{segm. EN} : \text{segm. FR}$, vi principiorum Geometriæ, ex quibus id facile colligitur. Quodsi quis non videat, quomodo idem inde inferatur, demonstrationem hic subicere licet per modum Lemmatis; & quidem multo universalius.*

LEMMA I.

364. *Señtores similes & segmenta similia circuli habent rationem duplicatam radiorum, subtensarum & ipsorum arcuum: immo segmenta similia curvarum similibus habent rationem duplicatam subtensarum & ipsorum arcuum, aliarumque linearum quarumcumque eodem modo determinatarum.*

DEMONSTRATIO.

Sector FOR æqualis est triangulo Tab.
 rectangulo, cujus basis est arcus FR, XV.
 altitudo radius FO: & sector ENQ Fig.
 æqualis est triangulo rectangulo, cujus 146.
 basis est arcus EN, altitudo radius EQ
 (§. 415 *Geom.*). Est vero sector FOR
 similis sectori ENQ *per hypoth.* quare
 cum sectores per rationem arcuum
 ad radios discerni possint, erunt arcus
 FR & EN radiis suis FO & EQ pro-
 portionales (§. 24 *Arithm.*), conse-
 quenter triangula, quibus sectores
 æquales sunt, inter se similia sunt (§. 183
Geom.). Sunt igitur sectores in ratione
 duplicata radiorum & arcuum (§. 398
Geom.). Quod erat unum.

Quoniam arcus FR & EN similes sunt, cum alias segmenta per eorum ad peripheriam rationem discerni possent, contra hypothesein (§. 24 *Arithm.*), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines sunt æquales (§. 141 *Geom.*), consequenter cum utrobique crura sibi invicem sint æqualia (§. 40 *Geom.*), ipsa trianguula similia sunt (§. 183 *Geom.*), adeoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 *Geom.*). Est igitur sector FRO : sect. ENQ = $\triangle FRO : \triangle ENQ$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter sect. FRO — $\triangle FRO$: sect. ENQ — $\triangle ENQ$ = sect. FRO : sect. ENQ (§. 189 *Arithm.*). Ergo cum sect. FRO — $\triangle FRO$ = segmento FR, & sect. ENQ — $\triangle ENQ$ = segment. EN, quod per se patet, segment. FR : segm. EN = sector FRO : sect. ENQ (§. 168 *Arithm.*). Sunt vero

L 3.

secto.

Tab. XV. Fig. 146. sectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonstr.* Ergo & segmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum sunt (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Arcus FR & EN sunt similes *per hypoth.* Ergo eorum sinus (§. 12 *Trigon.*), consequenter & sinum duplæ (§. 2 *Trigon.*) chordæ sunt arcubus proportionales (§. 178 *Arithm.*). Sunt vero sectores atque segmenta in ratione duplicata arcuum, *per demonstrata.* Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167, 260 *Arithm.*).

Idem vero multo universalius de quibuscunque curvarum similium segmentis similibus demonstratur.

Tab. XV. Fig. 147. Si curvæ fuerint similes, rectæ constantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter se rationem habent, cum alias per eam distinguere possent, (§. 24 *Arithm.*). Quare si porro segmenta similia esse debent, necesse est ut abscissæ AP & Ap ad rectas illas constantes *a* & *b* utrobique in eadem sint ratione (§. cit.), consequenter $AP:Ap = a:b$. Quare si $AP = x$; erit $Ap = bx:a$. Et quoniam semiordinatæ PM & pm, chordæ AM & am, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit $AM:am = \text{arc. } AM:\text{arc. } am = PM:pm = AP:ap = a:b$ (§. 120 *Geom.*).

Quare si $PM = y$; erit $pm = by:a$. Est vero Elementum curvæ $AMP = ydx$, alterius $amp = b^2 ydx:a^2$ (§. 98 *Anal. infin.*), adeoque curvilineum $AMP:amp = \int ydx : \frac{b^2}{a^2} \int ydx = a^2:b^2 = AM^2:am^2$

Tab. XV. Fig. 147. $= PM^2:pm^2 = AP^2:ap^2$. Porro quia $AP:PM = ap:pm$ *per demonstr.* & anguli ad P & p recti *per construct.* $\triangle APM \sim \triangle apm$ (§. 183 *Geom.*), consequenter $\triangle APM:\triangle apm = AM^2:am^2$ (§. 398 *Geom.*). Cum itaque sit $APM:apm = \triangle APM:\triangle apm$ (§. 167 *Arithm.*), erit segment. $AM:\text{segm. } am = APM:apm$ (§. 189 *Arithm.*) $= AM^2:am^2 = PM^2:pm^2 = AP:ap^2 = \text{arc. } AM^2:\text{arc. } am^2$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti si ex P & p demittantur in AM & am perpendiculara PL & pl, rectarum PL & pl, *per demonstrata.* *Quod erat tertium.*

SCHOLIUM.

365. Qui ad demonstrationem partis ultimæ Lemmatis præsentis attendit, is fecunditatem & utilitatem principiorum nostrorum similitudinis abunde perspiciet: quæ in Philosophia prima tanquam sede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus (a).

DEFINITIO XLI.

366. Curva Synchrona est, ad cuius singula puncta D, m, M eodem tempore minimo grave pervenit. Tab. XV. Fig. 148.

SCHOLIUM.

367. Curvam hanc primus invenit Joannes BERNOULLI (b). Ex hætenus autem traditis mira facilitate eam deducere licet.

PROBLEMA LVI.

368. Construere curvam Synchronam DmM, data altitudine perpendiculari CD, per quam grave dato tempore descen-

(a) Ontolog. §. 215. & seqq.

(b) Vid. *Acta Eruditorum* An. 1697.

Tab. descendit quo ad singula puncta Syn-
XV. chrona pervenit.

Fig.
148.

RESOLUTIO.

1. Describantur Cycloides quotcunque CM, Cm &c. commune initium in C habentes (§. 573 *Analys.*)
2. Erigatur in communi initio C ad basin CA perpendicularis CD, quæ sit altitudini datæ æqualis per quam grave dato tempore descendit, seu, quod perinde est, per quam datur tempus, quo grave ad singula puncta D, m, M Synchronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur basi AC parallela NM secans Cycloidem in M: erit punctum in M Synchrona.

Eodem modo in Cycloidibus ceteris Cm determinantur puncta in Synchrona, ope circulorum genitorum ipsis respondentium.

DEMONSTRATIO.

$AB : \text{arc. AN} = \text{arc. AN} : CD$ per const.

$$\frac{AN = \sqrt{AB \cdot \sqrt{CD}}}{AN \cdot \sqrt{AB} = AB \cdot \sqrt{CD}} \\ \frac{AN \cdot \sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}$$

Est vero $AN \cdot \sqrt{AB} : AB$ tempus descensus per arcum Cycloidis CM (§. 353) & \sqrt{CD} tempus descensus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D descendit. Quoniam itaque eodem modo ostenditur,

quod ad quodvis punctum m eodem tempore perveniat, quo per CD descendit; curva DmM est Synchrona (§. 366).

Tab.
XV.
Fig.
148.

DEFINITIO XLII.

369. *Curva Æquilibrationis dicitur, in qua existens pondus vel sacoma semper æquilibrium faciat cum ponte sublicio circa axem convertibili.*

SCHOLION.

370. *Problema hoc solverunt (a) Marchio HOSPITALIUS & Jacobus BERNOULLI diversa ratione. Joannes BERNOULLI (b) identitatem curvæ æquilibrationis cum Cycloide descripta ex circumvolutione rotæ super rota æquali demonstravit, & Problema generalius per communem Geometriam solvit.*

PROBLEMA LVII.

371. *Invenire Curvam Æquilibrationis.*

Tab.
XV.
Fig.
149.

RESOLUTIO.

Sit pons sublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem A versatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera M sacoma sustinet. Cum potentia laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipollegant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (§. 241. 280); si CA exponit pondus pontis absolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad descensum sollicitetur juxta directionem CK & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; si CM consideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet poten-

(a) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 56. & 65.

(b) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 69.

Tab. potentia ut BC, integrum pondus M
XV. erit ut CK (§§. cit.). Quare si sit
Fig. quædam recta b ut pondus absolutum
149. M, erit CK:CM = b :BC.

Sit jam CP = x , PM = y , BC+CM
= a ; erit CM = $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ & hinc
BC = $a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Est vero subnor-
malis PK = $ydy:dx$ (§. 35 Anal. infinit.)
& hinc CK = CP + PK = $x + ydy:dx$
= $(xdx + ydy):dx$. Quare cum sit
CK:CM = b :BC per demonstr.
erit

$$\frac{xdx + ydy}{dx} : \sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$xdx + ydy : dx \sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{b dx \sqrt{(x^2 + y^2)} = a x dx + a y dy}{- x dx \sqrt{(x^2 + y^2)} - y dy \sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$b dx = \frac{a x dx + a y dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - x dx - y dy$$

$$bx = a \sqrt{(x^2 + y^2)} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$$

$$bx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = a \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

quæ est æquatio ad curvam æquilibra-
tionis, cui, si libuerit, etiam quanti-
tas quædam constans addi, vel ab ea-
dem demi potest (§. 95 Analys. infin.).

Ut curva hæc construatur, radio
CD = a describatur semicirculus FDE
& ducatur DG ad FE normalis. Fiat
CG = z , erit GD = $\sqrt{(a^2 - z^2)}$
(§. 377 Anal.) & (§. 268 Geom.).

$$CG:CD = CP:CM$$

$$z:a = x:$$

$$\text{Est itaque } \frac{z \cdot CM}{a} = x$$

$$\text{Porro } CD:DG = CM:PM$$

$$a:\sqrt{(a^2 - z^2)} = CM:y$$

$$\frac{CM \cdot \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} = y$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{2} x^2 = z^2 \cdot CM^2 : 2a^2$$

$$\frac{1}{2} y^2 = (a^2 - z^2) \cdot CM^2 : 2a^2$$

Quodsi hi valores in æquatione ad
curvam substituantur, prodibit

$$a \cdot CM = \frac{bz \cdot CM}{a} + \frac{z^2 \cdot CM^2}{2a^2}$$

$$+ \frac{a^2 \cdot CM^2 - z^2 \cdot CM^2}{2a^2}$$

$$= \frac{bz \cdot CM}{a} + \frac{1}{2} CM^2$$

$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facile
determinatur, cum non alia re opus
sit, quam ut ad radium circuli CD seu
longitudinem funis BC+CM, du-
plum rectæ illius, quæ pondus abso-
lutum facomatis exponit, & rectam
CG pro lubitu assumendam quærat
tertia proportionalis, ac ex diametro
circuli FE auferatur.

Si sit $a = b$, erit CM = $2a - 2z$
= 2GE: qui est casus omnium sim-
plicissimus.

Quando CM degenerat in CN, hoc
est, quando fit a , curva semicirculum
in N secatur, tumque est

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$0 = a - 2bz:a$$

$$\frac{a}{2b} = z$$

Patet adeo, CG esse tertiam pro-
portionalem ad $2b$ & a , si curva pe-
ripheriam circuli secatur.

Quo-

Tab.
XV.
Fig.
149.

Tab. XV. (§. 20 *Anal. infin.*) & vi superiorum Fig. 149.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{aydy - ydy\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax} \\ \frac{ydx}{dy} &= \frac{ay^2 - y^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax} \\ \text{Quare si } CM &= \sqrt{(x^2 + y^2)} = a \\ \text{erit } \frac{ydx}{dy} &= \frac{ay^2 - ay^2}{(b+x)a - ax} = 0 \end{aligned}$$

Ergo ubi curva peripheriam circuli secat, subtangens evanescit, adeoque semiordinata eam tangit, consequenter N est punctum infimum, sicque in nostro casu Mechanico arcus CN sufficit.

Tab. XV. Fig. 150. Quodsi in situ pontis horizontali AI longitudo funis IC=CE=CN=a & præterea b=a, vel b>a; tota curvæ portio CMN sufficit; si vero CI<CN, & in situ horizontali pondus jam fuerit in M, satisfacit portio, MN, quoniam tum CM est differentia inter CN & CI.

Si sit CI=c, reliqua sint ut ante, erit

$$\begin{aligned} CM &= 2a - \frac{2bz}{a} = a - c \\ \frac{a+c}{a} &= \frac{2bz}{a} \\ \frac{a^2+ac}{2b} &= z \end{aligned}$$

Punctum adeo M determinatur, si fiat CG=(a²+ac):2b, quæ est quarta proportionalis ad 2b, a & a+c, hoc est, ad duplam lineam, quæ pondus M exprimit, radium circuli CE seu funis integri longitudinem ob IC+CM=CE & compositam ex radio & portione funis IC.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Sit CM=0
erit $\frac{2a-2bz:a=0}{a^2-bz=0}$
 $a^2:b=z$

Tab. XV. Fig. 151. n. 1.

Habemus itaque b:a=a:z. Quare si b=a; erit a=z, adeoque punctum D cadit in E, consequenter diameter FE curvam in centro C tangit.

Si b>a, etiam a>z (§. 149 *Arithm.*), n. 2. recta igitur CD definiens punctum curvæ C adhuc in peripheriam EN cadit; consequenter curva ultra centrum continuari potest, adeoque in centro C axem FE secat.

Quando itaque CD coincidit in E, erit z=a, adeoque cum sit

$$\begin{aligned} x &= z \cdot \frac{CM}{a} \\ &= z\sqrt{(x^2 + y^2)} : a \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ \frac{x^2}{x^2 + y^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem secat in K. Quare cum ex constructione appareat, ab altera parte describi posse partem similem, curva in centro C nodum habet.

Si in æquatione ad curvam
 $a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{4}x^4 + bxy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$
fiat y=0

$$\begin{aligned} \text{erit } a^2x^2 &= b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{4}x^4 \\ \frac{a^2}{x^2} &= \frac{b^2 + bx + \frac{1}{4}x^2}{1} \\ a &= b + \frac{1}{2}x \\ 2a &= 2b + x \end{aligned}$$

Quando itaque b>a; erit
 $x = 2b - 2a$

M

Unde

Unde intelligitur, punctum K a centro distare intervallo $2b - 2a$.

Tab. XIV. Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b.$$

Fig. 151. Ex quo apparet, curvam secare axem infra centrum C in L, ita ut CL sit $2a - 2b$.

Quodsi in æquatione ad curvam valor ipsius x sumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit distantia puncti F a centro C, ubi axem secat. Nimirum cum ob $y = 0$; sit

$$a^2 = b^2 + bx + \frac{1}{4}x^2.$$

erit ob valorem ipsius x negativum

$$a^2 = b^2 - bx + \frac{1}{4}x^2.$$

$$a = \frac{1}{2}x - b$$

$$2a + 2b = x.$$

$$= CF$$

Curva igitur in omni casu in se redit.

Quodsi maxima curvæ latitudo determinanda, cum sit

$$\frac{aydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - ydy = bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

erit ob $dy = 0$ (§. 63 Anal. infin.)

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0.$$

$$(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} = ax$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{b+x} = CM$$

Ut igitur CM in casu maximi inveniri possit, valor ejus, quem supra reperimus $= 2a - 2bz : a$, exprimatur etiam hic per z , ita ut pro x substituatur valor ipsius per z expressus. Est vero juxta superiora $CM = ax : z$. Quare cum hic sit $CM = ax : (b+x)$; erit

$$z = b + x.$$

$$z - b = x$$

$$CM = \frac{ax}{x} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$\frac{a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2}{2bz^2 - a^2z = a^2b}$$

$$2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \frac{1}{2}a^2.$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \frac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} z - \frac{a^2}{4b} \\ \frac{a^2}{4b} - z \end{array} \right\} = \frac{a}{4b} \sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$$z = \frac{a^2 + a\sqrt{(a^2 + 8b^2)}}{4b}$$

Quodsi $a = b$, erit $z = \frac{a^2 + a\sqrt{(a^2 + 8a^2)}}{4a}$

$$= \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}a$$

Quando in hoc casu $z = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}a = a$, Tab. XIV. cum sit $a = CE$, curva axem in centro tangit juxta superiora. Ergo in casu maximi satisfacit radix falsa, nempe $z = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}a$: quod indicio est, valorem ipsius z sumi debere ex altera parte, nempe versus F in recta CF.

Quando $b > a$, curva KCF duplicem habet maximam semiordinatam, alteram nempe infra centrum, alteram supra idem, adeoque radix utraque servit; affirmativa intra centrum, negativa supra idem.

Tab. XIV. Fig. 151. n. 3.

Tab. XIV. Fig. 151. n. 1.

n. 2.

In

Tab. XIV. In casu denique tertio, ubi $a < b$, radix positiva est major radio. Sed cum $z = CG$ radio CE major fieri nequeat, *vi construct.*; radix negativa hic itidem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum versus F.

SCHOLIUM.

372. Illud hic notatu dignum est, quod pro diversa relatione quantitatum constantium a & b , quæ æquationem ingrediuntur, curvæ ductus admodum variet, ita ut oculorum iudicio pro curvis non haberentur, quæ per eandem æquationem definiuntur.

THEOREMA LI.

Tab. XV. 373. Si circulus X super alio equali Y rotetur, ita ut punctum rotationis vel sit in ipsa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis; curva hoc puncto descripta erit Curva æquilibrationis.

DEMONSTRATIO.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione describitur, esse curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit & recta SM, in qua est punctum describens M producat, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, mensuræ angulorum R & S (§. 57 Geom.), æquales sunt per genesin curvæ CMN; erit $RH = HS$ (§. 184 Geom.). Fiat $RC = SM$ & ex centro C

radio $CD = RV = SO$ describatur circulus & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in constructione curvæ æquilibrationis fecimus (§. 371). Fiat porro ut ibidem $RV = OS = CD = a$, $SM = RC = b$, $CG = z$. Quoniam $RH = HS$ per demonstr. & $RC = SM$ per constr. erit etiam $CH = HM$ (§. 91 Arithm.), adeoque $HC : HM = HR : HS$, consequenter angulus $GCD = HRT$ (§. 183 Geom.). Quare cum porro ob $RT = TS$ & $HR = HS$ angulus ad T rectus sit (§. 179, 147 Geom.), & ad G itidem rectus per construct. erit (§. 267 Geom.).

$$CG : CD = RT : RH$$

$$z : a = a :$$

$$\text{Est itaque } RH = a^2 : z, \text{ adeoque } CH = RH - RC = \frac{a^2}{z} - b.$$

Porro ob ang. $HCD = \text{ang. } HRS$ per demonstrata; erit CM ipsi RS parallela (§. 255 Geom.), adeoque (§. 268 Geom.)

$$HR : RS = HC : CM$$

$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b : CM$$

$$\text{five } a^2 : 2a = a^2 - bz : CM$$

$$\text{Ergo } CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Est itaque punctum M in Curva æquilibrationis, consequenter Curva rotatione circuli X super circulo Y puncto M descripta Curva æquilibrationis (§. 371).

M 2

Idem

Tab. Idem eodem modo ostenditur in iis
XV. casibus, ubi punctum describens O fue-
Fig. rit in peripheria, vel punctum descri-
152. bens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA LVIII.

Tab. 374. *Data curva AB, invenire cur-*
XV. *vam aliam LM, super qua, in quocunque*
Fig. *puncto, pondus M datum sit in æquilibrio*
153. *cum pondere alio B dato.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad an-
gulos rectos secans. Quoniam CH est
linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea
horizontalis (§. 210). Demittantur per-
pendiculares BK & ME in lineam hori-
zontalem KO ex punctis curvarum
B & M, in quibus pondera æquilibra-
ta constituuntur, quæ dicantur B & M;
erit I Centrum gravitatis ponderum

constans commune (§. 124). Quare Tab.
B : M = EI : IK (§. 144). Est vero ob XV.
K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verti- Fig.
cales ad I æquales (§. 156 *Geom.*), 153.
ME : KB = EI : IK (§. 267 *Geom.*).
Quare B : M = ME : KB (§. 167 *Arithm.*).
Demittantur ex M & B perpendiculares
ad CH, nempe PM & BH; erit EM
= IP & KB = IH (§. 226 *Geom.*), adeo-
que B : M = IP : IH (§. 167 *Arithm.*).
Quare si per hanc analogiam reperia-
tur recta IP, datis ponderibus & rec-
ta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad
CI perpendicularis portione funis CM
tanquam radio ex puncto C intersece-
tur; erit in M punctum Curvæ æquili-
brationis quæsitum.

Quod si æquatio ad curvam AB de-
tur; facile reperiri potest æquatio ad
Curvam æquilibrationis per communes
Algebræ regulas.

C A P U T IX.

De motu Pendulorum.

DEFINITIO XLIII.

376. **P**endulum est grave quodlibet,
ita suspensum, ut circa punctum
aliquod, vi gravitatis, ascensus & des-
census reciprocos continuare possit.
Ascensus ille & descensus reciprocus
Oscillatio penduli vocatur.

DEFINITIO XLIV.

Tab. 377. *Pendulum simplex* est quod
IV. *constat unico pondere instar puncti*
Fig. 44.

considerato, & linea inflexili gravitatis
experte circa centrum C convertibili
AC appenso.

DEFINITIO XLV.

378. *Pendulum compositum* est quod
pluribus ponderibus constat, eandem
distantiam, tum inter se, tum a centro
circa quod oscillationes fiunt, constan-
ter servantibus.

DEFI-

DEFINITIO XLVI.

379. *Axis oscillationis* est recta lineæ horizontali apparenti parallela transiens per centrum, circa quod pendulum oscillatur.

THEOREMA LII.

Tab. 380. *Pendulum in B adductum per*
IV. *arcum circuli BA descendit, & ad punc-*
Fig.44. *tum æque altum D per arcum æqualem*
ascendit; inde denuo in A descendit ac
ad B ascendit; sicque reciprocos ascensus
& descensus continuat.

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipsi parallela. Si globus A, quem instar puncti consideramus, cum solius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex Centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra basin, quæ est in puncto C. Globus igitur in hoc situ quiescere nequit, sed descendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH descendere possit, per arcum circuli BA descendit (§. 131 *Geom.*). Ubi Centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus instruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 308); adeoque ipsum ad altitudinem æqualem elevare potest (§. 322). Quare cum filum impediatur, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipsi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) ascendit. Vi igitur, quam cadendo acquisiverat, omni absorpta, per eundem arcum DA relabitur, vi gravitatis ascensurus ex A in B; & ita porro. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

381. *Experientia Theoremati non contra-* Tab.
dicat, etsi sine fine continuata oscillationes ei IV.
parum respondeant. Aëris enim resistentia Fig.44.
& frictio circa centrum C partem aliquam
ejus vis absument, quæ cadendo acquisita fue-
rat: unde fieri nequit, ut ad eandem præcise
altitudinem elevetur globus, ex qua delapsus.
Quoniam itaque ascensus continua capit de-
crementa; oscillatio tandem sistitur, & pen-
dulum in situ CA, in quo Centrum gravitatis
infimum occupat locum, quiescit.

THEOREMA LIII.

382. *Si pendulum simplex inter duas* Tab.
semicycloides CB & CD suspendatur, IV.
quarum circuli generatores habent dia- Fig.45.
metrum CF dimidia longitudini fili CA
æqualem, ita ut filum oscillans iis cir-
cumplicetur; oscillationes omnes, utcun-
que inæquales, erunt isochronæ, seu equi-
diurnæ, in medio non resistente.

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE semicycloidi BC circumplicetur, a Centro gravitatis globi E, qui instar puncti consideratur (§. 377), ex evolutione Cyclois BEAD describitur (§. 330 *Analys. infinit.*). Sed omnes descensus & ascensus in Cycloide sunt æquidiurni (§. 311). Ergo oscillationes penduli sunt æquidiurnæ (§. 376). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

383. Quodsi longitudine penduli CA describatur circulus ex centro C; cum portio Cycloidis prope verticem A eodem fere motu describatur, arcus exiguus circuli cum Cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oscillationes pendulorum sunt ad sensum isochronæ, utcunque in se inæquales.

COROLLARIUM II.

384. Quo longiora itaque sunt pendula in arcibus circuli oscillantia; eo majores oscillationes isochronæ sunt.

SCHOLION I.

385. *Experientia non abludit. Quodsi enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque, tamen in arcum non nimis magnum, oscillando excurrat; in oscillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.*

SCHOLION II.

386. *Penduli inter duas semicycloides oscillantis tam theoria, quam praxis debetur illustri HUGENIO (a).*

PROBLEMA LIX.

387. *Determinare durationem oscillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 46. Sit diameter circuli genitoris seu altitudo totius Cycloidis $AB = a$; HB altitudo, ex qua descendit pendulum per arcum illius $QB = 2r$, $HP = x$, erit $PB = 2r - x$. Sit porro tempus per $QB = t$, & super HB describatur semicirculus HNB, ducanturque PM atque pm infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit $PN = \sqrt{(2rx - xx)}$, $Pp = NO = Rm = dx$, & celeritas in P, adeoque & in M (§. 308), acquisita $= \sqrt{x}$ (§. 83), consequenter, cum infinitesima Mm motu uniformi percuratur, tempus per Mm $= dt = Mm : \sqrt{x}$ (§. 39). Constat vero (§. 131 *Analys. infinit.*) esse $Mm : mR = BS : BP$ & $AB : BS = BS : BP$ (§. 330 *Geom.*). Est itaque BS ad BP in ratione subduplicata AB ad BP, (§. 216 *Arithm.*), hoc

(a) Vide Horologium Oscillatorium sive Demonstrationes de motu Pendulorum ad horologia aptas Geometricas.

est, ut \sqrt{AB} ad \sqrt{PB} ; consequenter $Mm : mR = \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ (§. 167 *Arithm.*). Unde $Mm = mR \cdot \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$, & $dt = dx \sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2r dx \sqrt{a} : 2r \sqrt{(2rx - x^2)}$. Est vero $rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = Nn$ (§. 157 *Analys. infinit.*) Ergo $dt = 2\sqrt{a} \cdot Nn : 2r$ & $\int dt = \int Nn \cdot 2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ sive t tempus denotat, quo grave per arcum Cycloidis QB descendit, $\int Nn$ in semiperipheriam circuli HNB degenerat. Quare ut $2r$, seu diameter circuli, ad semiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum QB; consequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus descensus perpendicularis per AB (§. 39, 92, 83); patet tandem (§. 168 *Arithm.*) sequens

Theorema: Tempus integræ oscillationis per arcum quemcunque Cycloidis QMB est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AB, ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo consequitur, quod jam superius aliunde demonstratum (§. 311), tempus descensus per quoslibet arcus Cycloidis esse æquidiuturnum; oscillationes item in omnibus arcibus Cycloidis esse æquidiuturnas.

THEOREMA LIV.

389. *Gravitatis actio minor est in iis Terræ regionibus, ubi oscillationes ejusdem penduli sunt tardiores; major vero, ubi eadem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oscillationum in Cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris

Tab. IV. Fig. 46.

ut

ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), adeoque in ratione constante (§. 413 *Geom.*). Quare si oscillatio ejusdem penduli sit tardior, descensus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: si ille redditur celerior; hic quoque celerior sit necesse est. In primo igitur casu minus spatium cadendo conficit grave, quam in altero; adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero; consequenter gravitas minor est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum adeo Experientia docuerit, oscillationes ejusdem penduli esse tardiores prope Æquatorem, quam in remotioribus versus Polum regionibus; gravitas corporum minor est versus Æquatorem, quam versus Polos.

SCHOLIUM.

391. Observavit hoc primus RICHERIUS An. 1672, itinere in Insulam Cayennæ, quæ ab Æquatore 5 fere gradibus distat, facto; ubi pendulum Parisiense singulis minutis secundis oscillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum $8\frac{3}{4}$, minuendum erat linea una cum quadrante, ut adhuc oscillationes singulis minutis secundis absolveret (a). An. 1677; HALLEIUS ad Insulam S. Helenæ navigans reperit Horologium suum ibi tardius moveri, quam Londini, sed differentiam non notavit. Similes observationes habuere An. 1682, VARIN & DES HAYES; An. 1697, COUPLET filius; & An. 1704, FEUILLE (b).

THEOREMA LV.

Tab. III. Fig. 47. 392. Si duo pendula CA & EF in arcus similes DAB & GFH excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum CA & EF.

(a) *Acta Eruditorum*, An. 1695. p. 30.

(b) Vid. NEWTONUM in *Principiis*, Lib. III. Prop. 19. p. m. 419.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad Tab. tempus descensus per GF in ratione III. subduplicata DA ad GF (§. 314). Fig. 47. Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arithm.*); consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF per *hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & 170 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA LVI.

394. Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt.

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus a numerus oscillationum penduli unius $= b$, alterius $= mb$. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidistantur; erit tempus quo pendulum primum oscillationem unam conficit $= a : b$, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, $= a : mb$ (§. 302 *Arithm.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut $a : b$ ad $a : mb$, hoc est, ut amb ad ab (§. 178 *Arithm.*), seu ut mb ad b (§. 181 *Arithm.*). Sed ut mb ad b ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscillatio-

lationum eodem tempore confectarum
reciproce ut tempora singularum.
Q. e. d.

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum
in arcus similes; eosque parvos, excurren-
tium sunt in ratione duplicata numerorum
oscillationum eodem tempore confecta-
rum, sed reciproce sumptorum (§. 393).

THEOREMA LVII.

396. Longitudines pendulorum intra
Cycloides suspensorum sunt in ratione
duplicata temporum quibus singula oscil-
lationes fiunt.

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad periphe-
riam, ita tempus descensus per alti-
tudinem Cycloidis, seu dimidiam pen-
duli longitudinem, ad tempus unius
oscillationis (§. 387). Sunt igitur tem-
pora descensus per duorum pendulo-
rum dimidias longitudes ut tempora
duarum oscillationum ab iisdem con-
fectarum (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed
altitudines descensus perpendicularis
sunt in ratione duplicata temporum
(§. 86.) Ergo etiam altitudines, hoc
est pendulorum longitudes dimidiæ,
consequenter & integræ (§. 178
Arithm.), sunt in ratione duplicata
temporum, quibus oscillationes per
Cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata
numerorum oscillationum eodem tempo-
re confectarum, sed reciproce sumptorum
(§. 394).

COROLLARIUM II.

398. Tempora oscillationum in Cycloi-
dibus diversis sunt in ratione subduplicata
longitudinis pendulorum.

PROBLEMA LX.

399. Data longitudine alicujus pen-
duli, una cum numero oscillationum in
tempore dato confectarum; invenire lon-
gitudinem alterius penduli quod eodem
tempore datum oscillationum numerum
conficiat.

RESOLUTIO.

Quærat ad quadratum numeri
oscillationum, quas in tempore dato
absolvere debet pendulum quæsitum,
ad quadratum numeri oscillationum
penduli dati, & longitudinem penduli
dati, numerus quartus proportionalis;
erit is longitudo penduli quæsitæ (§.
397).

E. gr. Juxta HUGENIUM (a) longitudo
penduli, cujus oscillationes singulæ singu-
lis minutis secundis absolvuntur, est pedum
Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur
pendulum, quod intra minutum primum
200 oscillationes conficiat. Cum numerus
oscillationum penduli dati sit intra minu-
tum primum 60, & ejus longitudo 881 linea-
rum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitu-
do penduli quæsitæ = 3600. $881 : 40000$
= $79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{645}{1000}$ lin.

PROBLEMA LXI.

400. Dato numero oscillationum quæ
a pendulo data longitudinis in dato tem-
pore absolvuntur; invenire numerum
oscillationum ab alio pendulo data iti-
dem longitudinis in dato tempore con-
ficiendarum.

RESO-

(*) In *Horolog. Oscillat.* part. 4. Prop. 25. f. 152.

RESOLUTIO.

1. Quæratnr numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas, & quadratum numeri oscillationum quæfiti (§.397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæfitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= \sqrt{(88100.3600 : 7929)} = \sqrt{40000} = 200.$

THEOREMA LVIII.

Tab. 401. Celeritas penduli in puncto in-
III. fimo B est ad celeritatem cadendo per
Fig.36. duplam longitudinem AB acquisitam,
ut chorda arcus quem describit EB ad
diametrum circuli AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquisita æquatur celeritati per PB acquisitæ (§.308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BP ad BA (§.87). Sed BA:BE=BE:BP (§.330 Geom.), adeoque BA ad BE est ratio subduplicata BA ad BP (§.216, 159 Arithm.). Ergo celeritas per arcum BE est ad celeritatem per BA acquisitam, ut chorda BE ad BA (§.167 Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM.

402. Cum adeo sit celeritas per arcum EB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda EB ad AB, & celeritas per arcum DB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda DB
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

ad AB (§.401); celeritates per arcus Tab.
EB & DB acquisitæ sunt ut chordæ cognomines (§.195 Arithm.). III.
Fig.36.

SCHOLIUM.

403. Alia adhuc Theoremata non inelegantia de Pendulis habet NEWTONUS (a): quæ analytice facillime demonstrantur ex superioribus. Eum igitur in finem sequens addimus Problema.

PROBLEMA LXII.

404. Determinare tempus oscillationis dimidia per arcum exiguum, in hypothesis gravitatis uniformis, sed massa minime proportionalis.

RESOLUTIO.

Sit in C centrum, circa quod pendulum oscillatur. Sint NA & MA Tab.
XVI. arcus exigui, per quos oscillatur, seu Fig.
oscillationes dimidiæ. Sit BA dupla 154.
penduli longitudo, & BNA semicirculus ex centro C descriptus; dicatur

CA=a, AP=x, AQ=b,
erit AB=2a, QP=b-x,
& (§.330 Geom.)

AB:AN=AN:AQ

2a:AN=AN:b

AB:AM=AM:AP

2a:AM=AM:x

adeoque

AM= $\sqrt{2ax}$, AN= $\sqrt{2ab}$.

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter subtensæ cognomines Quare etiam arcus AM= $\sqrt{2ax}$, & arcus AN= $\sqrt{2ab}$, consequenter NM=AN-AM= $\sqrt{2ab}-\sqrt{2ax}$, cujus differentiale
N tiale

(a) Princip. Lib. I. Sect. X. Prop. 50. & seq.
& Lib. 2. Sect. VI. Prop. 24. & seq.

Tab. XVI. tiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1/2}dx\sqrt{2a}$
 $= -dx\sqrt{a}:\sqrt{2x}.$

Fig. 154.

Sit porro gravitas $=g$, massa $=m$.
 Quoniam gravitas uniformis, seu constans per hypoth. erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP=b-x$ acquisita $=\sqrt{2g(b-x)}:\sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempusculum dt , directe ut spatium seu arculus mM , & reciproce ut celeritas in m acquisita (§. 39); consequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per NM}} \\ = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}} \\ z = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

Est vero $-b dx : 2\sqrt{(bx-x^2)}$ Elementum arcus QR , radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ descripti, cujus sagitta $QP=b-x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analys. infin.*). Ergo $-dx:\sqrt{(bx-x^2)} =$ Elemento arcus AR per $\frac{1}{2}AQ$ diviso. Fiat itaque

$$\frac{-b dx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz \\ \text{erit } \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{2dz}{b} \\ \text{adeoque } dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}} \\ = \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}} \\ z = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}} \\ = \frac{\text{arc. QR. } \sqrt{AB.}\sqrt{m}}{AQ. \sqrt{g}}$$

Tab. XVI. Fig. 154. Quodsi jam fiat $QP=QA$, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA , eritque t tempus dimidiæ oscillationis; hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore

$$t = \frac{QRA. \sqrt{AB.}\sqrt{m}}{AQ. \sqrt{g}}$$

Patet, $QRA:AQ$ designare rationem semiperipheriæ ad diametrum, & \sqrt{AB} esse ut tempus descensus perpendicularis per AB seu altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m , seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galileana* (§. 114), erunt

Theorema: Oscillationes pendulorum in arcibus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem seu circuli diametrum, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per diametrum, ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA LIX.

405. Tempora sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum, atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l ; tempora oscillationum T & t ; massæ M & m , gravitates G & g ; erit

$$T = \frac{QRA. \sqrt{2M. L}}{AQ. \sqrt{G}} \\ \& t = \frac{QRA. \sqrt{2m. l}}{AQ. \sqrt{g}} \quad (\S. 404), \text{ adeoque}$$

Tit.

Tab. XVI. Fig. 154.

$$T:t = \frac{QRA.\sqrt{2M.L}}{AQ.\sqrt{G}} : \frac{QRA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m.l}}{\sqrt{g}} (\S. 181 \text{ Arithm.})$$

$$= \sqrt{M.L}.\sqrt{g} : \sqrt{m.l}.\sqrt{G} (\S. 178 \text{ Arithm.}). \text{ Q. e. d.}$$

THEOREMA LX.

406. Quantitates materiae in corporibus funependulis quorum longitudines aequales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in Theoremate praecedente; erit

$$T:t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

adeoque $T^2:t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ ($\S. 260$ Arithm.)

Et hinc $T^2G:t^2g = ML:ml$ ($\S. 184$ Arithm.).

Quare cum sit $L=l$ per hypoth. erit $T^2G:t^2g = M:m$ ($\S. 183$ Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

407. Quodsi fuerit $T=t$; erit $G:g = M:m$; hoc est, si tempora sunt aequalia, quantitates materiae sive massae sunt ut gravitates.

COROLLARIUM II.

408. Quodsi fuerit $G=g$, erit $T^2:t^2 = M:m$ ($\S. 183$ Arithm.), hoc est, si gravitates sunt aequales, massae sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM III.

409. Quodsi fuerit $M=m$; erit $T^2G = t^2g$ ($\S. 151$ Arithm.), adeoque $G:g = t^2:T^2$;

T^2 ($\S. 299$ Arithm.), hoc est, si massae sunt aequales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM IV.

410. Quoniam $T^2G:t^2g = ML:ml$; vi demonstr. praef. si sit $T=t$ & $M=m$, erit $G:g = L:l$ ($\S. 183$ Arithm.), hoc est, si & tempora, & massae aequalia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM V.

411. Et quia $T^2G:t^2g = ML:ml$; erit etiam $T^2Gl:t^2gL = M:m$ ($\S. 185. 178$ Arithm.), hoc est massae pendulae sunt ut quadrata temporum & gravitates directae, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION I.

412. His Principiis usus est NEWTONUS (a) in comparandis corporibus inter se, quoad quantitatem materiae in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis, se semper invenisse fatetur quantitatem materiae in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis.

COROLLARIUM VI.

413. Quodsi fuerit $M=m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ ($\S. 151$ Arithm.); consequenter $T^2:t^2 = gL:Gl$ ($\S. 299$ Arithm.), adeoque $T:t = \sqrt{g}.\sqrt{L}:\sqrt{G}.\sqrt{l}$ ($\S. 260$ Arithm.); hoc est, si massae funependulorum fuerint aequales, tempora sunt in ratione composita ex directa longitudinum pendulorum & reciproca gravitatum subduplicata.

COROLLARIUM VII.

414. Quodsi fuerit $M=m$ & $T=t$, erit $gL=Gl$ ($\S. praef.$); consequenter $G:g = L:l$, hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM VIII.

415. Quodsi fuerit $M=m$ & $L=l$, erit $T^2G = t^2g$ ($\S. 413$); consequenter $T^2:t^2 = g$

N 2

= g

(a) Vid. Princip. Lib. 2. Prop. 24. Cor. 7 p. m. 297.

$=g:G$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T:t = \sqrt{g}:\sqrt{G}$ (§. 260 *Arithm.*); hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM IX.

416. Quodsi fuerit $M=m$ & $G=g$, erit $T:l = t:L$ (§. 413) consequenter $T^2:t^2 = L:l$, adeoque $T:t = \sqrt{L}:\sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLION II.

417. Cum in pendulis vis ponderis, quæ sollicitatur, in uno puncto concentrata concipitur, (§. 377), neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat; si pondera massis proportionalia sunt, adeoque æquales quantitates materiæ seu massæ æquales a gravibus eodem modo animantur, nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde, in hac naturæ consentanea hypothese, valent quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.

THEOREMA LXI.

418. Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directâ subduplicata gravitatum massas animantium.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex

rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directâ subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N:n = \sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}:\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

419. Quodsi fuerit $m=M$, erit $N:n = \sqrt{l}.\sqrt{G}:\sqrt{L}.\sqrt{g}$, hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directâ subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM II.

420. Quodsi fuerit $M=m$ & $L=l$, erit $N:n = \sqrt{G}:\sqrt{g}$; hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directâ virium pendula agitantium.

SCHOLION I.

421. Si cui libuerit, is ex analogia $N:n = \sqrt{G}.\sqrt{l}.\sqrt{m}:\sqrt{g}.\sqrt{L}.\sqrt{M}$ plura Theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.

SCHOLION II.

422. Quæ hætenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum ex quo pondus suspenditur gravitate careat, & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in praxi filo utendum est tenui, & globo exiguo, sed ex materia

materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstratae valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum: perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enim-

vero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire Centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus Caput sequens.

C A P U T X.

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO XLVII.

423. **C**entrum oscillationis est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO XLVIII.

425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA LXII.

Tab. IV. Fig. 48. 426. Si plura pondera D, F, H, B , quorum gravitas in punctis D, F, H, B , concipitur collecta, in virga inflexili AB eandem inter se & a puncto suspensionis A distantiam constanter conservent, & circa A oscillationes suas persiciat pendulum hoc modo compositum; prodibit

distantia Centri oscillationis O a puncto suspensionis A , si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur. Tab. IV. Fig. 48.

DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus dD, fF, gH & bB , distantis a puncto suspensionis Ad, Af, Ag, Ab proportionales. Patet adeo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse Centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC , summa ponderum in Centro oscillationis O applicata arcum OP describet (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B , quo in sum-

Tab. mam eorundem O, nisi retinaculum AB
 IV. obstaret; singula per spatiola ipsi OP
 Fig. 48. æqualia transferrentur, quia motus in
 instanti est uniformis, adeoque celeritates
 spatiolis proportionales (§. 33). Quare si KN
 per P ipsi DB parallela ducatur; DK, FL, HM,
 BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant
 exponent celeritates à ponderibus D, F, H & B
 in instanti acquirendas, si libere descenderent.
 Gravitās vero cum solo nisu agat (§. 4), vis
 mortua est (§. 9); consequenter vires motuum
 acceleratrices sunt in ratione composita ponderum
 & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in E
 vis ut D. EK, & in F vis ut F. GL; contra vero
 in H accrescit vis ut H. MI, & in B vis ut B. NC;
 seu quod perinde est, ob decrementum virium in
 D & F vi in B aliquid accrescit, sed incrementum
 in H accremento in B rursus aliquid detrahit. Cum
 autem sit vis in D ad vim in B, uti AB ad AD;
 vis in F ad vim in B, uti AB ad AF; vis denique
 in H ad vim in B, uti AB ad AH (§. 153); reperiuntur
 accrementa virium in B ut (D. EK. AD): AB, & (F. GL. AF):
 AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H. MI. AH): AB.
 Habemus adeo

$$B.NC = (D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH): AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF.$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos, E, G, I, C

(§. 38 *Analys. infinit.*) & EG = DF, Tab. GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt IV. EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*); consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB; erit

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum sit

$$\begin{aligned} H.AH^2 &= H.HA.HO + H.HA.AO \\ B.AB^2 &= B.BA.BO + B.BA.AO \\ D.OA.DA &= D.AD.AD + D.OD.AD \\ F.OA.FA &= F.FA.FA + F.OF.FA. \end{aligned}$$

Si utrinque addantur in æquatione inventa D.DA² + F.FA² + H.AO.HA + B.AO.BA, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}$$

Q. e. d.

SCHOLIUM I.

427. Quodsi non evidens videatur, esse $AB^2 = AB.BO + AB.AO$, & $HA^2 = HA.HO + HA.AO$; itemque $OA.DA = AD.AD + DA.OD$, & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit $HA = HO + OA$ (§. 86. Arithm.), erit $HA^2 = HO^2 + 2HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arithm.). Et quoniam $HA = AO + OH$ (§. 86. Arithm.); erit $HA.HO = (AO + OH)HO = HO.OA + HO^2$, & $HA.AO = (AO + OH)AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 92

Tab. (S. 93 Arithm.); consequenter $HA^2 = HA$.
 IV. $HO + HA$. AO (S. 87 Arithm.). Similiter
 Fig. cum sit $AB^2 = AO^2 + 2 AO.OB + OB^2$, &
 Fig. 48. $AB.OB = (AO + OB) OB = AO.OB +$
 OB^2 , & $AB.AO = (AO + OB) AO = AO^2$
 $+ AO.OB$; erit $AB^2 = AB.OB + AB.AO$.
 Et quia $OA = AD + OD$ (S. 86 Arithm.),
 erit $OA.DA = (AD + OD) DA = AD$
 $.AD + AD.OD$ (S. 93 Arithm.). Similiter
 quia $AO = AF + FO$; erit $OA.FA = AF$
 $.AF + AF.FO$.

SCHOLIUM II.

428. Joannes BERNOULLI (a) ex simplicissimis principiis mechanicis Theoriam de Centro oscillationis ab HUGENIO (b) inventam, & à Jacobo BERNOULLI Fratre (c) ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Opera igitur pretium nos facturos existimamus, si Viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.

PROBLEMA LXIII.

429. Determinare Centrum oscillationis in pendulo composito.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. Sit virga inflexilis AL gravitatis ex-
 XVI. pers, onusta ponderibus quotcunque
 Fig. C, D &c. in distantis quotcunque AC ,
 455. AD &c. ab axe oscillationis A ; determinandum est Centrum oscillationis Z , seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C ; D vero massa ponderis in D : quæ pondera animantur à gravitate naturali G ; erit pondus in $C = G.C$, & momentum

ejus $G.C.AC$, quod vim agitativam penduli appellat BERNOULLIUS. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in $D = G.D.AD$ & ita porro, si plura fuerint pondera (S. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P , & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, adeoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates, seu vires acceleratrices massarum, sint ut celeritates quas producant in instanti; celeritates autem, in tempusculo infinite parvo quo per angulum infinite parvum ex AL in A (L) movetur pendulum, sint ut C (C) ad P (P) (S. 33), consequenter ut AC ad AP (S. 138, 412 Geom.); erit ut AC ad AP , ita gravitas in C ad fictitiam in P , a qua animandum pondus in P in locum ipsius C subrogandum; consequenter

gravitas in $P = \frac{AP.G}{AC}$. Quod si massa hujus ponderis ponatur P ; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$, & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$,

quod cum sit æquale momento ponderis in C , erit $\frac{G.P.AP^2}{AC} = G.C.AC$.

$$\text{Unde } P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorsus modo reperitur pondus in P substituendum ponderi in D :

nimirum massa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$; gra-

vititas qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$.

Est

(a) In Actis Erudit. A. 1714. p. 257. & seqq.

(b) In Horolog oscillat. Part. 4. f. 91. & seqq.

(c) In Actis Erudit. A. 1691. P. 317.

Tab. XVI. Est itaque pondus, quod in P substitui debet pro pondere, quod

Fig. 155. est in C, $\frac{AP \cdot G}{AC} \times \frac{C \cdot AC^2}{AP^2} = \frac{AC \cdot C \cdot G}{AP}$

& pondus, quod pro D in P substituen-
dum = $\frac{AP \cdot G}{AD} \times \frac{D \cdot AD^2}{AP^2} = \frac{AD \cdot D \cdot G}{AP}$

Quoniam hæc pondera a gravitati-
bus particularibus animantur; inve-
nienda est porro gravitas communis
quæ animat uniformiter massarum seu
corporum aggregatum.

Sit ea gravitas = x : erit

$$\frac{AC^2 \cdot Cx}{AP^2} + \frac{AD^2 \cdot Dx}{AP^2} \&c.$$

$$= \frac{AC \cdot C \cdot G}{AP} + \frac{AD \cdot D \cdot G}{AP} \&c.$$

$$\frac{AC^2 \cdot Cx + AD^2 \cdot Dx + \&c.}{= (AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.) AP \cdot G}$$

$$x = \frac{(AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.) AP \cdot G}{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.}$$

hoc est, gravitas communis reperitur
dividendo ponderum summam per
summam massarum.

Cum adeo pendulum AP, quod
animatur a gravitate fictitia

$$\left(\frac{AC \cdot C + AD \cdot D}{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D} \&c. \right) AP \cdot G \text{ sit}$$

composito AL isochronum, pendula
vero simplicia isochrona habeant gra-
vitates longitudinibus proportionales
(§. 414); longitudo penduli simplicis
AZ fictitio AL isochroni & a gravitate
naturalis G animandi reperitur, si fiat:

$$\left(\frac{AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.}{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.} \right) AP \cdot G : G = AP : AZ$$

Erit enim (§. 178, 181, 183 *Arithm.*) Tab. XVI.
(AC. C + AD. D &c.): (AC². C + AD². D &c.) = 1: AZ
Fig. 155.

consequenter

$$AZ = \frac{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.}{AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.}$$

quæ est regula *Hugeniana* (a) in
Propositione præcedente demonstra-
ta; sed in eo casu, ubi pondera, quæ
pendulum componunt sunt in eadem
recta, aut saltem in eodem plano, in
quo est axis oscillationis.

Ponamus jam pondera C, D &c. Tab. XVI.
non esse in eadem recta, seu in pla-
no in quo est axis oscillationis, sed
quomodocunque in plano quodam
verticali circa axem A oscillante dispo-
sita, ita tamen ut situm non mutant.
Sit AM linea verticalis plani & per
centrum suspensionis A ducatur AH
ad verticalem AM normalis, adeo-
que horizontalis (§. 210), radio AC
describatur arcus cC, & ex C demit-
tatur perpendicularis CK ad AH; erit
gravitas absoluta in C ad gravitatem
respectivam qua impellitur radius AC,
in ratione AC ad AK (§. 272)
sive RC, adeoque

$$AC : RC = G : \frac{G \cdot RC}{AC}$$

$$\text{Est ergo vis agitativa in C} = \frac{G \cdot RC}{AC}$$

Eodem modo reperitur gravitas
respectiva in D = $\frac{G \cdot DS}{AD}$. Et, si gra-
vitas

(a) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oscillat. f. 98.

Tab. XVI. Fig. 56. vitas absoluta in $P=M$, respectiva
ibidem $\frac{M. PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C , idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp , fore

$$AC:AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

adeoque $AC^2:AP^2 = G.RC:M.QP$ (§. 185 *Arithm.*).

$$AP^2.G.RC = AC^2.M.QP$$

$$\frac{AP^2.G.RC}{AC^2.QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.G.DS}{AD^2.QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi $= T$. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C , in cujus locum surrogatur; erit

$$RC.C.G = \frac{T.AP^2.G.RC.QP}{AC^2.QP}$$

$$C = \frac{T.AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

$$\& \text{gravitate } N \text{ animandi} = \frac{AD^2.D}{AP^2}$$

Tab. XVI. Fig. 156.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T.M + V.N + \&c.}{T + V}$;

vi antecedentium cum sit

$$T.M = \frac{C.AC^2.AP^2.G.RC}{AP^2.AC^2.QP} = \frac{C.G.RC}{QP}$$

$$\& V.N = \frac{D.AD^2.AP^2.G.DS}{AP^2.AD^2.QP} = \frac{D.G.DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.C + AD^2.D}{AP^2}$$

$$\text{erit } \frac{T.M + V.N}{T + V}$$

$$= \frac{AP^2.C.G.RC + AP^2.D.G.DS}{QP.AC^2.C + QP.AD^2.D}$$

$$= \frac{C.RC + D.DS}{C.AC^2 + D.AD^2} \times \frac{AP^2.G}{QP}$$

Habemus adeo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP , ut sit composito isochronum in instanti, quia RC , SD &c. variables in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur: $\frac{C.RC + D.DS}{C.AC^2 + D.AD^2} \times \frac{AP^2.G}{PQ} : G = AP:AZ$
($C.RC + D.DS$) $AP : (C.AC^2 + D.AD^2) QP = 1 : AZ$ (§. 185 *Arithm.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{C.AC^2 + D.AD^2}{C.RC + D.DS} \times \frac{QP}{AP};$$

quæ est longitudo penduli fictitii in instanti composito isochroni, ob RC , SD , QP variables.

O

Sit

Tab. XVI. Sit jam in F Centrum gravitatis, erit ob parallelas FE & PQ (§. 268 Fig. 156. *Geom.*).

$$PQ : AP = FE : AF$$

$$\text{adeoq. } AF = \frac{AP \cdot FE}{PQ} = \text{quantit. const.}$$

Erit etiam, ob Centrum gravitatis in F (§. 153)

$$(C+D)EF = RC \cdot C + SD \cdot D;$$

adeoque si AP transit per Centrum gravitatis F, hoc est, si sit *Linea centri* phrasi *Hugeniana*; erit

$$AZ = \frac{C \cdot AC^2 + D \cdot DA^2 \&c.}{(C+D \&c.) AF}$$

Atque hæc est regula *Hugeniana* pro inveniendò centro oscillationis in pendulo quocunque composito, quam ipsius verbis enunciat sequens

Theorema. Si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam. Centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, five distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

COROLLARIUM I.

Tab. 430. Si pondera omnia fuerint æqualia, IV. nempe $D = F = H = B \&c. = P$ & numerus ponderum n ; erit

$$AO = \frac{P \cdot DA^2 + P \cdot FA^2 + P \cdot HA^2 + P \cdot BA^2 \&c.}{nP \cdot AR}$$

$$\text{hoc est } AO = \frac{DA^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \&c.}{nAR}$$

COROLLARIUM II.

431. Quoniam D. AD est momentum ponderis D (§. 153); si momenta considerentur ut pondera ad rectam AB applicata, centrum oscillationis coincidet cum Centro gravitatis communi horum ponderum (§. 429), adeoque momentis in ponderum locum surrogatis eodem modo determinatur centrum oscillationis, quo supra Centrum gravitatis commune investigavimus (§. 157.)

COROLLARIUM III.

432. Si figura plana circa axem RI ita oscilletur, ut is semper maneat in plano oscillante seu (quod perinde est) ordinatis figuræ MN constanter sit parallelus; singulæ pondusculi cujuscunque MN partes ab axe oscillationis RI æqualiter distant (§. 81 *Geom.*), nec aliter oscillatur e.gr. particula G ac si in puncto L suspenderetur. Est adeo momentum integri pondusculi MN nm (si fuerit $AP = LG = x$, $MN = 2y$, $Pp = dx$) $= 2yx dx$, consequenter distantia centri oscillationis ab axe $= 2fyx^2 dx : 2fyx dx$ (§. 157.) $= fyx^2 dx : fyx dx$. Quodsi adeo ex æquatione speciali ad figuram aliquam datam valor ipsius y substituitur, & elementa debita ratione integrentur; prodibit distantia centri oscillationis ab axe in terminis ordinariis.

PROBLEMA LXII.

433. Determinare centrum oscillationis in linea recta AB. Tab. Fig.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $AD = x$; erit particula infinite parva $DP = dx$, momentum hujus pondusculi $x dx$; consequenter distantia centri oscillationis in parte AD a puncto suspensionis A $= \int x^2 dx : \int x dx = \frac{1}{3} x^3 : \frac{1}{2} x^2 = \frac{2}{3} x$. Quodsi pro x substituitur a , prodibit distantia centri oscillationis in recta integra AB $= \frac{2}{3} a$.

SCHO-

SCHOLIUM.

434. Hac ratione definitur centrum oscillationis filii ferrei circa alterum extremum oscillantis.

PROBLEMA LXIII.

Tab. I. Fig. 9. 435. Determinare centrum oscillationis rectanguli RIHS in puncto medio A lateris RI suspensi & circa axem RI oscillantis.

RESOLUTIO.

Si fuerit $RI = SH = a$, $AP = x$; erit $Pp = dx$ & elementum areae, consequenter unum pondusculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 432.) $\int ax^2 dx : \int ax dx = \frac{1}{3} ax^3 : \frac{1}{2} ax^2 = \frac{2}{3} x$ indefinite exprimit distantiam centri oscillationis ab axe oscillationis in segmento RCDI. Quodsi igitur pro x substituatur integri rectanguli altitudo $RS = b$; prodibit distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{2}{3} b$.

PROBLEMA LXIV.

436. Determinare centrum oscillationis trianguli aquicruri SAH circa axem RI basi SH parallelum oscillantis.

RESOLUTIO.

Sit altitudo $AE = a$, $AP = x$, $EH = \frac{1}{2} b$, $PV = y$; erit (§. 268 Geom.)

$$AP : PV = AE : EH$$

$$x : y = a : \frac{1}{2} b$$

$$ay = \frac{1}{2} bx$$

$$y = bx : 2a$$

$$\text{Hinc } \int yx^2 dx = \frac{\int bx^3 dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yx dx = \frac{\int bx^2 dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

$$\& \frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8} x = \frac{3}{4} x.$$

Quodsi pro x substituatur altitudo Tab. I. integra $AE = a$, prodibit distantia Fig. 9. centri oscillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A $= \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} AE$.

PROBLEMA LXV.

437. Determinare centrum oscillationis trianguli aquicruri SAH circa basin SH oscillantis.

RESOLUTIO.

Sint omnia; ut in Problemate præcedente, erit $PE = a - x$. Unde

$$\begin{aligned} \int yx^2 dx &= \frac{\int bx dx}{2a} (a-x)^2 = \int \left(\frac{1}{2} abx dx - bx^2 dx + \frac{bx^3 dx}{2a} \right) = \frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a} \\ \int yx dx &= \frac{\int bx dx}{2a} (a-x) = \int \left(\frac{1}{2} bx dx - \frac{bx^2 dx}{2a} \right) = \frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a} \\ \frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx} &= \left(\frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a} \right) : \left(\frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a} \right) \\ &= \left(\frac{24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a} \right) : \left(\frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a} \right) \\ &= \frac{12a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8bx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x} \end{aligned}$$

Habemus adeo distantiam centri oscillationis ab axe in segmento SZVH.

Quodsi pro x substituatur a , prodibit distantia centri oscillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2) : (6a - 4a) = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AE$.

PROBLEMA LXVI.

Tab. I. 438. Determinare centrum oscillationis in triangulo aquicruro SAH, quod filo inflexile & gravitatis experte Ah suspensum circa axem ri basi SH parallelum oscillatur.

RESOLUTIO.

Sit $Ah = c$, reliqua sint ut supra (§. 436): erit $Pb = c + x$. Unde

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \int \frac{(c+x)^2 b x dx}{2a} = \int \left(\frac{bc^2 x dx}{2a} + \frac{bcx^2 dx}{a} + \frac{bx^3 dx}{2a} \right) = \frac{bc^2 x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} \\ &+ \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2 x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a} \\ &= \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x dx &= \int \frac{(c+x) \cdot b x dx}{2a} = \int \left(\frac{bcx dx}{2a} + \frac{bx^2 dx}{2a} \right) \\ &= \frac{bsx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a} = \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a} \end{aligned}$$

$$\frac{\int x^2 dx}{\int x dx} = \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a} : \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a} = \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{6bcx^2 + 4bx^3}$$

$$= \frac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x}, \text{ qui est valor di-}$$

stantiæ centri oscillationis ab axe ri in segmento trianguli AZV.

Quodsi pro x substituatur trianguli altitudo $AE = a$, prodibit distantia centri oscillationis ab axe oscillationis ri in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

SCHOLIUM.

439. Ex unico hoc exemplo intelligitur, Tab. I. quid in casu simili aliarum figurarum factu Fig. 9. opus sit.

PROBLEMA LXVII.

440. Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem RI basi SH parallelum oscillantibus.

Quoniam (§. 163)

$$\int y x dx = \int x^{(r+n):n} dx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$$

$$\text{erit } \int y x^2 dx = \int x^{(r+2n):n} dx = \frac{n}{r+3n} x^{(r+3n):n}$$

$$\& \frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx} = \frac{(r+2n)x^{(r+3n):n}}{(r+3n)x^{(r+2n):n}} = \frac{r+2n}{r+3n} x.$$

E. gr. In parabola Apolloniana, $r = 1$, $n = 2$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{5}{7} AE$.

In paraboloido cubicali, $r = 1$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{7}{10} AE$.

In paraboloido biquadratico, $r = 1$, $n = 4$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{9}{13} AE$.

In curva ad quam $ax^2 = y^2$, $r = 2$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{8}{11} AE$.

In curva ad quam $a^2 x^3 = y^5$, $r = 3$, $n = 5$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{13}{18} AE$.

PROBLEMA LXVIII.

441. Invenire centrum oscillationis in parabola SAH circa basin SH agitata.

RESOLUTIO.

Sit $AE = b$, $AP = x$, $MP = y$; erit $y dx = x^{\frac{1}{2}} dx$, $EP = b - x$ & distantia centri oscil-

Tab. I. oscillationis = $\int x^{1:2} dx (b-x)^2$: $\int x^{1:2} dx (b-x)$.

Fig. 9. Quoniam itaque $\int x^{1:2} dx (b-x)^2$
 $= \int b^2 x^{1:2} dx - \int 2bx^{3:2} dx + \int x^{5:2} dx$
 $= \frac{2}{3} b^2 x^{3:2} - \frac{4}{5} bx^{5:2} + \frac{2}{7} x^{7:2}$
 $= \frac{70b^2 x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2}}{105}$ &

$$\int x^{1:2} dx (b-x) = \int bx^{1:2} dx - \int x^{3:2} dx$$

$$= \frac{2}{3} bx^{3:2} - \frac{2}{5} x^{5:2} = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15}$$

erit distantia centri oscillationis

$$= \frac{15 (70b^2 x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2})}{105 (10bx^{3:2} - 6x^{5:2})}$$

$$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2}{35b - 21x}$$

Quod si fiat $x=b$, erit distantia centri oscillationis totius parabolæ SAH à basi SH.

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$

$$= \frac{8b^2}{14b} = \frac{4}{7}b = \frac{4}{7}AE.$$

Tab. I.
Fig. 9:

PROBLEMA LXIX.

442. Invenire centrum oscillationis in infinitis parabolis SAH circa basim SH agitatis.

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis

$$y^m = x \quad (\S. 519 \text{ Analys.})$$

$$y = x^{1:m}$$

$$ydx = x^{1:m} dx$$

$$x^2 y dx = x^{1:m} dx (b-x)^2$$

$$= x^{1:m} dx (bb - 2bx + xx)$$

$$= b^2 x^{1:m} dx - 2bx^{1+1:m} dx + x^{2+1:m} dx$$

$$\int x^2 y dx = \frac{m}{m+1} b^2 x^{1+1:m} dx - \frac{2m}{2m+1} bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1} x^{3+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2 x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int x y dx = \int bx^{1:m} dx - \int x^{1+1:m} dx = \frac{m}{m+1} bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1} x^{2+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2 x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^2(2m+1)^2 x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$

$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)xx}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quod si fiat $x=b$, cum sit

$$(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$$

$$(2m+2)(3m+1) = 6m^2 + 8m + 2$$

$$(m+1)(2m+1) = 2m^2 + 3m + 1$$

$$(m+1)(3m+1) = 3m^2 + 4m + 1$$

reperietur distantia centri oscillatio-

nis in infinitis parabolis a basi.

$$SH = \frac{2m^2 b^2}{(3m^2 + m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1} AE.$$

Sit jam $m=2$, prodibit eadem distantia $= \frac{4}{7}AE$, ut ante (§. 441).

LEMMA II.

Tab. 443. Si in triangulo quocunque
XVI. MAN ducitur utcumque recta AP;
Fig. erit $AM^2 \times PN + AN^2 \cdot PM = AP^2$.
157. $MN + PM \cdot PN \cdot MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o = P$ (§. 156 Geom.).
& ang. $MAD = MND$ (§. 315 Geom.),
erit $AM:AP = ND:NP$. (§. 267 Geom.).
adeoque $AM \cdot NP = AP \cdot ND$ (§. 297
Arithm.).

Similiter $u = y$ (§. 156 Geom.). &
ang. $ANM = ADM$ (§. 315 Geom.),
consequenter (§. 267 Geom.) $AN:AP$
 $= MD:MP$; adeoque $AN \cdot MP = AP \cdot$
 MD (§. 297 Arithm.):

Est vero $MN \cdot AD = AM \cdot ND +$
 $AN \cdot MD$ (§. 324 Analys.).

Quare cum sit $AD = AP + PD$
(§. 86 Arithm.); erit etiam $MN \cdot AP$
 $+ MN \cdot PD = AM \cdot ND + AN \cdot MD$,
consequenter $MN \cdot AP^2 + MN \cdot PD \cdot$
 $AP = AM \cdot ND \cdot AP + AN \cdot MD \cdot AP$
(§. 93 Arithm.). Quare cum sit, per
demonstrata

$$ND \cdot AP = AM \cdot NP$$

$$MD \cdot AP = AN \cdot MP$$

atque $AP \cdot PD = MP \cdot PN$ (§. 381
Geom.); erit $MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot$
 $PN = AM^2 \cdot NP + AN^2 \cdot MP$. Q. e. d.

SCHOLION.

444. Utimur hoc Lemmate in determinan-
do centro oscillationis in figuris, quæ in latus
agitantur, hoc est, circa axem ad planum
figuræ normalem. Ejus enim determinatio
difficilior est in hoc casu, quam in præcedente,
ubi agitatio fit in planum: quemadmodum vi-
dere est apud HUGENIUM (a). Calculum dif-

(a) In Horolog. oscillat. part. 4. f. 91. & seqq.

ferentialem ad hoc negotium applicavit Jaco-
bus BERNOULLI (b). Nos primum regulam
generalem demonstrabimus, eamque deinde ad
Problemata specialia applicabimus, quemad-
modum in casu præcedente factum.

PROBLEMA LXX.

445. Determinare centrum oscilla- Tab.
tionis in figuris in latus agitatis. XVI.

RESOLUTIO.

Fig.
158.

Ponamus Figuram AMN agitari in
latus, hoc est, ita ut planum figuræ sit
ad axem oscillationis normale. Con-
sideremus primum duo puncta M & N
tanquam pondera æqualia, aut suman-
tur pro punctis potius rectarum MP &
PN portiones infinite parvæ; erit eorum
centrum gravitatis commune, ob MP
 $= PN$, in P (§. 145), atque adeo pon-
dus in P $= M + N$ (§. 125), consequen-
ter distantia centri oscillationis penduli
hujus compositi $= \frac{M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2}{(M + N) AP}$

(§. 429). Est vero $M = N$ & $MP = PN$
per hypoth. Ergo distantia centri oscil-
lationis $= \frac{PN \cdot AM^2 + PM \cdot AN^2}{(M + N) AP}$.

Est vero $PN \cdot AM^2 + PM \cdot AN^2 =$
 $MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot PN$ (§. 443),
consequenter $M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2 =$
 $MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot PN$, hoc est, ob
 $M = N$, & $PM = PN$, adeoque MN
 $= PM + PN$, $\frac{M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2}{P \cdot AP}$.

$= \frac{P \cdot AP^2 + P \cdot MP \cdot MP}{P \cdot AP}$. Jam cum

recta MN in innumera istiusmodi pon-
duscula

(b) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1703.
p. m. 96. 327.

Tab. XVI. & N = dp ; si PM fumatur variabilis & dicatur y , AP vero x , summa pondusculorum duorum M & N = dp ; erit pro duobus pondusculis distantia centri oscillationis

$$\frac{x^2 dp + y^2 dp}{x dp}; \text{consequenter pro omnibus pondusculis secundum rectam MN constitutis distantia centri oscillationis} = \frac{2 \int x^2 dp + 2 \int y^2 dp}{2 \int x dp}$$

$$= \frac{\int x^2 dp + \int y^2 dp}{\int x dp}.$$

Enimvero cum ponduscula dp sint parallelogrammula, quorum latitudo est differentiale dy , altitudo differentiale abscissæ, adeoque $dp = dx dy$ & dx respectu dy constans est; erit $\int dp = \int dx dy$. Similiter quia y variabilis est respectu x , quod ejus intuitu pro constante habetur; erit $\int x^2 dy = x^2 y$ & $\int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3$ & $\int x dy = xy$, consequenter si jam y fumatur pro integra semiordinata PM; erit distantia centri oscillationis in integra figura plana oscillante MAN = $\frac{\int x^2 y dx + \int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int x y dx}$.

Non alia igitur re opus est, quam ut pro y ex æquatione ad curvam speciali substituaturs valor ipsius y & y^2 .

COROLLARIUM I.

446. $\frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx}$ exprimit distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata (S. 432). Quare si distantia centri oscillationis in figura in latus agitata desideretur; ad illam nonnisi adjicienda $\int \frac{1}{3} y^3 dx$, ubi data vel jam inventa præsupponitur.

COROLLARIUM II.

447. Liquet etiam hinc, distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, siquidem ita visum fuerit, una reperiri posse.

PROBLEMA LXXI.

448. Determinare centrum oscillationis rectanguli RIHS ex puncto medio A lateris RI suspensi & in latus agitati. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si fuerit RI = SH = a , AP = x , erit distantia centri oscillationis ab axe sive a puncto A pro agitatione in planum = $\frac{2}{3} x$, seu pro integro rectangulo = $\frac{2}{3} b$, & ob $y = a$, $\int x y dx = \int a x dx = \frac{1}{2} a x^2$ (S. 435) & $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{1}{3} \int a^3 dx = \frac{1}{3} a^3 x$. Quare $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int x y dx}$, seu particula adjicienda ut prodeat distantia centri oscillationis rectanguli in latus agitati (S. 446), $= \frac{2 a^3 x}{3 a x^2} = \frac{2 a^2}{3 x}$, seu, si porro fiat $x = b$, $= \frac{2 a^2}{3 b}$. Est igitur distantia quaesita = $\frac{2}{3} b + \frac{2 a^2}{3 b}$.

PROBLEMA LXXII.

449. Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri SAH ex vertice suspensi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE = a , AP = x , EH = $\frac{1}{2} b$, PV = y ; erit distantia centri oscillationis in planum agitati trianguli = $\frac{3}{4} x$, aut totius trianguli = $\frac{3}{4} a$, $\int y x dx = \frac{b x^2}{6 a}$ & $y = \frac{b x}{2 a}$ (S. 436). Quare

Tab.I.
Fig. 9. Quare $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{b^3 x^3 dx}{24a^3} = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$,

consequenter particula adjicienda $\int \frac{1}{3} y^3 dx$

$$= \frac{b^3 x^4}{96a^3} : \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3 x^4}{96a^3 bx^3} = \frac{b^2 x}{16a^2}.$$

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri ex vertice suspensi & in latus agitati $= \frac{3}{4}x + \frac{b^2 x}{16a^2}$.
Quodsi fiat $x = a$; erit distantia centri oscillationis trianguli æquicruri $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA LXXIII.

450. Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri SAH in medio basis SH suspensi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit $PE = a - x$, $\int yx dx = \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$, & distantia centri

oscillationis trianguli in planum agitati $= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$, aut integri trianguli $= \frac{1}{2}a$. Sed $\int \frac{1}{3} y^3 dx$

$= \frac{b^3 x^4}{96a^3}$ (§. 449). Ergo pars addenda

$$= \frac{24ab^3 x^4}{96a^3(6abx^2 - 4bx^3)} = \frac{3b^2 x^2}{72a^3 - 48a^2 x}$$

consequenter, si fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{3a^2 b^2}{72a^3 - 48a^2} = \frac{3b^2}{24a} = \frac{b^2}{8a}$.

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri in medio basis suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$.

PROBLEMA LXXIV.

451. Determinare centrum oscillationis parabola ex vertice suspensa & in latus agitata.

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{5}{7}x$, & si parameter $= 1$, $y^2 = x$ adeoque $y^3 = x^{3/2}$ & $\int yx dx = \frac{2}{5}x^{5/2}$ (§. 440). Quare cum porro fit $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{1}{3} x^{3/2} dx = \frac{2}{15}x^{5/2}$; erit pars adjicienda $= \frac{2}{15}x^{5/2} : \frac{2}{5}x^{5/2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Est nempe parameter unitas, adeoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ si dicatur b , erit pars adjicienda $= \frac{1}{3}b$. Habemus adeo distantiam centri oscillationis a vertice parabola in latus agitatae $= \frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$.

PROBLEMA LXXV.

452. Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice suspensis.

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis, distantia centri oscillationis a vertice est

$$\frac{r+2n}{r+3n} x, \quad \int yx dx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$$

& quia $y = x^{r:n}$, $y^3 = x^{3r:n}$ (§. 439).

$$\text{Quoniam itaque } \int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{n}{3(3r+n)}$$

$$x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)} x^{(3r+n):n};$$

erit pars adjicienda

$$= \frac{n}{9r+3n} x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$$

$$= \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(2r-n):n}. \quad \text{Est itaque di-}$$

stan-

tantia centri oscillationis in infinitis parabolis aliisque curvis in latus agitatis

$$\frac{r+2n}{r+3n} x + \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(2r-n):n}.$$

Quoniam in parabola Apolloniana $r=1$, $n=2$, erit $\frac{r+2n}{r+3n} = \frac{1+4}{1+6} = \frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n} = \frac{1+4}{9+6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n} = \frac{2-2}{2} = 0$, adeoque $x^{(2r-n):n} = x^0 = 1$. Est adeo, in parabola Apolloniana, distantia centri oscillationis a vertice $\frac{5}{7} x + \frac{1}{3} b$, si nempe parameter $= b$, prorsus ut in Problemate precedente (451).

PROBLEMA LXXVI.

Tab.I. 453. Determinare centrum oscillationis parabola ex dimidia basi suspensae & in latus agitata.

RESOLUTIO.

In parabola SAH circa basin SH in planum agitata distantia centri oscillationis a basi est $\frac{4}{7} b$, seu $\frac{4}{7} AE$ & si parameter $= 1$, $y^3 = x^{3:2}$ & $\int xy dx = 10bx^{3:2} - 6x^{5:2}$ (§. 441). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{2}{15} x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3} y^3 dx : \int xy dx$, seu pars addenda $\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}} = \frac{x}{5b - 3x}$ $=$ (si parameter 1 fiat $= a$) $\frac{ax}{5b - 3x}$; consequenter si fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $= \frac{ba}{5b - 3b} = \frac{1}{2} a$. Est igitur distantia centri oscillationis parabolae ex dimidia basi suspensae & in latus agitatae $= \frac{4}{7} b + \frac{1}{2} a$.

PROBLEMA LXXVII.

454. Invenire centrum oscillationis in figuris solidis rotatione genitis.

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut, in formula superiori $\frac{\int x^2 dp + \int y^2 dp}{\int x dp}$, figuris

solidis convenienter explicetur valor pondusculi dp . Designat autem dp elementum solidi, quod habetur ducendo in se invicem differentialia abscissae PQ & semiordinatae QK atque semiordinatam QK. Sit $PQ=y$, $AP=x$, $QK=v$, erit elementum $v dy dx$; consequenter cum $\int v dy$ exprimat segmentum PQKL, quod concipitur instar pondusculi in QP collectum, si PM sit $= y$, $\int v dy$ exprimit integrum semicirculum in lineam rectam MN collectum instar ponderis. Sit adeo ratio radii ad semiperipheriam $= r:p$; erit semiperipheria radio $PM=y$ descripta $= \frac{py}{r}$,

consequenter area semicirculi $= \frac{py^2}{r}$, adeoque pondusculum dp in valore $\int x^2 dp$ substituendum $= \frac{py^2 dx}{r}$; unde

$\int x^2 dp = \frac{\int p x^2 y^2 dx}{r} = \frac{p}{r} \int x^2 y^2 dx$. Quod si idem valor substituatur in $\int x dp$; reperietur idem $\frac{p}{r} \int x y^2 dx$. Substituatur valor ipsius dp etiam in formula $\int y^2 dp$; erit pondusculum puncto Q respondentis $y^2 v dy dx$, consequenter ponduscula respondentia lineae QP $= dx \int v y^2 dy$.

Tab. XVI. Fig. 158. Dicatur radius circuli $PN = t$: erit $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, adeoque $\int v y^2 dy = \int y^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)}$. Est vero $\int y^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)} = \frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$ (§. 455. *infr*). Ergo omnia ponduscula respondentia lineæ QP sunt $\frac{1}{4} t^2 dx \int v dy - \frac{1}{4} y v^3 dx$. Jam $\int v dy$ exprimit segmentum circuli $PQKL$, adeoque degenerat in semicirculum radio PM descriptum, quando PQ efficitur ipsi PM æqualis, adeoque $t = y$. In eo igitur casu cum area semicirculi fit $\frac{py^2}{r}$, est $\frac{1}{4} t^2 dx \int v dy = \frac{py^4 dx}{4r}$. Et

quoniam in M semiordinata QN evanescit, erit $v = 0$, adeoque etiam $\frac{1}{4} y v^3 = 0$. Prodit adeo tandem $\frac{\int x^2 dp + \int y^2 dp}{\int x dp} = \frac{pr \int x^2 y^2 dx + \frac{1}{4} pr \int y^4 dx}{pr \int x y^2 dx} = \frac{\int x^2 y^2 dx + \int \frac{1}{4} y^4 dx}{\int x y^2 dx}$, ut adeo in casu

speciali non alia re opus sit, quam ut pro y substituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione solidum generatur, quemadmodum Problemata sequentia docent.

SCHOLIUM I.

455. Diximus, si t sit constans quantitas & $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, esse $\int v y^2 dy = \frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$. Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum; quo facto restituitur differentia e ad integrandum propositum (§. 92. *Analys. infin.*). Quodsi ergo $\frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$ differentiatur, cum t constans sit, prodit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} v^3 dy - \frac{3}{4} y v^2 dv$. Jam quia $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$ per hypoth. $v dv = -y dy$ & $v^2 = t^2 - y^2$. Quare his valoribus in $\frac{3}{4} y v^2 dv$ & $\frac{1}{4} v^3 dy$ substitutis;

differentiale emergit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} t^2 v dy + \frac{1}{4} v y^2 dy + \frac{3}{4} v y^2 dy = \frac{4}{4} v y^2 dy = v y^2 dy$, quod erat elementum ad integrandum propositum.

SCHOLIUM II.

456. Quoniam solida rotatione figurarum circa axem fixum genita eodem modo agitantur, in quamcunque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia, qualen in figuris planis inter agitationem in planum & in latus consideravimus, adeoque in omni casu eadem formula satisfacit.

PROBLEMA LXXVIII.

457. Determinare centrum oscillationis in cylindro ex centro basis suspensio.

RESOLUTIO.

Sit altitudo cylindri $AB = a$, $CB = b$, $AP = x$. Quoniam omnes circuli basi paralleli æquales sunt, erit in cylindro $PM = CB$, hoc est, $y = b$. Unde habemus (§. 454):

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= b^2 x^2 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} b^4 dx \\ x y^2 dx &= b^2 x dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{adeoque } \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{3} b^2 x^3 \\ \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} b^4 x \\ \int x y^2 dx &= \frac{1}{2} b^2 x^2 \end{aligned}$$

Quare distantia centri oscillationis à puncto suspensionis $= \frac{\frac{1}{3} b^2 x^3 + \frac{1}{4} b^4 x}{\frac{1}{2} b^2 x^2}$

$$= \frac{2}{3} x + \frac{b^2}{2x}. \text{ Quodsi fiat } x = a; \text{ pro-$$

dit distantia centri oscillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3} a + \frac{b^2}{2a}$.

SCHOLIUM.

458. Equidem DECHALES (a) centri oscillationis distantiam in Cylindro ex centro basis suspensi tantummodo facit $\frac{2}{3}a$; sed ipse non diffitetur suo tempore Theoriam centri oscillationis nondum fuisse excultam: immo vix fendo quid audiverat de regula Hugeniāna, quæ in Horologio Oscillatorio demonstratur (b).

PROBLEMA LXXIX.

459. Determinare centrum oscillationis in cono ex vertice suspensio.

RESOLUTIO.

Tab. Si altitudo coni $AC=a$, radius
II. basis $BC=b$, $AP=x$, $PM=y$; erit
Fig. 15. $y=bx$: a (§. 268 Geom.). Quare
(§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= b^2 x^4 dx : a^2 \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} b^4 x^4 dx : a^4 \\ xy^2 dx &= b^2 x^3 dx : a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{adeoque } \int x^2 y^2 dx &= b^2 x^5 : 5a^2 \\ \int \frac{1}{4} y^4 dx &= b^4 x^5 : 20a^4 \\ \int xy^2 dx &= b^2 x^4 : 4a^2 \end{aligned}$$

Distantia igitur centri oscillationis a puncto suspensionis = $\left(\frac{b^2 x^5}{5a^2} + \frac{b^4 x^5}{20a^4} \right)$:

$$\frac{b^2 x^4}{4a^2} = \frac{4}{5}x + \frac{b^2 x}{5a^2}. \text{ Quodsi jam porro}$$

fiat $x=a$: prodit distantia centri oscillationis pro cono integro = $\frac{4}{5}a + \frac{b^2}{5a}$.

PROBLEMA LXXX.

460. Determinare centrum oscillationis Sphæra.

(a) In Mundo Mathem. Tom. 2. Stat. Lib. 3. Prop. 65. f. m. 322.

(b) Vide Prop. præc. 64.

RESOLUTIO.

Si diameter Sphærae = $2r$, erit
 $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377 *Analys.*),
adeoque $y^4 = 4r^2 x^2 - 4rx^3 + x^4$.
Habemus adeo (§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= 2rx^3 dx - x^4 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= r^2 x^2 dx - rx^3 dx + \frac{1}{4} x^4 dx \\ xy^2 dx &= 2rx^2 dx - x^3 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{2} rx^4 - \frac{1}{5} x^5 \\ \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{3} r^2 x^3 - \frac{1}{4} rx^4 + \frac{1}{20} x^5 \\ \int xy^2 dx &= \frac{2}{3} rx^3 - \frac{1}{4} x^4 \end{aligned}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis = $\frac{\frac{1}{2}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{1}{20}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}$
= (multiplicando per 12 & dividendo per x^3) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{3}{5}x^2}{8r - 3x}$
= $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodsi

fiat $x=2r$, prodit distantia centri oscillationis pro Sphæra integra
 $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14}{10}r = \frac{7}{5}r$.

Si pro r ponatur diameter d , quia $d=2r$, adeoque $\frac{1}{2}d=r$, erit eadem distantia = $\frac{7}{10}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat
 $x=r$; prodit distantia centri oscillationis
in hemisphærio $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{35}$,
ubi nempe ex vertice fuerit suspensum.

PROBLEMA LXXXI.

462. Determinare centrum oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.

RESOLUTIO.

Si parameter parabolæ genetricis a ; erit $y^2 = ax$ (§. 388. *Analys.*), adeoque $y^4 = a^2 x^2$. Habemus adco (§. 454.)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= ax^3 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} a^2 x^2 dx \\ xy^2 dx &= ax^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{adeoque } \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{4} ax^4 \\ \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{12} a^2 x^3 \\ \int xy^2 dx &= \frac{1}{3} ax^3 \end{aligned}$$

Quamobrem distantia centri oscillationis à vertice

$$= \frac{\frac{1}{4} ax^4 + \frac{1}{12} a^2 x^3}{\frac{1}{3} ax^3} = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} a.$$

Si diameter basis fuerit b , & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391. *Analys.*). Quodsi ergo x degenerat in c ; prodit distantia centri oscillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{3}{4} c + bb : 4c$.

PROBLEMA LXXXII.

463. Determinare centrum oscillationis in omnibus Conoidibus parabolicis in infinitum circa verticem agitatis.

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1, pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{2:m}$ (§. 519. *Analys.*), adeoque $y^2 = x^{2:m}$ & $y^4 = x^{4:m}$.

Habemus itaque (§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= x^{2+2:m} dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} x^{4+m} dx \\ xy^2 dx &= x^{1+2:m} dx \end{aligned}$$

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{m}{3m+2} x^{3+2:m}$$

$$\int \frac{1}{4} y^4 dx = \frac{m}{4m+16} x^{1+4:m}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{m}{2m+2} x^{2+2:m}$$

Est igitur distantia centri oscillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitatis.

$$\begin{aligned} &\frac{2m+2}{3m+2} x + \frac{2m+2}{4m+16} x^{-1+2:m} \\ &= \frac{2m+2}{3m+2} x + \frac{m+1}{2m+8} x^{-1+2:m} \end{aligned}$$

Ponatur $m=2$, prodit $\frac{6}{8} x + \frac{3}{12} x^{-1}$, hoc est, ob $x^0=1$ (§. 55 *Analys.*), $\frac{3}{4} x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam posuimus $= 1$, fiat a ; erit distantia centri oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{3}{4} x + \frac{1}{4} a$, prorsus ut ante (§. 462).

PROBLEMA LXXXIII.

464. Determinare centrum oscillationis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.

RESOLUTIO.

Quoniam planum describens est hyperbola, si axis transversus dicitur a , para-

parameter b , erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (§. 459

Analys.), adeoque $y^4 = b^2 x^2 + \frac{2b^2 x^3}{a} + \frac{b^2 x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454)

$$x^2 y^2 dx = bx^3 dx + \frac{bx^4 dx}{a}$$

$$\frac{1}{4} y^4 dx = \frac{1}{4} b^2 x^2 dx + \frac{b^2 x^3 dx}{2a} + \frac{b^2 x^4 dx}{4a^2}$$

$$xy^2 dx = bx^2 dx + \frac{bx^3 dx}{a}$$

adeoque

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{4} bx^4 + \frac{bx^5}{5a} = \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$

$$\int \frac{1}{4} y^4 dx = \frac{1}{12} b^2 x^3 + \frac{b^2 x^4}{8a} + \frac{b^2 x^5}{20a^2} = \frac{160a^2 b^2 x^3 + 240ab^2 x^4 + 96b^2 x^5}{12a \cdot 160a}$$

$$= \frac{10a^2 b x^3 + 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{4a} = \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2 y^2 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{3 \cdot 5abx^4 + 3 \cdot 4bx^5}{5 \cdot 4abx^3 + 5 \cdot 3bx^4}$$

$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$

$$\frac{\int \frac{1}{4} y^4 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{10a^2 b^2 x^3 + 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{10a \cdot 4abx^3 + 10a \cdot 3bx^4}$$

$$= \frac{10a^2 b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Est adeo distantia centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico

$$\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2 b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Quodsi fiat $x = a$, prodibit distantia Centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi transverso æqualis,

$$\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2 b + 15a^2 b + 6a^2 b}{40a^2 + 30a^2} = \frac{27}{35} a + \frac{31}{70} b.$$

PROBLEMA LXXXIV.

465. Determinare centrum oscillationis in Spheroide elliptico ex vertice, seu altero axis majoris extremo, suspensio.

RESOLUTIO.

Si axis transversus fuerit a , parameter b ; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (§. 420 *Analys.*),

adeoque $y^4 = b^2 x^2 - \frac{2bx^3}{a} + \frac{b^2 x^4}{a^2}$.

Reperitur adeo, uti in Problemate præcedente (§. 564),

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$

$$\int \frac{1}{4} y^4 dx = \frac{10a^2 b^2 x^3 - 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12a}$$

adeoque $\frac{\int x^2 y^2 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{4} y^4 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{10a^2 b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Est igitur distantia centri oscillationis à vertice

$$\frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}.$$

Quodsi fiat $x = a$, prodit distantia centri oscillationis a vertice pro integro Sphæroide circa axem majorem agitato

$$\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{16a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2}$$

$= \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$. Si fiat axis minor $= c$, erit $b = c^2 : a$ (§. 423 *Analys.*), adeoque distantia centri oscillationis in

$$\text{Sphæroide} = \frac{3a}{5} + \frac{c^2}{10a}.$$

PROBLEMA LXXXV.

466. Determinare centrum oscillationis in Cono ex centro basis suspensio.

RESOLUTIO.

Sit semidiameter basis $BC = b$, Tab. II. Fig. 15.
 $CP = x$, $AC = a$, erit $AP = a - x$,
 consequenter ob $AC : BC = AP : PM$
 (§. 268 *Geom.*), $PM = y = (ab - bx) : a$
 $= b - bx : a$, $y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$, & y^4
 $= b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$.

Habemus adeo (§. 454):

$$x^2 y^2 dx = b^2 x^2 dx - \frac{2b^2 x^3 dx}{a} + \frac{b^2 x^4 dx}{a^2}$$

$$\frac{1}{4} y^4 dx = \frac{1}{4} b^4 dx - \frac{b^4 x dx}{a} + \frac{6b^4 x^2 dx}{4a^2} - \frac{b^4 x^3 dx}{a^3} + \frac{b^4 x^4 dx}{4a^4}$$

$$xy^2 dx = b^2 x dx - \frac{2b^2 x^2 dx}{a} + \frac{b^2 x^3 dx}{a^2}$$

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{3} b^2 x^3 - \frac{b^2 x^4}{2a} + \frac{b^2 x^5}{5a^2} = \frac{10a^2 b^2 x^3 - 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{30a^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} b^4 x - \frac{b^4 x^2}{2a} + \frac{b^4 x^3}{2a^2} - \frac{b^4 x^4}{4a^3} + \frac{b^4 x^5}{20a^4} \\ &= \frac{5a^4 b^4 x - 10a^3 b^4 x^2 + 10a^2 b^4 x^3 - 5ab^4 x^4 + b^4 x^5}{20a^4} \end{aligned}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{2} b^2 x^2 - \frac{2b^2 x^3}{3a} + \frac{b^2 x^4}{4a^2} = \frac{6a^2 b^2 x^2 - 8ab^2 x^3 + 3b^2 x^4}{12a^2}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20a^2 x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4 b^2 - 30a^3 b^2 x + 30a^2 b^2 x^2 - 15ab^2 x^3 + 3b^2 x^4}{30a^4 x - 40a^3 x^2 + 15a^2 x^3}$$

Quodsi fiat $x = a$, erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Cono integro

$$= \frac{20a^3 - 30a^3 + 12a^3}{30a^2 - 40a^2 + 15a^2} + \frac{15a^4 b^2 - 30a^4 b^2 + 30a^4 b^2 - 15a^4 b^2 + 30a^4 b^2}{30a^5 - 40a^5 + 15a^5} = \frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}.$$

Si al-

Si altitudo Coni fuerit semidiametro basis æqualis, crit $a=b$, adeoque $b^2:a=a$. Unde distantia centri oscillationis in Cono rectangulo a puncto suspensionis $\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a = a$.

PROBLEMA LXXXVI.

467. Determinare centrum oscillationis in Hemisphærio ex centro basis suspensio.

RESOLUTIO.

Quoniam abscissæ hic computantur a centro, si radius circuli sit r , crit $y^2 = r^2 - x^2$ (§. 377 Anal.) & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$. Habemus itaque (§. 454):

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= r^2 x^2 dx - x^4 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} r^4 dx - \frac{1}{2} r^2 x^2 dx + \frac{1}{4} x^4 dx \\ x y^2 dx &= r^2 x dx - x^3 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{3} r^2 x^3 - \frac{1}{5} x^5 \\ &= \frac{5r^2 x^3 - 3x^5}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} r^4 x - \frac{1}{6} r^2 x^3 + \frac{1}{20} x^5 \\ &= \frac{15r^4 x - 10r^2 x^3 + 3x^5}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x y^2 dx &= \frac{1}{2} r^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \\ &= \frac{2r^2 x^2 - x^4}{4} \end{aligned}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20r^2 x - 12x^3}{30r^2 - 15x^2} + \frac{15r^4 - 10r^2 x^2 + 3x^4}{30r^2 x - 15x^3}$$

aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x , $\frac{10r^2 x^2 - 9x^3 + 15r^4}{30r^2 x - 15x^3}$.

Quodsi fiat $x=r$, prodibit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Hemisphærio integro

$$= \frac{10r^4 - 9r^4 + 15r^4}{30r^3 - 15r^3} = \frac{16}{15} r.$$

SCHOLIUM.

468. Non absimili modo inveniri potest centrum oscillationis Conoidis & Sphaeroidis dimidii ex centro basis suspensi. Potest etiam Tab.I. punctum suspensionis h extra figuram assumi, Fig.9. ut distantia pondusculi P ab axe oscillationis sit Ph ; atque ab abscissa figuræ AP differat quantitate Ah , veluti si figura oscillans ex filo suspendatur: quo in casu HUGENIUS reperit in Sphæra ex filo tenui suspensa distantiam centri oscillationis esse longitudinem fili & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compositam ex semidiametro sphærae ac longitudine fili & semidiametrum ipsam.

(a), hoc est, si filum $= l$, radius $= r$, $l + r + \frac{2r^2}{5(l+r)}$

PROBLEMA LXXXVII.

469. Determinare quantitatem pedis horarii.

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas semicycloides suspensio, & singulas oscillationes singulis minutis secundis aut eorum semissibus absolvente (§. 382) instructum, & secunda temporis scrupula indice peculiari monstrans ad motum stellarum ea ratione componatur quæ inferius in *Astronomia* exponitur.

2. Globus plumbeus ex filo tenui suspensus (§. 377) leniter impellatur, ut nonnisi exiguos arcus describat, quo singulæ oscillationes sint isochronæ (§. 383), & tamdiu augeatur vel minuatur fili longitudo, donec oscillationes singulis minutis secundis absolvantur.

3. Quo-

(a) In Horologi Oscillat. Part. IV. Prop. 21. fol. 142.

3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compositam ex semi-diametro & longitudine fili atque semidiametrum ipsam definiunt distantiam centri oscillationis ab axe (§. 468); eandem pars tertia quantitatem pedis horarii constituit. (§. 425).

SCHOLION I.

470. HUGENIUS (a) hoc modo invenit, pedem horarium esse ad Parisiensem ut 881 ad 864, hoc est, longitudo penduli simplicis oscillationes singulas singulis minutis secundis absolventis esse trium pedum Parisiensium cum octo lineis & dimidia. Monet autem pedem Parisiensem ad Rhenum esse ut 144 ad 139, hoc est, quinque suis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.

SCHOLION II.

471. Quodsi gravitas omnibus in locis eadem esset; pedes horarius mensura foret universalis & perpetua, quemadmodum HUGENIUS contendit: sed cum eandem variari nunc constet pro diversa Aequatore distantia (§. 390.); nonnisi iis in locis eadem penduli simplicis minuta secunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis discrepant. Quo itaque mensura vere universalis haberetur, opus præterea esset, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diversis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorsus indignum censi debet; hætenus nec per experimenta constare, nec demonstratum esse, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot seculorum decursum, gravitas non mutetur.

(a) Horolog. Oscillat. Part. IV. Prop. 25. fol. 352. & 353.

THEOREMA LXIII.

472. *Spatium descensus perpendicularis gravium intra minutum secundum temporis est ad semissem longitudinis penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis respondent, in ratione duplicata peripheria ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ter sumtus, seu longitudo penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis horariis respondent (§. 425) $= a$, tempus descensus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quaesita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d : p$; erit $t = d : p$ (§. 387). Est vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2} a : x$ (§. 87), adeoque $t^2 x = \frac{1}{2} a$, hoc est, si valor ipsius t modo inventus substituitur, $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2} a$, seu $d^2 x = \frac{1}{2} a p^2$. Ergo $x : \frac{1}{2} a = p^2 : d^2$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d : p = 113 : 355$ (§. 427 Geom.) & $a = 3' 8\frac{1}{2}''$, seu 737 linearum dimidiarum pedis Parisiensis (§. 470); erit $x = a p^2 : 2 d^2 = 737. 126025 : 25538 = 1818'' = 15' 1'' 8'''$ seu $15' 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

474. Hæc cum experimentis accuratissimis prorsus convenire observavit HUGENIUS (b).

CAPUT

(b) In Horolog. Oscillat. Part. IV. Prop. 25. fol. 155.

CAPUT XI.

De Motu Projectorum.

DEFINITIO XLIX.

475. **G**rave perpendiculariter projici dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO L.

476. Grave horizontaliter projici dicitur, si impellitur secundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO LI.

477. Grave oblique projici dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO LII.

Tab. 478. Angulus elevationis RAB est, quem efficit linea directionis corporis projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA LXIV.

479. Si corpus grave perpendiculariter projicitur, perpendiculariter ascendit.

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis (§. 475). Quare cum gravitas secundum eandem directionem vi impressæ resistat (§. 215); directionem mutare nequit, sed motum

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter ascendit (§. 71). Q. e. d.

THEOREMA LXV.

480. Si corpus grave horizontaliter Tab. projicitur, motu suo parabolam describit in medio non resistente. IV. Fig. 49.

DEMONSTRATIO.

Corpus enim projectum vi impressa uniformiter urgetur secundum rectam AR (§. 71); sed vi gravitatis secundum rectam AC, quæ ad rectam AR, lineæ horizontali (ex hypothesi) parallelam perpendicularis (§. 215). Jam si vi impressa corpus pervenisset in Q, vi gravitatis descendit interea per QM, adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus secundum directionem AR semper est uniformis, per demonstr. spatia AQ & Aq sunt ut tempora (§. 32). Sed spatia QM & qm, sunt ut temporum quadrata (§. 86.). Est ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc est, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (§. 257 Geom.). Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm est parabola (§. 402 Analys. fin.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

481. Equidem cum gravia versus centrum Telluris tendant (§. 213), rectæ QM & qm in eodem concurrere debent, adeoque parallelae non sunt (§. 82 Geom.). Enim-

Q

vero

Tab. vero si tota altitudo AC, per quam decidit
IV. grave secundum directionem AR projectum,
Fig. 49. sit exigua admodum pars distantia à centro
Telluris (§. 216.); pro parallelis, citra
errorem experimento ullo definiendum, ha-
beri possunt.

THEOREMA LXVI.

Tab. 482. Si corpus grave oblique, sive
IV. sursum, sive deorsum, projicitur in
Fig. 50. medio non resistente: motu suo para-
bolam describit.

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis sur-
sum projecti AR. Cum corpus pro-
jectum, si gravitatis actio cessaret, ean-
dem uniformiter describeret (§. 71);
positis AQ, Qq, qb & bR æqualibus,
erunt AQ & Aq ut tempora (§. 32).
Quodsi AB sit linea horizontalis, &
QM, qm &c. ita ducantur, ut conti-
nuatæ in T, t &c. sint ad AB perpen-
diculares; erunt QM, qm &c. altitudi-
nes, per quas vi gravitatis descendit
interea corpus projectum, dum ex A
in Q, q &c. pervenisset (§. 215). Quare
si AS ducatur ad AB perpendicularis;
erit rectis QM, qm &c. parallela (§. 256
Geom.). Ductis porro PM, pm &c. ipsi
AR parallelis; erit $PM=AQ$, $pm=Aq$
&c. $AP=QM$, $Ap=qm$ &c. (§. 257
Geom.), adeoque $AP:Ap=PM^2:pm^2$,
(§. 86). Est igitur AMB parabola;
cujus diameter AS (§. 416. *Analys. finit.*). Quod erat unum.

Tab. II. Sit similiter linea directionis
IV. corporis deorsum projecti AR in par-
Fig. 51. tes æquales AQ, Qq &c. divisa & RS
linea horizontalis. Ducta AS ad RS

perpendiculari & QM, qm &c. eidem Tab
AS; PM vero, pm &c. ipsi AR paralle- IV.
lis: eodem, quo ante, modo demonst- Fig. 5
tratur, esse $AP:Ap=PM^2:pm^2$. Qua-
re AMm denuo est parabola, cujus
diameter AS (§. cit. *Analys. finit.*).
Quod erat alterum.

COROLLARIUM I.

483. Est ergo parameter diametri pa-
rabolæ AS tertia proportionalis ad AP &
PM: sive QM & AQ (§. cit. *Analys. finit.*).
hoc est, ad spatium, per quod grave
dato tempore descendit, & ad celerita-
tem spatio, quod vi impressa eodem tem-
pore describit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM II.

484. Cum spatium uno minuto secun-
do à gravi quocunque perpendiculariter
cadendo confectum notum sit, nempe:
15 $\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium (§. 473); para-
meter diametri parabolæ describendæ in-
venitur, si spatii, quod uno minuto se-
cundo projectile vi impressa percurrit,
quadratum per 15 $\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium
dividatur (§. 302. *Arithm.*)

COROLLARIUM III.

485. Si ergo velocitas projectorum ead-
em, spatia eodem tempore vi impressa
descripta æqualia sunt (§. 33); conse-
quenter eadem parabolarum, quas motu
composito percurrunt, parameter inve-
nitur (§. 177 *Arithm.*)

COROLLARIUM IV.

486. Si a parametro diametri subtra-
hatur ipsius altitudinis AP quadruplum,
parameter axis relinquitur (§. 416 *Analys. finit.*),
cujus quarta pars est distantia ver-
ticis axis a foco parabolæ (§. 396 *Analys. finit.*).
Parabola igitur describi potest, data
celeritate projectorum (§. 400 & 401
Analys. finit.) & (§. 484 *Mech.*)

COROL.

COROLLARIUM V.

487. Linea directionis projectilis AR parabolam in A tangit (§. 414, 415 *Analys. finit.*)

DEFINITIO LIII.

488. *Semita* est Parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum describit.

DEFINITIO LIV.

Tab. IV. Fig. 50. 489. *Amplitudo* (scilicet semitæ) est recta horizontalis AB semitam AMB subtendens.

THEOREMA LXVII.

490. *Projectile temporibus aequalibus per aqualia spatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB semita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Qq &c. divisa. Demittantur perpendiculares QT, qt, &c. erunt AT, Tt &c. spatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes semitæ AM, Mm, &c. percurrit. Quoniam projectile vi sola impressa uniformiter describeret rectas AQ, Qq &c. (§. 71); AQ, Qq &c. sunt ut tempora (§. 32). Est vero AQ:Qq = AT:Tt (§. 268 *Geom.*). Ergo AT & Tt sunt ut tempora; consequenter temporibus æqualibus etiam AT & Tt æquantur. Q. e. d.

PROBLEMA LXXXVIII.

491. Dato angulo elevationis RAB, una cum amplitudine AB; invenire parametrum diametri AS semitæ AMS.

RESOLUTIO.

Sit sinus anguli elevationis = a , cosinus = b , sinus totus = t , amplitudo AB = c , parameter = x . Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis RAB (§. 3, 11, *Trigon.*) adeoque

$$b:a = AB:BR$$

$$b:a = c:\frac{ac}{b}$$

Est itaque BR = AS (§. 257 *Geom.*) = $ac:b$.

Porro $b:t = AB:AR$

$$b:t = c:\frac{tc}{b}$$

Est itaque AR = SB (§. cit.) = $tc:b$.

Quare ob x . AS = SB² (§. 416 *Analys. finit.*)

$$acx:b = c^2t^2:b^2$$

$$ax = ct^2:b$$

$$x = ct^2:ab$$

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $a:\frac{t^2}{b} = c:x$. Est vero $\frac{t^2}{b}$

secans anguli elevationis RAB (§. 26 *Trigon.*). Habemus itaque sequens

Theorema. Amplitudo semitæ AB est ad parametrum diametri AS, ut sinus anguli elevationis RAB ad ejus secantem.

COROLLARIUM I.

492. Quoniam $ax = ct^2:b$ (§. 491), adeoque $2ax = 2ct^2:b$ (§. 93 *Aritbm.*) erit etiam $2abx:2t^2 = c$; consequenter $t:\frac{2ab}{t} = \frac{1}{2}x:c$. Est vero $2ab:t$ sinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325 *Analys. finit.*).

Q²

Ergo

Ergo semiparameter est ad amplitudinem AB ut finus totus ad sinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM II.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem est (S. 485.). Quare cum sit semiparameter semitæ in uno casu ad amplitudinem, ut finus totus ad sinum dupli anguli elevationis; & semiparameter semitæ in altero casu ad amplitudinem, ut finus totus ad sinum dupli anguli elevationis (S. 492); amplitudines sunt ut finus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum existente eadem (S. 196 Arithm.), & ratio finus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc casu constans est (S. 173 Arithm.).

THEOREMA LXVIII.

494. Si eadem maneat projectilis celeritas; amplitudo AB maxima est sub angulo elevationis 45° : æquales vero sunt amplitudines sub angulis elevationis a semirecto æqualiter differentibus.

DEMONSTRATIO.

Cum ratio finus anguli dupli elevationis ad amplitudinem constans sit, celeritate projectilis existente eadem (S. 493); crescente sinu anguli dupli elevationis crescit amplitudo. Quare cum finus anguli elevationis 45° dupli sit radius, quo major finus non datur; maxima sit necesse est amplitudo sub sinu anguli elevationis 45° . Quod erat unum.

Jam cum idem sit finus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (S. 5 Trig.), anguli autem dupli a recto æqualiter different, si sin-

pli a semirecto differant æqualiter; amplitudines eo in casu æquales sint. necesse est (S. 493). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut finus totus ad sinum anguli elevationis dupli, ita semiparameter ad amplitudinem (S. 492), & finus totus sinui anguli elevationis dupli æqualis, si is 45° ; sub angulo elevationis 45° amplitudo semiparametro æquatur.

PROBLEMA LXXXIX.

496. Data amplitudine maxima; determinare amplitudinem sub angulo elevationis alterius cujuscunque, celeritate manente eadem.

RESOLUTIO.

Quoniam finus totus est finus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (S. 494); fiat ut finus totus ad sinum anguli dupli elevationis cujuscunque alterius, ita amplitudo maxima ad quæsitam (S. 493).

E. g. Sit jactus maximus, seu semirectus alicujus tormenti 6000 passuum; & quærat longitudo jactus graduum 30. Reperiatur 5196 passuum.

Log. sin. tot.	1000000000
Log. sin. 60	993753061
Log. 6000	37781512

Log. quæf. $+37156818$; cui in tabulis respondent 5196.

PROBLEMA XC.

497. Data celeritate projectilis, invenire amplitudinem maximam.

RESOLUTIO.

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per spatium, quod vi impressa, dato tempore, e. gr. uno secundo minuto, percurrere valet: non alia re opus est, quam ut parameter semitæ inveniat (S. 484.). Hujus enim semissis est amplitudo quæsitæ (S. 495.).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum secundum 1000 pedes Parisienses, seu 12000", conficere valeat. Quod si itaque 144000000 per 181 divides, prodibit parameter semitæ maximæ 795580" seu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum constituta sunt, projectile attingere potest.

PROBLEMA XCI.

498. Data amplitudine maxima, invenire celeritatem projectilis, seu spatium horizontale intra minutum secundum conficiendum.

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ sit parameter semitæ (S. 495.); inter duplum amplitudinis maximæ & spatium quod intra minutum secundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe, 181 digitorum, qualium 12 est pes Parisiensis, quæratür numerus medius continue proportionalis (S. 302 Arithm.) Is enim erit spatium à projectili intra unum minutum secundum conficiendum (S. 495.).

Si amplitudo maxima 500 pedum Parisiensium; erit parameter maxima 1000 pedum, seu 12000 digitorum; & hinc spatium quæsitum = $\sqrt{(12000 \cdot 181)} = 120$ pedum Parisiensium cum 9 unciis seu digitis.

PROBLEMA XCII.

499. Determinare altitudinem maximam tm, ad quam grave oblique projectum ascendit. Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $BR = b$, $AT = x$; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (S. 417 Geom.) Porro (S. 268 Geom.)

$$AB : BR = AT : TQ;$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (S. 416 Analys. finit.)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$

$$a^2 + b^2 : \frac{a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

$$\text{Quare } TM = bx : a - bx^2 : a^2.$$

Cum vero tm sit maximum aliquod, per hypoth. erit (S. 63 Analys. infinit.)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$

$$ab - 2bx = 0$$

$$ab = 2bx$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in t; & ex puncto t erigatur perpendicularis tm; erit tm altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum ascendit.

THEOREMA LXIX.

500. Si altitudo maxima tm, ad quam grave juxta directionem AR projectum ascendit, continuetur usque ad lineam directionis AR; erit recta qm inter semitam AmB & lineam directionis AR intercepta eidem æqualis: & si, in extremitate semitæ erigatur perpendicularis BR, erit $tm = \frac{1}{4}BR$.

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Quoniam $AB : At = AR : Aq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 499); *Fig. 50.* erit etiam $Aq = \frac{1}{2} AR$. Est vero $AR^2 : Aq^2 = BR : qm$ (§. 416 *Analys. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4} AR^2$, per demonstrat. erit quoque $qm = \frac{1}{4} BR$. Quod erat unum.

Sed, ob $AB : At = BR : tq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 499) $tq = \frac{1}{2} BR$, hinc $\frac{1}{2} tq = \frac{1}{4} BR$. Est vero $qm = \frac{1}{4} BR$ per demonstrat. Ergo $qm = \frac{1}{2} tq$ (§. 87 *Arithm.*) $= tm$. Quod erat alterum.

PROBLEMA XCIII.

501. Data amplitudine AB & angulo elevationis BAR ; determinare altitudinem jactus maximam tm .

RESOLUTIO.

Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis BAR (§. 3, 11 *Trigon.*) Quare si fiat ut cosinus anguli elevationis ad sinum ejusdem, ita amplitudo AB ad quartum; reperietur BR , cujus quarta pars est altitudo jactus maxima tm (§. 500).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate, projectilis amplitudo maxima (§. 497), & inde porro amplitudo sub angulo elevationis quocunque invenitur (§. 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri potest (§. 501).

THEOREMA LXX.

503. Altitudo jactus tm est ad octavam parametri partem, ut sinus versus anguli dupli elevationis ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli elevationis $BAR = a$, Tab. cosinus $= b$, sinus totus $= t$, parameter $= x$; erit amplitudo $AB = abx : t^2$ (§. 492) & (§. 501.)

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4} BR$ (§. 500) $= a^2x : 4t^2 = 2a^2x : 8t^2$. Est vero $(b^2 - a^2) : t$ cosinus anguli dupli elevationis (§. 325 *Analys. finit.*), & hinc sinus versus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 - a^2) : t$ (§. 2 *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$ consequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem sinus versus $= 2a^2 : t$. Est adeo ut t sinus totus ad $2a^2 : t$ sinum versus anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm . Q. e. d.

COROLLARIUM I.

504. Quoniam ut sinus totus ad sinum versus anguli dupli elevationis in uno casu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus, & ut sinus totus ad sinum versus anguli dupli elevationis in altero quocunque casu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503.); velocitate autem existente eadem parameter quoque in diversis angulis elevationis eadem est (§. 484); erunt altitudines jactus sub diversis angulis elevationum ut sinus versus eorumdem angulorum duplorum (§. 196 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

505. Si sinus anguli elevationis in uno casu a , in altero c , velocitate existente eadem, altitudines jactus sunt ut $a^2x : 4t^2$ ad $c^2x : 4t^2$ (§. 503); hoc est ut a^2 ad c^2 (§. 181 *Arithm.*); adeoque in ratione duplicata sinuum angulorum elevationum.

PRO-

PROBLEMA XCIV.

Tab. 506. Data celeritate projectilis, altitudine ferendi In, & ejus distantia horizontali AI; invenire jactus angulum elevationis.

RESOLUTIO.

Cum, data celeritate projectilis, parameter diametri AS detur (§. 483); fit $ca=a$. Sit præterea $In=b$, $AI=c$, sinus totus $=t$, tangens anguli quaesiti $=x$. Quodsi AI sumatur pro sinu toto, erit b I tangens anguli b AI (§. 7 Trigon.) Est itaque

$$1 : x = AI : Ib$$

$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $bn=Ar=cx:t-b$, & $rn^2=acx:t-ab$ (§. 416 Anal. fin.). Est vero etiam $rn^2=Ah^2=AI^2+Ib^2$ (§. 417 Geom.) $=c^2+c^2x^2:t^2$. Quare

$$c^2+c^2x^2:t^2=acx:t-ab$$

$$\frac{c^2x^2:t^2-acx:t}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{-ab-c^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{c^2x^2:t^2-acx:t+\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2-ab-c^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$cx:t-\frac{1}{2}a=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-ab-c^2\right)}$$

$$cx:t=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-ab-c^2\right)}$$

$$x=\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-ab-c^2\right)}\right)t:c$$

Est igitur ut c ad $\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-ab-c^2\right)}$ ita sinus totus t ad tangentem anguli elevationis quaesitum RAB.

COROLLARIUM I.

507. Si $ab+c^2=\frac{1}{4}a^2$, seu $\frac{1}{4}a=b+c^2:a$ erit $x=at:2c$, adeoque in hoc casu est $2c:a=t:x$, hoc est, ut dupla distantia

objecti feriendi AI ad parametrum, ita Tab. sinus totus ad tangentem anguli elevationis. IV. Fig. 50.

COROLLARIUM II.

508. Si $ab+c^2>\frac{1}{4}a^2$; $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-ab-c^2\right)}$ radix imaginaria evadit (§. 71 Anal. finit.); adeoque valor ipsius x est impossibilis (§. cit.). Quare in hoc casu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA LXXI.

509. Tempora jactuum sub diversis elevationis angulis, velocitate existente eadem, sunt ut sinus angulorum elevationis.

DEMONSTRATIO.

Sit sinus totus $=t$, sinus anguli elevationis $BAR=a$, cosinus $=b$, parameter semitæ $=x$; erit secans anguli elevationis $=t^2:b$, adeoque $\frac{t^2}{b}:a=x:$

AB (§. 491); consequenter $AB=abx:t^2$. Quare cum fit (§. 33 Trigon.)

$$b:t=AB:AR$$

$$b:t=\frac{abx}{t^2}:\frac{ax}{t}$$

adeoque $AR=ax:t$; erit ut sinus totus t ad finem anguli elevationis in casu uno, ita parameter ad AR; & ut sinus totus ad finem anguli elevationis in casu alio, ita parameter ad AR in casu alio. Quoniam vero celeritas in utroque casu eadem, per hypoth. parameter quoque eadem est (§. 485). Ergo ut sinus angulorum elevationis, ita sunt rectæ AR in diversis elevationum angulis (§. 196 Arithm.). Enimvero rectæ AR sunt spatia, quæ projectilia eadem

Tab. eadem celeritate uniformiter descri-
 IV. bunt, cessante gravitatis actione (§. 71).
 Fig. 50. Tempora igitur jactuum sunt ut ista
 spatia (§. 32); consequenter ut sinus
 angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA XCV.

510. Data celeritate projectilis, una
 cum angulo elevationis RAB; invenire
 amplitudinem AB, altitudinem jactus
 tm & semitam AmB describere.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB eri-
 gatur perpendicularis AD, quæ sit
 altitudo, unde projectile cadendo
 celeritatem datam acquirere valet
 (§. 92).
2. Super AD describatur semicircu-
 lus AQD, lineam directionis AR
 secaturus in Q.
3. Per Q ducatur ipsi AB parallela
 Cm fiatque $CQ = Qm$.
4. Ex puncto m demittatur ad AB
 perpendicularis mt .
5. Denique per verticem m descri-
 batur parabola AmB parametro
 $4CD$. (§. 393 *Analys. fin.*)

Dico hanc esse semitam quæsitam,
 $4CQ$ ejus amplitudinem & tm jactus
 altitudinem.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & m sint recti
per constr. & verticales ad Q æquales
 (§. 156 *Geom.*), sit etiam $CQ = Qm$
per constr. erit $qm = AC$ (§. 251
Geom.). Est vero $tm = AC$ (§. 257
Geom.). Ergo $qm = mt$ (§. 87 *Arithm.*);
 consequenter tm est altitudo jactus

(§. 500.), & projectile parabolam Tab.
 AmB describit, cujus adeo amplitudo IV.
 $AB = 2 At$ (§. 499) $= 2 Cm = 4CQ$ Fig. 50.
 ob $CQ = Qm$, *per constr.* Quod erat
 primum, secundum & tertium.

Denique quia $At = Cm$ (§. 257
Geom.) $= 2CQ$; $At^2 = 4CQ^2 =$
 $4DC \cdot AC$ (§. 327, 377 *Geom.*) $=$
 $4DC \cdot tm$, *per demonstr.* Ergo $4DC$
 est parameter parabolæ in vertice m
 (§. 388 *Analys. finit.*). Quod erat ul-
 timum.

COROLLARIUM I.

511. Data igitur projectilis celeritate,
 dantur amplitudines & altitudines om-
 nium jactuum, qui fieri possunt, eadem
 opera. Ducta enim EA, erit, sub angulo
 elevationis EAB, altitudo AI, amplitudo
 4IE; sub angulo elevationis FAB, altitudo
 AH, amplitudo 4HF (§. 510).

COROLLARIUM II.

512. Cum AB sit ad AD perpendicula-
 ris, *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 304
Geom.); & hinc angulus ADQ angulo ele-
 vationis RAB æqualis (§. 323 *Geom.*);
 consequenter AIQ est duplus anguli eleva-
 tionis (§. 313 *Geom.*). Est itaque CQ
 quarta pars amplitudinis (§. 510) sinus
 rectus; AC altitudo jactus (§. cit.) sinus
 versus anguli dupli elevationis (§. 2
Trigon.).

SCHOLIUM.

513. Hinc facili opera deducuntur, quæ
 supra per analysin invenire docuimus, ut
 ejus in hisce usum ostenderemus.

PROBLEMA XCVI.

514. Data altitudine jactus tm , aut
 amplitudine AB, una cum angulo eleva-
 tionis

Tab. I. *variationis RAB; invenire projectilis celeritatem qua ab initio fertur, hoc est, altitudinem AD, unde cadendo istiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum $AC = tm$ sit sinus versus, $CQ = \frac{1}{4}AB$ (§. 512) sinus rectus anguli AIQ (§. 2 Trig.), quem esse anguli elevationis RAB duplum ex demonstratione Problematis 95 (§. 510) constat: quærat ad sinum versus anguli dupli elevationis, sinum totum & altitudinem jactus: vel ad sinum rectum anguli dupli elevationis, sinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ sive IA, cujus duplum AD est altitudo quæsitæ (§. cit.).

SCHOLIUM.

515. Potuisset quoque Curva projectionis analytice investigari & quidem in omni gravitatis hypothese possibili: quod ut appareat, sequens subjungere lubet Problema.

PROBLEMA XCVII.

516. Invenire Curvam projectionis, directionibus gravium suppositis parallelis, in medio non resistente.

RESOLUTIO.

Tab. I. Ponamus corpus grave horizontaliter projici secundum directionem AR, AMm esse Curvam projectionis, AQ abscissam, QM semiordinatam, aut, si mavis AP abscissam, PM semiordinatam. Sit $AP = QM = x$, $AQ = PM = y$. Intelligatur semiordinata *p. m* alteri PM infinitesimale *p. m* *Wolfi Oper. Mathem. Tom. II,*

te propinqua: erit arculus curvæ Tab. I. infinite parvus $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ IV. adeoque $Mm^2 = dx^2 + dy^2$ (§. 144 Fig. 49. *Analys. infin.*) Quoniam projectile in medio non resistente movetur per *hypoth.* motus, quo vi impressa movetur, æquabilis (§. 71). Porro cum grave, dum motu composito per Mm fertur (§. 241), per spatium infinite parvum MO (recta MO parallela & = Pp) descendens isto tempusculo etiam æqualiter moveatur; erit tam MO, quam Om in ratione composita celeritatis & temporis (§. 34). Quod si ergo ponamus AQ sive PM exponere tempus (§. 31); erit tempusculum, quo projectile per arculum Mm defertur, = dy. Fiat celeritas projectili impressa, quæ constans est, 1; erit Om ut dy. Sit porro celeritas a gravi cadendo in M acquisita = v; erit MO ut vdy. Habemus itaque Mm^2 ut $dy^2 + v^2 dy^2$, consequenter

$$dy^2 + v^2 dy^2 = dx^2$$

$$\text{adeoque } v^2 dy^2 = dx^2$$

$$v dy = dx$$

$$dy = dx : v$$

$$y = \int v^{-1} dx$$

Data igitur celeritate v a gravi in M acquisita per x; reperietur æquatio ad Curvam projectionis.

Jam, in hypothese GALILÆI, $v = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (§. 87).

$$\text{Ergo } dy = x^{-1/2} dx$$

$$\text{hoc est } y = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$$

$$y^2 = 4x$$

R

Est

Tab. IV. *Fig. 49.* Est ergo in hypothefi *Galileana* Curva projectionis parabola, cujus parameter 4 (§. 388 *Anal. fin.*): quemadmodum superius demonstratum (§. 480). Quoniam $x : y = y : 4$, hoc est, $AP : PM = PM : 4$, five $QM : AQ = AQ : 4$; parameter curvæ projectionis est tertia proportionalis ad spatium, quod in tempore quocunque grave cadendo conficit, & spatium, quod vi impressa describit: quemadmodum supra reperimus (§. 480).

Sit in hypothefi *Baliana* (§. 102) v ut x : erit

$$dy = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$$

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

$$= lx \text{ (§. 243 } Analys. infin.)$$

Sunt igitur abscissæ AQ , Aq &c. ut logarithmi semiordinatarum QM , qm &c. consequenter curva projectionis est Logarithmica, cujus subtangens = 1 (§. 553 *Analys. finit.*)

Tab. IV. *Fig. 50.* Quodsi directio AR fuerit ad horizontem AB obliqua, seu si grave oblique projiciatur (§. 477), eodem modo solutio procedit. Ducatur pm ipsi AR parallela & intelligatur alia eidem infinite propinqua. Fiat $Aq = pm = y$, $qm = Ap = x$; erit arculus infinite parvus curvæ projectionis semiordinatis istis interceptus = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; adeoque quadratum ejusdem = $dx^2 + dy^2$ ut ante. Sit celeritas constans qua mobile fertur = 1, celeritas vero per

$qm = Ap$ acquisita = v ; tempusculum per arculum infinite parvum consumto in spatiolis dy & dx , erit $dy : dx = 1 : v$ (§. 38), adeoque in hypothefi *GALILÆI* $dy : dx = 1 : x^{1/2}$. prodit; igitur ut ante

$$\frac{dx}{x^{1/2}} = x^{-1/2} dx = dy$$

$$2x^{1/2} = 2\sqrt{x} = y$$

$$4x = y^2$$

Unde patet in hoc quoque casu curvam projectionis esse parabolam; quemadmodum supra ostendimus (§. 482).

SCHOLIUM.

517. Supposuimus directiones parallelas; propterea quod lineæ in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi possunt citra errorem assignabilem in iis distantiiis, in quibus experimenta capere licet. Quod si tamen desideraveris Problema solvi in hypothefi linearum directionis convergentium; solutionem dudum dedit Vir summus NEWTONUS (a): dederunt deinde Geometra celeberrimus HERMANNUS (b), aliique ab eodem laudati (c). Nos sequentem subjungimus, ne quid in hoc argumento desiderari possit.

PROBLEMA XCVIII.

518. Invenire Curvam projectionis, in hypothefi gravitatis cujuscunque, directionibus in centro Telluris convergentibus.

RESOLUTIO.

Sit Curva projectionis AMR , & linea directionis ex centro Telluris C ducta Tab. XV. CN. Fig. 160

(a) In *Princip. Philos. Natur. Mathem.* Prop. 41. Lib. 1.

(b) In *Phoronomia* Lib. 1. Prop. 23. §. 162.

(c) *Loc. cit.* §. 164.

Tab. CN. Intelligatur Cn radius ipsi CN
XVI. infinite propinquus, radio $CA = CN$
Fig. $= Cn$ descripto arcu AB. Ducantur
160. porro radiis CM & Cm arcus concen-
trici PM & pm . Sit denique AH altitu-
do, per quam grave cadendo acquirit
eam celeritatem, qua vi impressa mo-
vetur, ac deinde per curvam AMR
descendat vi impressa & velocitate vi
gravitatis quomodocunque accelerata.
Dicatur jam $AH = a$, $AP = x$, AC
 $= b$, arcus $AN = y$; erit $Pp = RM$
 $= dx$, $Nn = dy$, $PC = MC = mC$
(§. 4 *Analys. infin.*) $= b - x$. Porro,
propter sectores similes CNn & CRm ,
erit (§. 142, 412 *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$

$$b : b - x = dy$$

$$\text{adeoque } Rm = (b - x) dy : b$$

$$mR^2 = (b - x)^2 dy^2 : b^2$$

$$MR^2 = dx^2$$

$$Mm^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile ur-
getur per MR vi gravitatis, seu quæ
cadendo per altitudinem AP acquiri-
tur, $= z$; altera vero, qua per arcum
 mM motu composito fertur, seu quæ
cadendo per HP acquiritur $= v$. Quo-
niam in spatiolis infinite parvis Mm &
 RM motus æquabilis, $MR : Mm = z : v$
(§. 33), consequenter

$$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2 \text{ (§. 260 Arithm.)}$$

$$\text{hoc est, } dx^2 : \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$$

$$b^2 dx^2 : b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2 = z^2 : v^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 = b^2 z^2 dx^2 + (b - x)^2 z^2 dy^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 - b^2 z^2 dx^2 = (b - x)^2 z^2 dy^2 \quad \text{Tab. XVI.}$$

$$bdx \sqrt{(v^2 - z^2)} = z dy (b - x) \quad \text{Fig. 160.}$$

$$dy = \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b - x)}$$

$$y = \int \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b - x)}$$

Quodsi jam valor ipsius v atque z ex-
primatur per x ex hypothesi gravitatis;
prodibit æquatio ad curvam projectio-
nis specialem.

In hypothesi *Galileana*, $v = \sqrt{HP}$
 $= \sqrt{(a + x)}$, & $z = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$
(§. 87). Substitutis itaque hisce va-
loribus in æquatione differentiali ge-
nerali; prodit specialis

$$dy = \frac{bdx \sqrt{(a + x - x)}}{(b - x) \sqrt{x}} = \frac{bdx \sqrt{a}}{(b - x) \sqrt{x}}$$

Pendet adeo constructio hujus Curvæ a
quadratura alterius curvæ, cujus abscis-
sa x , semiordinata vero $ab \sqrt{a} : (b - x) \sqrt{x}$
 $= a^2 b : (b - x) \sqrt{ax}$. Nimirum si
areæ hujus Curvæ dividuntur per a ,
seu rectam AH, unde projectile acqui-
rit celeritatem qua a vi impressa mo-
vetur; prodeunt arcus respondentes AN
eo modo, quem jam exposuimus, cum
de Curva Isochrone in hypothesi direc-
tionum in centro Telluris convergen-
tium ageremus (§. 336). Construi-
tur autem curva, a cujus quadratu-
ra pendet constructio Curvæ projectio-
nis, ope parabolæ circa axem AC, para-
metro AH descriptæ, ut semiordinata
abscissæ AP respondens sit $\sqrt{ax} = PS$.
Est enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam
proportionalem, & ut CP ad CA ita

Tab. XVI. tertia hæc proportionalis ad femiordinatam Curvæ quadrandæ;

Fig. 160. Fiat $b = \infty$: quo in casu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x , respectu b , $= 0$, adeoque $b - x = b$, consequenter

$$\begin{aligned} dy &= \frac{b dx \sqrt{a}}{(b-x) \sqrt{x}} = \frac{b dx \sqrt{a}}{b \sqrt{x}} \\ &= \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1/2} x^{-1/2} dx \\ y &= 2 a^{1/2} x^{1/2} = 2 \sqrt{ax} \\ \hline y^2 &= 4ax \end{aligned}$$

Tab. XVI. Fig. 160. Est igitur Curva projectionis in hoc casu Parabola (§. 388 *Analys. fin.*), quemadmodum ante reperimus (§. 516), & parameter 4a est quadrupla altitudinis AH unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem qua projicitur; prouti supra demonstratum fuit (§. 516).

SCHOLIUM.

519. Curva projectionis Trajectoria appellari solet, qua denominatione quoque utitur NEWTONUS.

CAPUT XII.

De Motu Corporum ex Percussione.

DEFINITIO LV.

520. **C**orpus perfecte durum est, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO LVI.

521. Corpus molle est, quod ab ictu figuram pristinam amittit; ut argilla, sebum, cera.

DEFINITIO LVII.

522. Corpus elasticum est, quod ab ictu figuram quidem mutat, sed vi propria in eandem rursus restituitur. Talis est ensis, qui ad ictum incurvatur, sed statim resilit in figuram pristinam.

DEFINITIO LVIII.

523. Corpus unum in alterum directe impingere dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

524. Sphæra igitur A directe in alteram Tab. B impingit, si linea directionis centra IV. utriusque jungit (§. 38 *Analys. infinit.*). Fig. 53

DEFINITIO LIX.

525. Corpus unum in alterum indirecte vel oblique impingere dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum obliquam.

DEFINITIONES

DEFINITIO LX.

526. *Centrum percussioneis est punctum in quo ictus est maximus.*

AXIOMA VIII.

527. *Actioni æqualis, sed contraria est reactio.*

SCHOLION.

528. Hoc Legum motus principium ab Experimentia petitur & a celeberrimo NEWTONO (a) his exemplis illustratur. „ Si quis, „ inquit, lapidem digito premit, premitur „ & huius digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur „ etiam & equus æqualiter in lapidem: „ nam funis utrinque distensus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem ac lapidem versus equum, „ tantumque impedit progressum unius, „ quantum promovet progressum alterius. „ Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutue) subibit.

THEOREMA LXXII.

529. *Effectus pleni sunt Viribus causarum suarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit (§. 25); Vis determinata indifferens non est, adeoque ipsi determinata effectus quantitas ex necessitate respondet. Quare si vis V ut V, seclusa omni vi alia, sive adjuvante, sive impediante, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E

ut E producet, consequenter vis mV ut mV (ubi m notat multipulum aut submultipulum ipsius V) producet effectum mE ut mE . Est igitur $V : mV = E : mE$ (§. 149 Arithm.) hoc est, Effectus pleni sunt Viribus suarum causarum proportionales. Q. e. d.

COROLLARIUM.

530. Vires igitur motum producentes, si fuerint æquales, eandem motus quantitatem producant (§. 530), addendum mobili secundum eandem directionem progredienti (§. 76), subtrahendum vero, si secundum contrariam progredi nitatur (§. 77).

THEOREMA LXXIII.

531. Si corpus unum A in alterum Tab. B, vel quiescens, vel tardius motum secundum eandem directionem, vel etiam Fig. 53. secundum contrariam ipsi obvium factum, impingat; summa motuum in corporibus secundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias, eadem erit ante & post ictum.

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem; sitque quantitas motus ipsius $A = a$, ipsius $B = b$: erit summa motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipsius B juxta ejusdem directionem in conflictu; incrementum quoddam motus efficit (§. 22). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 528); ob contrarias virium æqualium directiones, tantum motus subtrahitur ex A, quantum additur ipsi B (§. 531). Unde si

(a) Princip. Mathem. Philos. Natural. pag. 13. Conf. Cosmologia nostra generalis. §. 316, 346.

quantitas motus ipsius B fuerit post ictum $= b + c$; erit quantitas motus ipsius A post ictum $= a - c$. Summa igitur motuum $b + c + a - c = b + a$, eadem post ictum, quæ ante ictum.

Si B quiescit, erit motus quantitas ante ictum $= 0$, adeoque motuum summa $= a$. Sed si post ictum quantitas motus ipsius B $= c$, *per demonstrata* quantitas motus ipsius A $= a - c$. Unde denuo summa motuum eadem ante & post ictum, hoc est $= a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipsius B, qua efficitur motus $a + c$, destruitur quantitas motus a & efficitur motus, secundum directionem contrariam impulsus corporis A, $= c$, *per demonstrata*. Differentia igitur motuum post ictum in corporibus B & A secundum contrarias directiones motus $= b + c + a - c$, eadem est quæ summa ante ictum $a + b$.

Si $c = a$, reactione ipsius B destruitur motus in A; adeoque corpus A quiescit, & B versus eandem plagam solum progreditur. Unde denuo summa motuum post ictum $a + b + 0$ æquatur summæ ante ictum $a + b$.

Si corpora A & B sibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a - b$. Sit post conflictum quantitas motus ipsius B $= c$: destruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c . Reactione igitur ipsius B in A destruitur motus $b + c$, adeoque post conflictum remanet motus $a - b - c$. Quodsi $a > b + c$, progrediuntur A & B post conflictum iuxta eandem directionem, estque summa motuum $a - b - c + c$, eadem quæ differentia $a - b$ ante ictum.

Quodsi $c + b > a$, destruitur reactione ipsius B $= c + b$ motus a & efficitur secundum contrariam directionem motus $c + b - a$, adeoque B & A resiliunt secundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum post ictum $c - c - b + a$ eadem est, quæ fuerat ante ictum $a - b$.

Denique si $b + c = a$, reactione ipsius B destruitur motus totus in A, qui adeo post ictum $= 0$. Unde summa motuum $c = a - b$, eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA LXXIII.

532. Si duo corpora A & B, pondere æqualia & non elastica, æqualibus celeritatibus lata, sibi mutuo occurrunt, post ictum ambo quiescunt.

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B massæ atque celeritates æquales sint, *per hypoth.* motuum quantitates æquales sunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla est. Quodsi post ictum secundum eandem directionem progredierentur; summa motuum deberet esse nulla (§. 532): secundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum secundum contrarias se mutuo urgeant eadem vi, nec ulla sit ratio, cur a se invicem resiliant, *per hypoth.* secundum directiones contrarias moveri nequeunt. Post ictum ergo ambo quiescunt. Q. e. d.

THEOREMA LXXIV.

533. Si corpus elateris expers A in aliud itidem non elasticum B directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; post ictum ambo eadem celeritate moventur; secundum eandem directionem.

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B, sive quiescens, sive segnius motum; urgebit ipsum secundum directionem suam, adeoque, cum nulla adsit ratio, cur a se invicem resiliant, per hypoth. si A vincat, B necessario movebitur secundum directionem ipsius. Quod erat unum.

Quod si jam A & B secundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam insequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiscitur, quam habet ipsum A, motui ejus non amplius resistit, adeoque fugit; consequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. Quod erat alterum.

THEOREMA LXXV.

534. Si corpus elateris expers A in aliud non elasticum B quiescens directe incurrat; celeritas post ictum est ad celeritatem ante ictum, ut pondus ipsius A ad ponderum A & B summam.

DEMONSTRATIO.

Sit massa ipsius $A = M$, alterius $B = m$, celeritas prioris $= C$: erit quantitas motus ipsius $A = MC$ (§. 22), ipsius B vero nulla; adeoque motuum summa post ictum $= MC$ (§. 532); consequenter celeritas $= MC : (M + m)$

(§. 22). Est adeo ut $M + m$ ponderum summa ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. Q. e. d.

COROLLARIUM.

535. Quod si corpora A & B fuerint ejusdem ponderis, erit $M = m$, adeoque celeritas post ictum $= MC : 2M = \frac{1}{2}C$. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA LXXVI.

536. Si corpus elateris expers A in aliud non elasticum B tardius motum secundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas post ictum equalis motuum summa per ponderum summam divisa.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & m , celeritates C & c ; erit motus quantitas ante conflictum MC & mc (§. 22), adeoque summa eorundem $MC + mc$: quæ cum eadem sit post conflictum (§. 532), erit celeritas communis corporum A & B post eundem $(MC + mc) : (M + m)$ (§. 22). Q. e. d.

COROLLARIUM.

537. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit $M = m$, adeoque celeritas post ictum $M(C + c) : 2M = (C + c) : 2$, seu semisumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA LXXVII.

538. Si duo corpora non elastica, pondere æqualia, diversis celeritatibus lata, sibi mutuo directe occurrant; post conflictum feruntur celeritatum semidifferentia, qua movebantur ante ictum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit massa communis $= M$, celeritates sint ut C & c ; erit differentia motuum $M(C - c)$; cui cum æqualis sit post conflictum summa eorundem (§. 532), erit celeritas communis $= M(C - c) : 2M = (C - c) : 2$, hoc est, æqualis velocitatum ante impactum semidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

538. Si duo corpora non elastica A & B iis celeritatibus sibi mutuo directe occurrant, quæ sunt reciproce ut pondera eorundem; ambo post ictum quiescunt.

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m , celeritates C & c ; quoniam $M : m = c : C$, per hypoth. erit $mc = MC$; adeoque motuum differentia ante conflictum nulla (§. 22). Ergo summa motuum post ictum cum nihilo æqualis sit (§. 532); nullus quoque post ictum erit motus, hoc est, ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXIX.

539. Si duo corpora non elastica A & B eadem celeritate sibi mutuo directe occurrant; erit celeritas post impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad summam eorundem.

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas $= C$, massæ corporum A & B ut M & m ; erit differentia motuum ante impactum $(M - m)C$ (§. 22). Huic cum æqualis sit summa

motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem $= (M - m)C : (M + m)$ (§. 22), hoc est, ut ponderum summa ad differentiam eorundem, ita celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

540. Si duo corpora non elastica A & B quacunque celeritate sibi mutuo directe occurrant; erit celeritas post ictum æqualis semidifferentiæ motuum per summam ponderum divisa.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & m , celeritates C & c ; erit differentia motuum ante ictum $MC - mc$ (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 22). *Q. e. d.*

PROBLEMA XCIX.

541. Determinare partem motus in conflictu amissam a fortiori.

RESOLUTIO.

1. Celeritas, quam movetur corpus ante conflictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus ante conflictum (§. 22).
2. Similiter celeritas, qua idem fertur post conflictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus post conflictum (§. cit.)
3. Quodsi motuum quantitatem posteriorem a priori auferas, relinquetur pars amissa.

Ex. gr.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis sibi mutuo occurrant celeritatibus C & c , erit celeritas post conflictum $= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo motus quantitas post conflictum est $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Motus ergo amissus est $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Quare motus integer ad partem amissam ut MC ad $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$, hoc est, ut $2C$ ad $C - c$, seu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

542. *Hac ergo methodo inveniri possunt Theoremata de quantitate motus in conflictu amisso & inde magnitudinem ictus æstimare licet.*

DEFINITIO LXI.

543. *Impetum cum LEIBNITIO (a) appello quantitatem motus, seu id quod efficitur ducendo massam in celeritatem (§. 22), quodque adeo vi mortuæ æquipollet (§. 278).*

AXIOMA IX.

544. *Si corpus aliquod non elasticum in obicem qui cedere nequit impingit; motus omnis cessat.*

COROLLARIUM.

545. *Si ergo corpus quoddam non elasticum in obicem cedere nescium impingit; impetum omnem amittit (§. 543.)*

SCHOLION.

546. *Propositio per experientiam satis manifesta, ut adeo eam instar Axiomatis sumere licuerit; nec opus sit ex notione elasticis deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA LXXXI.

547. *Centrum percussioneis idem est cum centro oscillationis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

(a) In Actis Erudit. A. 1695. p. 174.

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percussioneis est punctum, in quo colligitur impetus omnis, seu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 527). Invenitur adeo si impetus partium considerentur instar ponderum ad lineam inflexilem ac gravitatis expertem applicatorum, hoc est, dividendo summam factorum ex impetibus partium in distantias a puncto suspensionis per summam impetuum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oscillationis (§. 431). Ergo centrum oscillationis idem est cum centro percussioneis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. Q. e. d.

SCHOLION.

548. *Quæ igitur supra de centro oscillationis dicta sunt, eadem quoque de centro percussioneis valent, si grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA LXXXII.

549. *Centrum percussioneis idem est cum centro gravitatis, si corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur, seu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim sunt facti ex ponderibus in celeritates (§. 543). Quare si æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde est ac si eorum æque-multiplicia sumas. Sed æquiponderantium æque-multiplicia quoque æquiponderant (nam si A æquiponderet ipsi B etiam $2A$ ipsis $2B$ & in genere mA ipsis mB æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis

vitatis impetus æquivalentes disponuntur, consequenter centrum gravitatis cum centro percussionis in hoc casu coincidit.

DEFINITIO LXII.

Tab. 550. *Angulus Incidentiæ* DCA est
IV. quem linea directionis corporis impin-
Fig. 52. gentis DC efficit ad punctum contactus C.

DEFINITIO LXIII.

551. Quodsi post ictum corpus reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi CE efficit ad punctum contactus, unde resilit.

THEOREMA LXXXIII.

552. *Ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ DCA.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipsum obicem, si superficies plana, aut in rectam quæ eundem in contactu C tangit, si superficies curva; & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivaleret viribus juxta directiones DH & DG agentibus (§. 241. 245.) Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, sed tantum alteri DG; perinde est ac si corpus D tantum percuteret obicem vi secundum DG agente. Æstimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amisso (§. 541); impetus vero ex quantitate motus (§. 543); adeoque cum

corpus idem sit, ex celeritate (§. 49), Tab. consequenter ex longitudine linearum IV. DG, DH, DC (§. 247). Est adeo Fig. 52. impetus corporis D per DC ad impetum per DG, ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, destruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonstrat.* si vero perpendiculariter seu directe impingeret, destrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc est, per DC (§. 241). Est ergo ictus perpendicularis ad obliquum, ut DC ad DG. Sed si DC sumatur pro sinu toto, erit DG sinus anguli incidentiæ DCG (§. 2 Trig.). Ictus itaque perpendicularis, ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIV.

553. *Elater est aqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elasticum adhuc ulterius comprimi aut tendi potest, nec tamen comprimitur aut tenditur, *per hypoth.* Ergo tanta vi resistit, quanta comprimitur vel tenditur (§. 75). Resistit autem vi elateris (§. 522), adeoque elater æqualis est vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elasticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA LXXXV.

555. *Si corpus H in obicem AB quæ cedere nescit directe impingat, sitque vel*
mirum

Tab. *utrumque vel alterutrum elasticum ;*
IV. *eadem celeritate reflectitur per eandem*
Fig. 52. *rectam CH, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, tota vis corporis B in resistantiam obicis frangendam insumeretur, motusque cessaret (§. 544). Ergo vis omnis impenditur in compressionem corporis elastici, atque adeo hoc acquirit vim elasticam isti æqualem (§. 553). Cum igitur elater, absumpta vi comprimente, corpus reducat in statum pristinum, eadem vi illud repellit qua impegerat; consequenter hoc eadem celeritate resilit. Et quoniam corpus elasticum se restituit secundum directionem secundum quam compressum fuerat; (nulla enim adest ratio; quæ directionem immuter); corpus resilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXVI.

556. *Si corpus elasticum D oblique impingit in obicem AB qui cedere nescit; ita post ictum resilit, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione Theorematis 83 (§. 552) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH, & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo post ictum remaneat vis per DH sive CF, & per vim elasticam recuperetur vis per DG sive CH (§. 555); corpus post ictum iisdem viri-

bus urgetur per CF & CH quibus Tab. urgebatur ante conflictum; adeoque IV. motu composito describet rectam CE Fig. 52. dato tempore ipsi DC æqualem (§. 241), eruntque eodem tempore HE & DH æquales, utpote ab eadem vi descriptæ. Sunt igitur $\triangle\triangle$ DCH & ECH æqualia, angulique cognomines æquales (§. 204 Geom.); consequenter cum $HCA = HCF$ (§. 65 Geom.) $DCA = ECF$ (§. 91 Arithm.). *Q. e. d.*

PROBLEMA C.

557. *Determinare angulum ECF; sub quo resiliere debet corpus in C oblique impingens, ut ex D in E via brevissima perveniat; supposita nempe reflexione in C.*

RESOLUTIO.

Demissis ex D & E perpendicularibus DG & EF; fiat $DG = a$, $EF = b$, $FG = c$, $CG = x$, erit $CF = c - x$, $DC^2 = aa + xx$, $CE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Quoniam DC + CE est minimum aliquid, per hypoth. fiat (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$\sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = y$$

$$\text{erit } \frac{xdx}{\sqrt{(aa + xx)}} + \frac{xdx - cdx}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}} dy = 0$$

$$x\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)} + (x - c)\sqrt{(a^2 + x^2)} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)} = (c - x)\sqrt{(a^2 + x^2)}$$

hoc est, CG. CE = CF. CD
Est itaque CG : CD = CF : CE (§. 299 *Arithm.*) Jam si punctum E supponatur

Tab. in recta ipsi AB parallela : erit EF
IV. = DG (§. 226 *Geom.*); adeoque si DC
Fig. 52. sumatur pro sinu toto, erit GC sinus
anguli GDC, & si CE sumatur pro sinu
toto, erit CF sinus anguli CEF (§. 2
Trigon.). Sunt ergo GC & CF arcuum
similium sinus (§. 12 *Trigon.*); adeo-
que anguli GDC & CEF (§. 141
Geom.), consequenter & eorum com-
plementa ad rectos DCG & ECF (§.
246 *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D post impac-
tum in C ita resilit, ut angulus reflexionis
ECF sit æqualis angulo incidentiæ DCG
(§. 557); ex D in E, supposita reflexio-
ne in C, via brevissima pervenit.

PROBLEMA CI.

559. Determinare punctum C, in
quod impingere debet corpus D, ut resi-
liens incurrat in corpus L.

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendi-
culum = a . Dato puncto L, datur LI
= b , consequenter GI = c . Fiat GC
= x , erit CI = $c - x$. Et quia angu-
lus LCI = DCG (§. 557), G vero &
I recti; per constr. erit (§. 257 *Geom.*).

$$DG : LI = GC : CI$$

$$a : b = x : c - x$$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§. 190
Arithm.) hoc est; $DG + LI : DG$
= $GI : GC$.

THEOREMA LXXXVII.

560. Si corpus elasticum A in aliud
quiescens B eidem æquale directe incurrat;
post ictum quiescet A, & B movebitur ea
celeritate, qua ante ictum ferebatur A.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non essent elastica, utrum-
que post ictum moveretur secundum
eandem directionem celeritate dimidia
(§. 536). Sed cum vis elastica secun-
dum eam directionem agat, secundum
quam facta est compressio, sitque vi
comprimenti æqualis (§. 553); dimi-
dia celeritate repellit A; adeoque mo-
tum ejus sistit; B vero dimidia celeritate
ulterius impellit adeoque motum ejus
accelerat (§. 76). Fertur itaque post
ictum celeritate integra, qua ante ictum
ferebatur A, & A quiescit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

561. Cum adeo A omnem suam vim Tab.
transferat in B, B eodem modo eandem IV.
in C, C rursus in D, & D tandem in E trans- Fig. 54
ferre debet. Quare si fuerint plura cor-
pora elastica pondere æqualia & se mutuo
tangencia; atque A impingat in B; quief-
centibus omnibus intermediis, movetur
ultimum E ea celeritate, qua impegerat A.

THEOREMA LXXXVIII.

562. Si duo corpora elastica A & B;
pondere æqualia, celeritate æquali sibi mu-
tuo directe occurrant; utrumque resiliet;
ea celeritate & secundum eam directio-
nem qua advenerat.

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, ambo quiescerent
(§. 533). Omnis ergo vis in compres-
sione consumitur. Huic adeo cum æqua-
lis sit vis elastica, qua resiliunt secundum
directio-

directionem, qua advenerant (§. 553); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem pristinæ æqualem producit. Resiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIX.

563. Si duo corpora elastica A & B, pondere aqualia, celeritate inæquali sibi mutuo directe occurrant; post ictum celeritatibus permutatis feruntur.

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus $C + c$ & C . Quodsi eadem celeritate C concurrerent, A & B post ictum moveretur celeritate C (§. 562). Si B quiesceret, & A celeritate c in ipsum incurreret, post ictum quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo excessus celeritatis c , quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B; adeoque ipso peracto, A movetur celeritate C , B vero celeritate $C + c$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

564. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se invicem accedebant.

THEOREMA XC.

565. Si corpus elasticum A in aliud æquale B segnius motum incurrat; post ictum ambo, permutatis celeritatibus, feruntur secundum eandem; nempe pristinam, directionem.

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate $C + c$ in B celeritate C motum. Quoniam ob ce-

leritates C & C æquales nullus fit impulsus, perinde est ac si A sola celeritate c in B quiescens impingeret. Tum vero quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo post ictum A movebitur sola celeritate C , B vero celeritate $C + c$, & utrumque quidem secundum pristinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

566. Post ictum eadem celeritate à se invicem discedunt, qua ante ictum ad se mutuo accedebant.

THEOREMA XCI.

567. Si corpus A in alterum B incurrit; ictus idem est, qui fieret a corpore A in B quiescens cum differentia velocitatum incurrente.

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m , celeritates C & c , erit celeritas communis post impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 537), adeoque impetus ipsius A $= (M^2 C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543); consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2 C + Mmc) : (M + m)$ $= (M^2 C + MmC - M^2 C - Mmc) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C - c$; erit celeritas post ictum $= (MC - Mc) : (M + m)$ (§. 535); adeoque impetus $(M^2 C - M^2 c) : (M + m)$ (§. 543), consequenter per ictum amissus $MC - Mc - (M^2 C - M^2 c) : (M + m) = (M^2 C - M^2 c + MmC - Mmc - M^2 C + M^2 c) : (M + m)$ $= MmC - Mmc - M^2 C + M^2 c : (M + m)$ $= Mm(C - c) : (M + m)$

$= Mm (C - c) : (M + m)$. In utroque igitur casu idem impetus amittitur, consequenter ictus idem est (§. 541).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§. 553); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA XCII.

569. Si duo corpora A & B sibi mutuo occurrunt; ictus idem contingit, qui fieret a corpore A in B quiescens cum summa velocitatum impingente.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis post impactum $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540); adeoque impetus ipsius A seu fortioris $(M^2 C - Mmc) : (M + m)$, consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2 C - Mmc) : (M + m) = (M^2 C + Mmc - M^2 C + Mmc) : (M + m) = (Mmc + Mmc) : (M + m) = Mm (C + c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C + c$, erit celeritas post ictum $= (MC + Mc) : (M + m)$ (§. 535); adeoque impetus $(M^2 C + M^2 c) : (M + m)$ (§. 543); consequenter impetus per ictum amissus $MC + Mc - M^2 C + M^2 c : (M + m) = (M^2 C + M^2 c + Mmc - M^2 C - M^2 c) : (M + m) = (Mmc + Mmc) : (M + m) = Mm (C + c) : (M + m)$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

570. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§. 553), in corpora A & B cum summa velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA CII.

571. Determinare celeritatem corporum elasticorum quorumcunque A & B celeritatibus quibuscunque directe concurrentium.

RESOLUTIO.

I. Si corpora A & B in eadem plagas tendant; post ictum, vi sola impulsus, secundum eandem moventur celeritate communi $(MC + mc) : (M + m)$ (§. 537). Accedat jam vis elastica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C - c$ (§. 568), adeoque, cum in momento ictus A & B corpus unum constituent, eandem ita distribuit, ut celeritates post ictum à vi elastica acquisitæ sint in ratione massarum reciproca. Sit ergo celeritas ipsi B acquisita $= x$, erit

$$\begin{array}{r} M : m = x : C - c - x \\ \hline MC - Mc - Mx = mx \\ \hline MC - Mc = Mx + mx \\ \hline (MC - Mc) : (M + m) = x \end{array}$$

Hinc celeritas ipsi A acquisita $= C - c - (MC - Mc) : (M + m) = (MC - Mc + mC - mc - MC + Mc) : (M + m) = (mC - mc) : (M + m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius; celeritas hæc subtrahenda est ab ea quæ per solum impulsu acquiratur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat; celeritas hæc addenda est priori per impulsu solum acquisitæ (§. 76). Unde tandem prodit celeritas ipsius A $= (MC + mc - mC + mc) : (M + m) = (MC - mC + 2mc)$

Tab.
IV.
Fig. 53

$2mc) : (M + m)$, & ipsius $B = (MC + mc + MC - Mc) : (M + m) = 2MC + mc - Mc : (M + m)$.

Ex. gr. Sit $M = 6$ librarum, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 + 16) : (6 + 4) = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$, & ipsius $B = (36 + 8 - 12) : 10 = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B versus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M = 2$, $m = 6$, $C = 4$, $c = 1$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (8 - 24 + 12) : (2 + 6) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; celeritas ipsius $B = (16 + 6 - 2) : (2 + 6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipsius A negativa prodeat, id indicio est, celeritatem per actionem elateris acquisitam esse majorem celeritate per impulsu acquisita, adeoque corpus A resilire post ictum. Post conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia sibi mutuo occurrant, in conflictu per impulsu solum utriusque acquiritur celeritas $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540). Cum vis elastica in corpora, quæ inter se colliduntur, agat cum celeritate $C + c$ (§. 570); si celeritas ipsi B inde acquisita sit x , erit, vi superiorum,

$$M : m = x : C + c - x$$

$$\frac{MC + Mc - Mx}{MC + Mc} = mx$$

$$MC + Mc = Mx + mx$$

$$(MC + Mc) : (M + m) = x$$

Hinc celeritas, quæ ipsi A acquiritur, $C + c - (MC + Mc) : (M + m) = (MC + mC + Mc + mc - MC - Mc) : (M + m) = (mC + mc) : (M + m)$. Unde tandem, ut ante, prodit celeritas ipsius $A = (MC - mc - mC - mc) :$

$(M + m) = (MC - mC - 2mc) : (M + m)$; celeritas vero ipsius $B = (MC - mc + MC + Mc) : (M + m) = (2MC + Mc - mc) : (M + m)$. Quodsi $mC + 2mc > MC$; celeritas ipsius A est negativa; quod ostendit, vim elasticam esse impulsu superiorem, adeoque corpus A resilire, nec progredi cum resiliente B .

Ex. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 - 16) : 10 = -1$, & ipsius $B = (36 + 12 - 8) : 10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A cum uno.

COROLLARIUM I.

$$\begin{aligned} 572. \text{ Quoniam } \frac{MC - mC + 2mc}{M + m} &= \\ \frac{MC + mC - 2mC + 2mc}{M + m} &= C - \frac{2mC - 2mc}{M + m} \\ \& \frac{2MC + mc - Mc}{M + m} &= \frac{Mc + mc + 2MC - 2Mc}{M + m} \\ &= c + \frac{2MC - 2Mc}{M + m}; \text{ atque } \frac{2MC - 2Mc}{M + m}; \\ \& \frac{2mC - 2mc}{M + m} &\text{ sunt celeritates, quæ se} \end{aligned}$$

habent ad celeritatum differentiam ante impactum (quæ celeritas respectiva dicitur), ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum summam; si corpus elasticum A in aliud B , sive quiescens, sive tardius motum incurrat; invenitur celeritas post impactum corporis A , ubi fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius B , ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ ex celeritate ipsius A ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum. Celeritas vero ipsius B reperitur, si fiat; Ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius A , ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, qua addita celeritati ipsius B prodit celeritas hujus post impactum.

COROL.

COROLLARIUM II.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$
 $= \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$
 & $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m}$
 $= \frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c$, atque $\frac{2mC + 2mc}{M + m}$ &
 $\frac{2MC + 2Mc}{M + m}$ sunt celeritates, quæ se ha-

bent ad celeritatum ante impactum summam (quæ celeritas respectiva dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem summam; si duo corpora elastica A & B sibi mutuo occurrant invenitur post impactum corporis A celeritas, ubi fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius B, ita celeritatum ante impactum summa ad celeritatem quæ ex celeritate ipsius A ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum. Celeritas vero ipsius B invenitur, si fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius A ita summa celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua subducta celeritas ante impactum relinquit eam, quæ inest post eundem.

THEOREMA XCIII.

574. Si corpus elasticum A directe impingit in aliud quiescens B; erit celeritas ejus post conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad summam eorundem: quam vero communicat cum B, ea ad eandem est, ut duplum pondus ipsius A ad ponderum summam.

DEMONSTRATIO.

Si B non quiescit, celeritas ipsius A post ictum est $(MC - mC + 2mc)$:

$(M + m)$, (§. 571). Si vero quiescit, celeritas ejus ante conflictum nulla est, adeoque $c = 0$. Quare cum in hoc casu fiat $2mc = 0$, erit celeritas ipsius A post impactum $= (MC - mC) : (M + m)$. Est itaque ad C celeritatem ante conflictum, ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem summam. *Quod erat unum.*

Similiter si B non quiescit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc) : (M + m)$, (§. 571). Jam si quiescit, celeritas ejus nulla est, adeoque $c = 0$; consequenter $mc = 0$ & $Mc = 0$. Quare celeritas ipsius B post conflictum $= 2MC : (M + m)$. Est igitur ad celeritatem ipsius A ante conflictum, ut duplum ponderis A ad summam ponderum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

575. Erit ergo, ex æquò, post conflictum velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B, ut differentia ponderum ad duplum ipsius A (§. 196 Arithm.)

THEOREMA XCIV.

576. Si duo corpora elastica A & B sibi mutuo directe occurrunt, cum celeritatibus quæ ipsorum ponderibus reciproce proportionales sunt; post conflictum eadem celeritate a se invicem resiliunt qua advenerant.

DEMONSTRATIO.

Post conflictum celeritas ipsius A est $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$, & celeritas ipsius B est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$ (§. 571). Est vero $M : m = c : C$ per *hypoth.* adeoque $mc = MC$ (§. 297 *Arithm.*) Quod si ergo, in expressione celeritatis ipsius A, pro $2mc$ substituas $2MC$, prodibit $(-mC - MC) : (M + m) = -C$. Resilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum.*

Quod si similiter, in expressione celeritatis ipsius B, pro $2MC$ substituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc) : (M + m) = c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XCV.

577. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; differentia celeritatum tam ante quam post impulsus eadem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit eorum differentia $= C - c$, & corpus M, quod sequitur, in alterum m incurrit. Celeritas igitur ipsius M post conflictum $= \frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$; ipsius autem m $= \frac{mc + 2MC - Mc}{M + m}$; & quoniam post conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius m minor est; consequenter celeritatum differentia post conflictum

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

$$\frac{mc + 2MC - Mc - MC - 2mc + mC}{M + m} = \frac{MC - Mc - mc + mC}{M + m} = C - c.$$

Est adeo celeritatum differentia post conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVI.

578. Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem plagam moventur; post conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum aequalis est summa celeritatum post eundem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit differentia earundem $C - c$. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur per *hypoth.* in alterum m incurrit; & post conflictum M & m moventur in plagas contrarias per *hypoth.* celeritas vi elastica producta in M major est celeritate ex ictu, utpote qua M cum m in eandem plagam progrediebatur (§. 534). Celeritas igitur in corpore M negativa est adeoque $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$

& in corpore m $= \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$

(§. 571); consequenter summa celeritatum post conflictum $= \frac{MC + mC - Mc - mc}{M + m}$

$= C - c$. Est ergo summa celeritatum post conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. *Q. e. d.*

T

THEO.

THEOREMA XCVII.

579. Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur; summa celeritatum ante conflictum aequalis est differentia earum post eundem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c : erit summa earundem $C + c$. Quoniam corpora sibi mutuo occurrunt & post conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit post conflictum celeritas corporis M

$$= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}, \text{ \& corporis } m \\ = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m} \text{ (§. 571). Est}$$

$$\text{vero differentia harum celeritatum} \\ = \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c,$$

quæ eadem cum summa celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVIII.

580. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; summa celeritatum ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & m celeritates ante conflictum C & c ; erit earum summa $C + c$. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, adeoque sibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis m

$$= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m} \text{ (§. 571). Enim-}$$

vero corpus M post conflictum in par-

tem ei contrariam movetur, in quam ante eundem tendebat *per hypoth.* adeoque $mC + 2mc > MC$, seu celeritas post conflictum negativa, consequenter

$$= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m} \text{ (§. cit.) Est igitur}$$

$$\text{summa celeritatum post conflictum} \\ = \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c;$$

adeoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCIX.

581. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; quantitas motus ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in corpus m celeritate c motum: erit celeritas illius post conflictum

$$\frac{MC + 2mc - mC}{M + m}, \text{ \& hujus ce-}$$

$$\text{leritas } \frac{2MC + mc - Mc}{M + m} \text{ (§. 571), con-}$$

$$\text{sequenter quantitas motus corporis } M \\ \text{post conflictum} = \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M + m}$$

$$\text{\& corporis } m = \frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}.$$

$$\text{Est itaque summa motuum post con-} \\ \text{flictum} = \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M + m}$$

$$= MC + mc \text{ (§. 22). Enimvero quan-} \\ \text{titas utriusque corporis ante conflictum}$$

in

in unam summam collecta erat itidem $MC + mc$ (§. cit.). Quamobrem patet quantitatem motus ante & post conflictum esse eandem. Q. e. d.

THEOREMA C.

582. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur per hypoth. sibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M + m}$, & cum

corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, qua advenerat, erit celeritas corporis M post conflictum $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$. Quare quan-

titates motuum in corporibus M & m sunt $\frac{MmC + 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M + m}$; consequenter eorum differentia

$$= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M + m}$$

$= MC - mc$. Est vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem. Q. e. d.

THEOREMA CI.

583. Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem partem, post con-

fliktum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus post conflictum est equalis summa earundem ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, corpus unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in alterum m celeritate c motum; erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$. Quo-

niam vero corpus M movetur post conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, adeoque celeritas positiva evadet $mC - 2mc - MC$ (§. 571). Sunt

igitur quantitantes motus post conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$; adeoque differentia

$$\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M + m} = MC + mc.$$

Quare cum sit $MC + mc$ summa quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum post conflictum æqualis est summæ ante eundem.

THEOREMA CII.

584. Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in easdem moventur; summa motuum post eundem equalis est differentia eorundem ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, sibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post

$$\text{conflictum} = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}, \text{ \& cor-}$$

$$\text{poris } M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m} \text{ (§. 571).}$$

$$\text{Sunt adeo quantitates motus post con-} \\ \text{flictum} = \frac{2MmC + Mmc - m^2c}{M + m} \text{ \&}$$

$$\frac{M^2C - MmC - 2Mmc}{M + m}; \text{ consequen-}$$

$$\text{ter summa motuum post conflictum} \\ = \frac{M^2C + MmC - Mmc - m^2c}{M + m}$$

$= MC - mc$. Quoniam differentia motuum ante conflictum est $MC - mc$, summa motuum post eundem est æqualis differentię motuum ante eundem.

THEOREMA CIII.

585. *In conflictu corporum elasticorum, hoc solo in casu eadem conservatur motus quantitas, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & post conflictum in eandem plagam moventur, aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, post eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes, post eundem in eandem tendunt. Jam in hoc solo casu, quando corpora ante & post conflictum

in eandem plagam tendunt, summa motuum ante & post conflictum eadem (§. 581. & seqq.). In hoc igitur casu solo eadem conservatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit CARTESIUS, dum hanc statuit Naturę Legem, quod in omni corporum conflictu eadem semper conservetur motus quantitas.

SCHOLIUM.

587. *Ut idem evidentius appareat, ostendendum porro erit, quonam in casu quantitas motus augeatur, in quonam minuatur. Eo igitur fine addimus Theoremata proxime sequentia.*

THEOREMA CIV.

588. *In conflictu corporum elasticorum, quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum post conflictum est æqualis summę eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero summa motuum post conflictum est major differentia motuum post eundem: id quod ex terminis manifestum est (§. 61, 64 *Arithm.*). Quamobrem etiam summa motuum post conflictum major est summa eorundem ante conflictum (§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetur. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA CV.

589. *In conflictu corporum elastico-
rum, quantitas motus minuitur, quando
ante conflictum in partes contrarias, post
eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflic-
tum in partes contrarias, post eundem
in eandem feruntur; summa motuum
post conflictum æqualis est differentiæ
eorundem ante conflictum (§. 584).
Enimvero summa motuum ante con-
flictum major est differentiæ eorundem
ante conflictum: id quod ex terminis
manifestum (§. 61, 64 *Arithm.*). Er-
go summa motuum ante conflictum ma-
ior est summa motuum post eundem
(§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur mo-
tus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA CVI.

590. *Corpora elastica post conflictum
eadem celeritate a se invicem recedunt,
qua ante eundem ad se invicem accede-
bant.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in ean-
dem plagam moventur, & tardius
motum præcedit, celerius motum
sequitur, quemadmodum in conflic-
tu supponi debet; differentia celeri-
tatum ad se invicem accedunt. Quod-
si vero post conflictum itidem in ean-
dem plagam feruntur, differentia ce-
leritatum post conflictum est æqualis
differentiæ celeritatum ante eundem

(§. 577). Quoniam itaque tardius
motum sequitur, celerius motum
præcedit, quemadmodum ex actio-
ne elateris intelligitur, qua corpora,
vi ictus, eadem celeritate secundum
eandem directionem progressura (§.
534) a se invicem separantur (§.
571), adeoque differentia celerita-
tum a se invicem discedunt; post
conflictum ea celeritate a se invicem
recedunt, qua ante eundem ad se in-
vicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in ean-
dem plagam moventur, & tardius
motum præcedit, celerius motum
sequitur; differentia celeritatum ad
se invicem accedunt. Quodsi post
conflictum in diversas plagas ten-
dunt, summa celeritatum a se in-
vicem recedunt. Quare cum in hoc
casu summa celeritatum post conflic-
tum sit æqualis differentiæ ante eun-
dem (§. 578); eadem celeritate
etiam in hoc casu post conflictum a
se invicem discedunt, qua ante eun-
dem ad se invicem accedebant. *Quod
erat secundum.*

III. Quodsi duo corpora ante conflic-
tum in partes contrarias moventur
sibi mutuo occursura; summa cele-
ritatum ad se invicem accedunt.
Quodsi post conflictum tendant in
eandem, cum celerius motum præ-
cedat, tardius motum sequatur, vi
eorum quæ n. I. dicta sunt, differen-
tia celeritatum a se invicem rece-
dunt. Est vero differentia celerita-
tum post conflictum æqualis summae
ante eundem (§. 579). Ergo cor-
pora

pora post conflictum eadem celeritate ad se invicem accedunt, qua post eundem a se invicem recedunt.

Quod erat tertium.

IV. Denique si duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura, & post conflictum in contrarias a se invicem discedunt; summa celeritatum ante conflictum ad se invicem accedunt, post conflictum a se invicem recedunt. Est vero in hoc casu summa celeritatum ante & post conflictum eadem (§. 580). Ergo eadem celeritate post conflictum a se invicem recedunt, quo ante eundem ad se invicem accedunt. *Quod erat quartum.*

SCHOLIUM.

591. Hoc Theorema breviter ita enunciat: In conflictu corporum elasticorum, eadem semper conservatur celeritas respectiva. Hanc Propositionem alii inter leges motus referunt, ac inde regulas motus demonstrant.

COROLLARIUM.

592. Æqualibus igitur temporibus ante & post conflictum, æquales sunt corporum a se invicem distantia; veluti quo intervallo, uno minuto ante conflictum, corpora a se invicem distant, eodem, uno minuto post eundem, a se invicem distant.

THEOREMA CVII.

593. Si duo corpora elastica A & B directe concurrant, vel sibi mutuo occurrant; summa factorum ex massis in quadrata celeritatum ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

In concursu directo, celeritates post conflictum sunt $(MC - mC + 2mc) : (M + m)$, vel $(mC - 2mc - MC) : (M + m)$, & $(2MC - Mc + mc) : (M + m)$ (§. 571). Hinc quadrata earundem $(M^2C^2 + 4MmCc - 4m^2Cc + 4m^2c^2 + m^2C^2 - 2mMC^2) : (M^2 + 2Mm + m^2)$, & $(4M^2C^2 + 4MmCc - 2Mmc^2 + m^2c^2 - 4M^2Cc + M^2c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2)$; consequenter priore per M, posteriore per m multiplicato, prodit summa factorum ex massis in quadrata celeritatum $(M^3C^2 + 2Mm^2c^2 + 2M^2C^2m + M^2c^2m + Mm^2c^2 + m^3c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2) = MC^2 + mc^2$, quæ eadem est summa ex factis massarum in quadrata celeritatum ante conflictum. Idem cum eodem modo in occursum corporum directo ostendatur, quo celeritas corporis m est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$, corporis vero M est $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, vel $\frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (§. 571); patet propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. Eadem itaque in conflictu conservatur Virium vivarum quantitas (§. 325).

THEOREMA CVIII.

595. Si duo corpora elastica, celeritatibus per conflictum acquisitis, denuo in se invicem incurrere, vel sibi mutuo occurrere supponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates quas ante eundem habebant.

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum M & m , celeritates antè primum conflictum C & c , ac corpus M incurrat in alterum m : erunt post conflictum celeritates eorundem corporum

$$\frac{MC - mc + 2mc}{M + m} \text{ \& }$$

$$\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} \text{ (S. 571). Quo-}$$

niam celeritas corporis m major est celeritate alterius M post conflictum (S. cit.); mutatis directionibus corpus m in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A = m$, $B = M$,

$$\text{celeritas ipsius } A = V = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$$

$$\text{\& celeritas corporis } B = v = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}.$$

Erit igitur, post alterum conflictum celeritas corporis incurrentis

$$A = \frac{AV - BV + 2Bv}{A + B}, \text{ \& celeritas}$$

$$\text{alterius } B = \frac{2AV + Bv - Av}{A + B}. \text{ Jam}$$

$$AV = 2MmC + m^2c - Mmc$$

$$- BV = -2M^2C - Mmc + M^2c$$

$$+ 2Bv = 2M^2C - 2MmC + 4Mmc$$

$$\frac{AV - BV + 2Bv}{A + B} = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$$

Recuperat igitur corpus m , post conflictum alterum, celeritatem c quam ante primum habebat. *Quod erat unum.* Porro

$$\begin{aligned} 2AV &= 4MmC + 2m^2c - 2Mmc \\ + Bv &= + M^2C - MmC + 2Mmc \\ - Av &= - MmC + m^2C - 2m^2c \end{aligned}$$

$$\frac{2AV + Bv - Av}{A + B} = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$$

Recuperat itaque etiam corpus M , per conflictum alterum, celeritatem C quam ante primum habebat. *Quod erat secundum.*

Utrumque eodem modo ostenditur, si corpora duo sibi mutuo directa occurrant & mutatis directionibus post conflictum primum denuo sibi occurrere supponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO LXIV.

596. Si linea recta AB jungit centra gravitatis A & B duorum corporum, & punctum C ita eandem dividat, ut sit pondus corporis A ad pondus corporis B , uti reciproce BC ad CA ; dicetur punctum C *Centrum gravitatis corporum* A & B . Tab. I. Fig. 4.

SCHOLION.

597. Ratio denominandi patet ex iis, quæ superius (S. 144) demonstrata sunt.

THEOREMA CIX.

598. *Centrum gravitatis corporum elasticorum, ante & post conflictum vel quiescit, vel uniformiter seu eadem velocitate in eandem plagam movetur, & temporibus equalibus eodem intervallo ab eodem distant mobilia ante & post conflictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim, sumtis temporibus ante & post conflictum æqualibus, eadem est corporum A & B distantia, adeoque recta jungens eorum centra gravitatis AB eadem

eadem (§. 192 *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum sit : mobilia ab eodem æquali intervallo distare debent, sumtis ante & post conflictum temporibus æqualibus. *Quod erat primum.*

Fieri autem non potest ut eadem, ante & post conflictum temporibus æqualibus, sit corporum A & B a centro gravitatis distantia, nisi aut centrum istud quiescat, aut ante & post conflictum eodem modo moveatur : quod per se patet. Ergo centrum gravitatis ante & post conflictum vel moveri eodem modo, vel quiescere debet. *Quod erat secundum.*

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius est (§. 144); cum corpore majore, seu graviore, in eandem plagam, adeoque continuo juxta eandem directionem moveatur. *Quod erat tertium.*

Denique cum corporum motus sit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a se invicem recedentibus distantia, in accedentibus vero ad se invicem subdupla, subtripla, subquadrupla (§. 31); consequenter cum distantia a centro sint in constante ratione, nimirum ratione massarum reciproca (§. 596), eadem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in casu priori, aut subduplæ, subtriplæ, subquadruplæ in posteriori evadere debent (§. 178, 181 *Arithm.*). Quamobrem si centrum gravitatis movetur, spatia ab eo-

dem descripta temporum rationem habere, adeoque ipsum motu æquabili ferri (§. 31); consequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24) *Quod erat quartum.*

SCHOLIUM.

599. *Quod centrum gravitatis subinde quiescat, subinde moveri debeat, & quandonam quiescat, quandonam moveatur, patet ex Propositione sequente.*

THEOREMA CX.

600. *Si duo corpora elastica moveantur celeritatibus quæ sint massis seu ponderibus ipsorum reciproce proportionales, sibi que mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & post conflictum quiescit: in alio autem casu quocunque, non quiescit, sed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur per *hypoth.* spatia descripta eodem tempore continuo sunt ut celeritates quibus feruntur (§. 33), adeoque in ratione massarum reciproca (§. 167 *Arithm.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus distat in ratione massarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a distantis anterioribus continuo partes in ratione massarum reciproca, per *demonstrata*; adeoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ sunt itidem in ratione massarum reciproca (§. 188 *Arithm.*); consequenter centrum gravitatis in eodem loco constanter hæret (§. 596), & hinc ante con-

& hinc ante conflictum quiescit. Enimvero post conflictum celeritates eadem prorsus sunt quæ ante eundem fuerant (§. 590), adeoque itidem massis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur, ut ante, quod distantia continuo crescant a loco centri gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione massarum reciproca (§. 187 *Arithm.*); consequenter & post conflictum quiescit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo casu, eodem, quo ante, modo patet quod distantia a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decrescant, nec post conflictum crescant in ratione massarum reciproca; consequenter a loco isto continuo non distent corpora in ratione massarum reciproca (§. 188, 187 *Arith.*). Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco est (§. 596), consequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elastica æqualia eadem celeritate sibi mutuo occurrunt, celeritates quoque massis reciproce proportionales sunt; quod per se patet. Centrum gravitatis igitur ante & post conflictum quiescit, si corpora elastica æqualia æquali celeritate sibi mutuo occurrunt.

SCHOLIUM.

602. Nimirum casus hic specialis sub generali Theorematis actu continetur, ut dici non possit præter casum Theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quiescit. Ceterum Theorema præsens ita enunciari solet: Status centri gravitatis non mutatur ab
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

actione corporum in se invicem. Sunt quidam Philosophi, qui ut autoritatem CARTESII tueantur, eandem motus quantitatem conservari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & post conflictum movetur. Verum enim est quantitatem motus centri gravitatis ante & post conflictum esse eandem.

THEOREMA CXI.

603. Si corpora elastica sibi mutuo occurrunt; celeritas ab uno eorum amissa est ad celeritatem quam idem amitteret, si in alterum quiescens impingeret, ut summa celeritatum utriusque ad celeritatem ipsius impingentis.

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & m celeritatibus C & c sibi mutuo occurrant, erit illius celeritas post conflictum
$$= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$$

(§. 571); consequenter celeritas in conflictu amissa
$$= C - \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$$

$$= \frac{MC + mC - MC + mC + 2mc}{M + m}$$

$$= \frac{2mC + 2mc}{M + m}.$$
 Jam vero si corpus

M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret

$$= \frac{MC - mC}{M + m}$$
 (§. cit.) conse-

quenter celeritas amissa foret
$$C - \frac{MC - mC}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m}$$

$$= \frac{2mC}{M + m}.$$
 Est igitur celeritas in casu

V

priori

priori amissa ad celeritatem in posteriori amittendam ut $\frac{2mC+2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m}$ $= C+c:C$, hoc est, ut summa celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXII.

604. Si corpus elasticum unum in alterum incurrit; celeritas ab incurrente in conflictu amissa est ad celeritatem quam idem amitteret si in alterum quiescens impingeret, ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus m incurrit, quod celeritate c movetur, erit illius celeritas post conflictum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ (§. 571); adeoque celeritas in conflictu amissa $C - \frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ $= \frac{MC+mC-MC+mC-2mc}{M+m}$ $= \frac{2mC-2mc}{M+m}$. Enimvero si corpus M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $\frac{MC-mC}{M+m}$, adeoque celeritas amissa foret $C - \frac{MC-mC}{M+m} = \frac{MC+mC-MC+mC}{M+m}$ $= \frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu

priori amissa ad celeritatem in casu posteriori amittendam ut $\frac{2mC-2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m} = C-c:C$, hoc est, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis post eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIII.

605. Si corpus elasticum majus incurrat in minus quiescens; celeritatem majorem ea qua fertur, sed dupla minorem eidem communicat.

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus m quiescens: erit celeritas corporis m post conflictum $2MC:(M+m)$ (§. 571), hoc est, si $M=m+n$, $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$. Est igitur celeritas corpori minori m communicata per conflictum a corpore M ad celeritatem hujus ante conflictum $= \frac{2mC+2nC}{2m+n} : C = 2mC+2nC : 2mC+nC$ (§. 181 *Arithm.*) $= 2m+2n:2m+n = 2:1 + \frac{n}{m+n}$. Est igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, sed minor quam dupla ejusdem: nimirum si dupla foret, antecedens rationis esse deberet $2+2m:(m+n)$. Idem etiam patet si celeritatem corpori minori acquisitam $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$ dividas actu per $2m+n$; prodit

prodit enim $C + \frac{nC}{2m+n}$. Est vero

$$C + \frac{nC}{2m+n} > C \text{ (§. 84 Arithm.).}$$

$$\text{Jam vero } \frac{nC}{2m+n} : C = nC : (2m+n)C$$

$$= n : 2m+n. \text{ Sed } n < 2m+n \text{ (§.}$$

$$20 \text{ Arithm.). Ergo } \frac{nC}{m+n} < C \text{ (§.}$$

$$151 \text{ Arithm.). Q. e. d.}$$

THEOREMA CXIV.

606. Si corpus elasticum majus in minus quiescens incurrat; minus post conflictum movetur celeritate composita ex ea qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera qua post conflictum idem incedit.

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quiescens m, sitque $M = m+n$; patet, ex demonstratione Theorematis præcedentis, corporis m celeritatem

$$\text{post conflictum esse } C + \frac{nC}{2m+n}.$$

$$\text{Enimvero celeritas corporis M post conflictum} = \frac{MC - mC}{M+m} \text{ (§. 571)}$$

$$= \frac{mC + nC - mC}{2m+n} = \frac{nC}{2m+n}.$$

Componitur adeo celeritas corporis m ex celeritate C, quam habebat majus M ante conflictum, & ex celeritate $\frac{nC}{2m+n}$, quæ est eidem post conflictum. Q. e. d.

THEOREMA CXV.

607. Si celeritas corporis elastici majoris in aliud minus quiescens incurrentis fuerit ut summa massarum utriusque corporis; minori dat celeritatem quæ est ut duplum sui, amittit vero celeritatem quæ est ut duplum minoris corporis.

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus m, in quod majus M celeritate C incurrit, quiescit; celeritas ejus post conflictum est $\frac{MC - mC}{M+m}$,

$$\& \text{ minori dat celeritatem } \frac{2MC}{M+m} \text{ (§.}$$

571). Est vero $C = M+m$ per hypoth. Ergo celeritas majoris sive incurrentis $= M - m$, quæ differt à celeritate initiali $M+m$ quantitate $2m$. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem quæ est ut duplum corporis minoris. Quod erat unum.

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquisita erit $2M$, adeoque ea est ut duplum corporis majoris incurrentis. Q. e. d.

THEOREMA CXVI.

608. Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit, celeritate quæ est ut massarum utriusque corporis summa; dat ei celeritatem quæ est ut duplum sui, sed celeritatem amittit quæ est ut duplum majoris.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas post conflictum $\frac{2mC}{M+m}$ &

celeritas ipsius post eundem $\frac{mC - MC}{M + m}$

(§. 571). Est vero C ut $M + m$ per *hypoth.* Ergo celeritas majoris ut $2m$ seu duplum minoris; minoris vero sive incurrentis ut $m - M$. Differentia vero inter $M + m$ & $m - M$ est $2M$. Celeritas igitur in ictu amissa est ut duplum corporis M . *Q. e. d.*

THEOREMA CXVII.

609. Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit; post conflictum semper resilit eique celeritatem suam minorem dat.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrat in majus M ; erit celeritas majoris M post conflictum $\frac{2mC}{M + m}$, minoris

vero seu incurrentis $\frac{mC - MC}{M + m}$ (§.

571). Nimirum in formula generali litteræ M & m permutantur, quia ibi M percutiens, hic vero m percutiens est. Jam vero celeritas incurrentis ante

conflictum $C = \frac{MC + mC}{M + m}$. Quare si

ponamus $M = m + n$ (§. 20 *Arithm.*): erit celeritas minoris ante conflictum

$= \frac{2mC}{2m + n} = \frac{nC}{2m + n}$, majoris vero post eun-

dem $\frac{2mC}{2m + n}$. Est igitur velocitas majori

acquisita minor celeritate incurrentis (§. cit.). Quod erat unum.

Jam cum sit $M = m + n$, erit celeritas minoris post conflictum $\frac{mC - mC - nC}{2m + n}$

$= -\frac{nC}{2m + n}$, adeoque negativa. Post

conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571). Corpus igitur minus m semper resilit post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXVIII.

610. Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit; celeritas utriusque post conflictum simul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrit in majus M , atque $M = m + n$; erit celeritas majoris post conflictum $= \frac{2mC}{2m + n}$; minoris vero, non habita-

tione directionis $= \frac{nC}{2m + n}$ quemad-

modum ex demonstratione Propositionis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum post conflictum est

$\frac{2mC + nC}{2m + n} = C$. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIX.

611. Si corpus elasticum unum A incurrat in duo elastica B & C , quorum B sit majus quam A , & C vicissim majus quam B , atque corpus C mediante altero B percutit; majorem corpori C celeritatem dat, quam si idem immediate, seu corpore B non interveniente, percuteret.

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum A, B & C = M, nM & niM, celeritas incurrentis = C. Cum sit ut summa massarum ad duplam massam incurrentis ita celeritas percussientis ad celeritatem percussi (§. 574);

$$\text{erit } M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M + nM}, \text{ quæ}$$

est celeritas corpori B acquisita. Quodsi jam hac celeritate corpus B in C impingat, seu idem urgeat; erit

$$nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M + nM} :$$

$$\frac{4nM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}, \text{ quæ est ce-}$$

leritas corpori C interventu corporis B acquisita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M + niM : 2M$

$$= C : \frac{2MC}{M + niM}, \text{ quæ est celeritas cor-}$$

pori C acquirenda, si corpus A immediate seu absque interventu corporis B idem percuteret. Est adeo celeritas mediata corporis C ad immediatam

$$= \frac{4nM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{2MC}{M + niM} = \frac{2nM^2 + 2n^2iM^2}{nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^2iM^2} = \frac{2n + 2n^2i}{n + ni + n^2 + n^2i}.$$

Est vero $n + n^2i = n(1 + ni) > ni + n^2 = n(i + n)$, quia $ni > i + n$, adeoque $2n + 2n^2i > n + n^2 + n^2i + ni$ (§. 90 Arithm.). Patet igitur celeritatem corporis C, interventu alterius B a corpore A percussi, esse majorem ea quam acciperet, si a corpore A immediate percuteretur.

Ex. gr. Sit massa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquisita, ad eam quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Est igitur celeritas mediata major immediata. Sit similiter M = 2, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$; adeoque celeritas mediata corporis C ad immediatam = $6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Est igitur denuo celeritas mediata major immediata.

THEOREMA CXX.

612. Si corpus elasticum unum A in aliud segnius motum sed majus B incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus C quiescens, sed se itidem majus; corpus C majore celeritate feretur, quam si immediate a corpore A percuteretur.

DEMONSTRATIO.

Sit massa corporis A = M, massa secundi B = nM & tertii C = niM, celeritas corporis A = C, corporis B vero = lC. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B

$$= \frac{2MC + nMC - lMC}{M + nM} \quad (\text{§. 571}).$$

Quodsi idem corpus A in tertium C quiescens incurreret, foret hujus cele-

$$\text{ritas} = \frac{2MC}{M + niM}.$$

Incurrat jam corpus B, celeritate per conflictum cum corpore A modificata, in quiescens C; erit celeritas corporis C

$$= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}.$$

(§. cit.). Est igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam

$$= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} \cdot \frac{2MC}{M+niM}$$

$$= \frac{2nM + 2n^2lM - nlM}{(M+nM)(nM+niM)} \cdot \frac{1}{M+niM}$$

$$= \frac{(2n + 2n^2l - nl)(1+ni)}{(n+ni)(1+n)} = \frac{2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il}{n + ni + n^2 + n^2i}$$

Est vero $n + n^2i > n^2 + ni$, adeoque $2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il > n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major est immediata.

Ex. gr. Sit massa corporis $A = 1$, alterius $B = 2$, tertii $C = 3$, adeoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = 2$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $4 + 16 - 4 + 24 + 96 - 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 112 : 24 = 14 : 3$. Est itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, sed $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 4 - 1 + 24 + 48 - 12 : 2 + 6 + 4 + 22 = 67 : 34$. Est adeo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA CIII.

613. Invenire corpus B interponendum inter duo alia corpora A & C, ut corpus C quiescens a corpore A data celeritate moto percussum maximam acquirat celeritatem quam ex percussione istiusmodi habere potest.

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur $= V$. Incurrat A in B quiescens; erit hujus celeritas post conflictum $= \frac{2AV}{A+B}$ (§. 571). Incurrat jam corpus B ce-

leritate hac acquisita in tertium C quiescens; erit corporis C celeritas post con-

$$\text{flictum} = \frac{4ABV}{AB+B^2+AC+BC} \quad (\S. cit.).$$

Quoniam celeritas hæc maxima est quam corpus C ex istiusmodi percussione acquirere valet *per hypoth.* erit differentiale ejus nihilo æquale (§. 63 *Anal. infin.*). Jam cum A, C & V sint quantitates constantes, B vero sola sit variabilis, facta differentiatione (§. 19 *Analys. infin.*) reperitur $(4A^2 VdB + 4AB^2 VdB + 4A^2 CVdB + 4ABC VdB - 4A^2 B VdB - 8AB^2 VdB - 4ACB VdB) : (AB + B^2 + AC + BC)^2 = 0$, hoc est,

$$4A^2 CVdB - 4AB^2 VdB = 0$$

$$AC - B^2 = 0$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit $A : B = B : C$ (§. 301 *Arithm.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quiescens a corpore quacunque celeritate percutitur, fuerit medium proportionale inter percutiens & percussum; celeritatem ei dabit maximam quam interventu cujusdam corporis ei communicare valet.

COROLLARIUM.

614. Quodsi ergo series fuerit corporum in continua proportionem crescentium; ultimum acquirat celeritatem maximam quam a priori ex percussione tot corporum interventu acquirere valet quæ continuo crescunt.

SCHOLIUM.

615. Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari posse, quæ fidem omnem superare videtur, calculus probat & HUGENIUS (a) exemplo illustri docuit. Idem valet si corpora continuo decrescant.

PROBLEMA CIV.

616. Determinare motum corporum A & B oblique impingentium, sive elasticorum, sive elateris expertium, post conflictum.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Motus corporis A per AC resolvitur in duos alios secundum AE & AD, & Fig. 55. motus corporis B per BC similiter in duos alios secundum BF & BG (§. 245), suntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC, ut ipsæ rectæ AD, BF; AC, BC (§. 247). Jam cum rectæ AE & BG sint parallelæ; vires secundum has directiones agentes sibi

(a) De Motu Corporum ex Percussione, Prop. 13.

mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu insuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, seu quod perinde est, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem constituent, perinde est ac si corpora A & B solis velocitatibus, quæ sunt ut EC & GC, directe sibi mutuo occurrerent (§. 523). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta superiora. Sit ex. gr. corporis A resilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur; fiat CK=AE, & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI designabit motum corporis A post conflictum; movebitur nempe post ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241). Eodem modo reperitur, corpus B resiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM=BG. Sunt adeo celeritates post ictum, ut CI ad CM. Quod si post conflictum corpora A & B versus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC construitur.

CAPUT XIII.

De Vi Centrifuga & Centripeta.

DEFINITIO LXV.

617. **V**is centrifuga est vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.

Ex. gr. Si corpus in peripheria circuli

movetur, in quovis puncto A conatur Tab. V. progredi per tangentem AD (§. 71), & Fig. 56. si nihil obstaret, actu progredieretur; adeoque, eodem tempore quo arculum AE describit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROL.

COROLLARIUM.

Tab.V. 618. Est adeo vis centrifuga ut recta
Fig.56. DE ad AD perpendicularis, si arcus AE infinite parvus (§. 245).

DEFINITIO LXVI.

619. *Vis centripeta* est vis, qua mobile per rectam AG progressurum retrahitur a motu rectilineo ut in curva incedat.

COROLLARIUM I.

620. Est itaque vis centripeta ut recta DE, si arcus AE infinite parvus.

COROLLARIUM II.

621. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis est (§. 618.)

DEFINITIO LXVII.

622. *Vires centrales* communi nomine ducuntur Vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA CXXI.

623. Si duo corpora pondere equalia, eodem vel equali tempore, motu æquali peripherias circulorum inæqualium describant; erunt vires centrales ut diametri AB & HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arcus AE infinite parvus, adeoque a subtensa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore describuntur; si ex centro C ducatur radius CE, erit HK arcus eodem momento descriptus, & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137 *Geom.*). Quodsi jam ducantur tangentes AD & HI, atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, $\triangle ADE$

& HK eodem modo determinantur, Tab.V Fig.56 (§. 119 *Geom.*), adeoque similia sunt (§. 120 *Geom.*); consequenter $AE:HK=DE:IK$ (§. 175 *Geom.*). Sunt vero ut DE ad IK, ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 620). Ergo vires centrales sunt ut arcus AE & HK (§. 167 *Arithm.*); consequenter ut peripheriæ circulorum quas percurrunt, per demonstrata, adeoque & ut diametris eorundem (§. 412 *Geom.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

624. Quodsi ergo vires centrales duorum corporum peripherias circulorum inæqualium describentium fuerint ut diametri, temporibus æqualibus easdem percurrunt.

THEOREMA CXXII.

625. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis est ut arcus infinite parvi AE quadratum per diametrum AB divisum.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM; erit in rectangulo ADEM, $AM=DE$. Quoniam arcus infinite parvus AE a subtensa non differt; erit $BA:AE=AE:AM$ (§. 330 *Geom.*). Est ergo $AM=DE=AE^2:BA$ (§. 301 *Arithm.*). Quare cum vis centralis sit ut DE (§. 620); erit eadem ut $AE^2:BA$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquali tempusculis æqualibus arcus æquales AE describat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, constanter eadem est.

THEO.

THEOREMA CXXIII.

Tab.V. Fig.56. 627. Si duo corpora diversas peripherias motu aquabili describant; vires centrales sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 625), adeoque ut $AE^2 : HL$ ad $HK : AB$ (§. 178 Arithm.). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore describantur, per hypoth. erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

628. Si celeritates fuerint æquales; erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL . (§. 181 Arithm.)

COROLLARIUM II.

629. Si diametri AB & HL fuerint æquales; hoc est, si utrumque mobile in eadem peripheria, sed dispari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. cit. Arithm.)

THEOREMA CXXIV.

630. Si duorum mobilium in diversis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulorum AB & HL in ratione duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem instanti sunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ per hypoth. consequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 173 Arithm.). Q. e. d.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

LEMMA II.

631. Quantitatum proportionalium radices sunt etiam proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$, per hypoth. Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{m}$; erit utique $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149 Arithm.). Q. e. d.

LEMMA III.

632. Sint quatuor quæcumque quantitates proportionales, sintque totidem alia inter se quoque proportionales; si posteriores singulas per singulas priores divides, vel contra; quoti quoque proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$, & $c : nc = d : nd$ per hypoth. Quod si a per c , ma per nc , b per d , mb per nd divides; prodibunt $\frac{a}{c}$, $\frac{ma}{nc}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{mb}{nd}$. Jam cum sit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{nc}{mac} = \frac{n}{m}$, & $\frac{b}{d} : \frac{mb}{nd} = \frac{nd}{mbd} = \frac{n}{m}$; erit utique $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$.

Eodem modo patet, esse $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} : \frac{nd}{mb}$. Q. e. d.

THEOREMA CXXV.

633. Si duo corpora in peripheriis Tab.V. inæqualibus eadem vi centrali urgentur; Fig.56. tempus in majori est ad tempus in minori in ratione subduplicata diametri majoris AB ad minorem HL .

DEMONSTRATIO.

Tab. V. Sit $AB = D$, $HL = d$; celeritas in
Fig. 56. majori peripheria $= C$, in minori $= c$;
peripheria major $= P$, minor $= p$;
tempus per illam $= T$, per hanc $= t$;
erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), adeo-
que $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Est
vero $P : p = D : d$ (§. 412. *Geom.*).
Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 632). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ sunt tem-
pora, quibus peripheriæ vel etiam ar-
cus similes qui peripheriarum rationem
habent (§. 170 *Arithm.*), describun-
tur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$
(§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

634. Est igitur $T^2 : t^2 = D : d$, (§. 260 *Arithm.*); hoc est diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM II.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634); erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $T : t = C : c$ (§. 631); hoc est, tempora, quibus peripheriæ aut arcus similes percurruntur a mobilibus eadem vi centrali impulsis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA CXXVI.

636. Vires centrales sunt in ratione composita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v ; reliqua ut in demonstratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 38); consequenter $C^2 : c^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ (§. 260 *Arithm.*); adeoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = \frac{D^2}{DT^2} : \frac{d^2}{dt^2}$ (§. 185 *Arithm.*) $= \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 231 *Arithm.*). Est igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167 *Arithm.*) $= Dt^2 : dT^2$ (§. 178 *Arithm.*). Q. E. D.

THEOREMA CXXVII.

637. Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus similibus mobilia feruntur, sunt ut diametri circulorum; vires centrales sunt reciproce ut eadem diametri.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, per hypoth. & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 636); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$ (§. 178 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 185 *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc in casu æquales.

THEO-

THEOREMA CXXVIII.

Tab.V. Fig.56. 639. Si corpus quoddam in periph-
ria circuli motu uniformi incedat, ea
quidem celeritate, quæ acquiritur per
altitudinem AL cadendo; erit vis cen-
tralis ad gravitatem ejus ut dupla alti-
tudo AL ad radium CA.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per
AL, motu uniformi describeret 2AL,
nempe celeritate quam cadendo per
AL acquisivit & qua per AE movetur
(§. 92). Est igitur tempus per AE ad
tempus per AL, ut AE ad 2 AL (§. 32),
& hinc reperitur spatium eodem tem-
pore a gravi cadente percursum, quo
percurritur AE, = AL. $AE^2 : 4 AL^2$
= $AE^2 : 4 AL$ (§. 86). Est vero vis
centralis ad gravitatem in eodem cor-
pore in ratione celeritatum, quas vires
istæ producunt (§. 280), adeoque spa-
tiorum eodem tempore motu æquabili
descriptorum (§. 33). Quare cum spa-
tium eo instanti, quo vi gravitatis con-
ficitur $AE^2 : 4 AL$, vi centrali percursum
sit $AE^2 : BA$ (§. 625); erit vis centralis
ad gravitatem ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 :$
 $4 AL$, hoc est, ut 4AL ad BA, seu 2AL
ad CA (§. 181 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

640. Quod si adeo gravitas corporis di-
catur G; erit vis centrifuga 2 AL. G : CA.

THEOREMA CXXIX.

641. Si grave in periphæria circuli
æquabili motu feratur, ea quidem celeri-
tate quam acquirit cadendo per alti-

tudinem AL dimidio radio æqualem; vis
centralis erit gravitati æqualis. Tab.V.
Fig.56.

DEMONSTRATIO.

Vis centralis est 2 AL. G : CA (§. 640).
Quare si $AL = \frac{1}{2} CA$; eadem erit
 $CA. G : CA = G$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

642. Ergo si gravitati vis centralis
æqualis est; grave ea celeritate in periphæ-
ria circuli fertur quam cadendo per altitu-
dinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA CXXX.

643. Si vis centralis gravitati æqua-
lis est; tempus per peripheriam integram
est ad tempus descensus per dimidium ra-
dium ut periphæria ad radium.

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea ce-
leritate percursum, quæ cadendo per
 $\frac{1}{2} CA$ acquiritur, est in tempore æquali
= CA (§. 92). Quare cum periphæria
circuli eadem celeritate uniformiter
percurratur (§. 642); erit tempus per
peripheriam ad tempus descensus per
dimidium radium ut periphæria ad ra-
dium CA (§. 32). Q. e. d.

THEOREMA CXXXI.

644. Si duo corpora in peripheriis
inequalibus celeritate inæquali incedant,
quæ sit reciproce in ratione subduplicata
diametrorum; vires centrales sunt in ra-
tione duplicata distantiarum a centro
virium reciproce sumtarum.

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & c, diame-
tri D & d, vires V & v; erit $V : v$
 $X_2 = C^2$

$= \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C:c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, per *hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260 *Arithm.*). Ergo $V:v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{4} d^2 : \frac{1}{4} D^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires sunt reciproce ut quadrata radiorum seu distantiarum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXII.

645. Si duo corpora in peripheriis inequalibus celeritatibus incedunt, quæ sunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi distantiarum a centro virium.

DEMONSTRATIO.

$V:v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C:c = d:D$ per *hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§. 260 *Arithm.*). Ergo $V:v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{8} d^3 : \frac{1}{8} D^3$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires centrales reciproce sunt ut cubi radiorum seu distantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXIII.

646. Si duorum corporum in peripheriis inequalibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione subduplicata diametrorum; temporum quadrata, quibus integras peripherias aut arcus similes percurrunt, sunt in ratione triplicata distantiarum a centro virium.

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & t , celeritates C & c , diametri D & d . Cum tam periphe-

riæ (§. 412 *Geom.*) quam arcus similes (§. 170 *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T:t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 38). Est vero $C:c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, per *hypoth.* Ergo $T:t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}}$ (§. 124 *Analys. finit.*); consequenter $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$ (§. 260 *Arithm.*) $= \frac{1}{8} D^3 : \frac{1}{8} d^3$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

647. Ergo si Vires centrales sunt in reciproca ratione distantiarum a centro subduplicata; temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus similes percurruntur, sunt in triplicata earundem distantiarum (§. 644) ratione.

THEOREMA CXXXIV.

648. Si duorum corporum in peripheriis inequalibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce; tempora sunt in ratione duplicata distantiarum a centro.

DEMONSTRATIO.

Quia $C:c = d:D$, per *hypoth.* & peripheriæ (§. 412 *Geom.*), atque arcus similes (§. 171 *Arithm.*) sunt ut radii, adeoque $T:t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit $T:t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2$ (§. 124 *Anal. finit.*) $= \frac{1}{4} D^2 : \frac{1}{4} d^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, tempora sunt in ratione duplicata radiorum seu distantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

649. Si ergo Vires centrales sunt reciproce ut cubi distantiarum a centro virium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus similes percurruntur, sunt ut quadrata earundem (§. 645).

SCHOLIUM.

Tab.V. 650. Quodsi supponamus vim centripetam
Fig.56. urgere corpus versus centrum C, ut pro effectu ejus sumatur portio secantis EG; omnia manent ut ante, propterea quod, in casu infinite parvi, EG & DE pro aequalibus haberi possint, atque adeo eadem in utroque casu eruatur mensura vis centralis. Nimirum cum CA (§. 308 Geom.) & DE per hypoth. sint perpendiculares ad AG: erunt inter se parallelæ (§. 256 Geom.), adeoque angulus GED = ECM (§. 233 Geom.). Quare cum etiam recti ad D & M sint æquales (§. 145 Geom.); erit GE:ED = EC:CM (§. 267 Geom.). Quoniam sagitta AM infinite parva, per hypoth. CM & CA æquales habentur (§. 4 Analys. infin.). Ergo etiam CM = CE (§. 40 Geom. & §. 87 Arithm.) Est igitur etiam GE = DE (§. 149 Arithm.). Quod vero sit etiam EG ut AE²:AB, quemadmodum supra ostendimus esse ED (§. 627), ita evincitur. AG² = NG.EG (§. 379 Geom.), hoc est, quia in casu arcus AE infinite parvi NG = NE (§. 4 Analys. infin.), NE.EG = AB.EG = AG², seu, quia arcus infinite parvus AE a portiuncula tangentis AG assignabiliter non differt, AB.EG = AE². Unde prodit EG = AE²:AB, aut quod perinde est, vis centrifuga est ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum divisum.

THEOREMA CXXXV.

651. Si corpus in linea curva versus easdem partes cava ea lege incedat, ut radius CB ex ipso in punctum fixum

C, quod in eodem plano situm est, du-Tab.V.
ctus areas BAC, BEC, &c. describat Fig.57.
temporibus proportionales, seu dato tempore æquales: corpus a vi centripeta versus punctum C urgetur.

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus sola vi insita per rectam, seu arcum infinite parvum AB, dato minimo quovis instanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipsi AB æqualem (§. 31), & in directum sitam (§. 71). Sed per vim centripetam a BD retrahitur, & per arculum BE incedere cogitur, estque $\triangle CAB = \triangle CBE$, per hypoth. & ducta recta CD, ob AB = DB per demonstrata, $\triangle CBD = \triangle CBA$ (§. 385 Geom.). Ergo $\triangle CDB = \triangle CEB$ (§. 87 Arith.), consequenter perpendiculara ex E & D in BC demissa æqualia sunt (§. 385 Geom.), & hinc DE ipsi FB parallela (§. 226 Geom.). Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 241), vis centripeta in B tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonstretur, patet vim centripetam a motu rectilineo versus C retrahere mobile. Q. e. d.

THEOREMA CXXXVI.

652. Si corpus secundum directionem rectæ AD progrediatur, & una a vi centripeta ad punctum fixum C in eodem plano situm urgeatur; curvam describit versus C cavam, cujus areæ

Tab.V. *quacunque duobus radiis AC & BC comprehensa sunt temporibus, quibus describuntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim insita vel impressa cum agat juxta BD, & centripeta juxta BF seu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis describitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis instanti directio mobilis a vi centripeta mutatur; curva describitur, eaque versus C cava: quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB versus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero, ob $AB = BD$ *per hypoth.* $\triangle ABC$ & BDC æqualia (§. 385 *Geom.*), & ob ED & BC parallelas (§. 241), $\triangle BCD$ & BCE itidem æqualia sunt (§. 385 *Geom.*); consequenter $ABC = BEC$. Quod cum eodem modo demonstretur de triangulis quocunque aliis æqualibus tempusculis descriptis; pater, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus quibus describuntur proportionales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXXXVII.

653. *Si mobile in linea curva incedens vi centripeta versus centrum immobile urgetur; celeritas ejus est reciproce ut perpendicularum a centro illo in tangentem curvæ demissum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus describuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE, & in tempusculis infinite parvis motus æquabilis; erunt

celeritates in A & B, ut AB ad BE (§. 33), Tab.V hoc est, ut bases triangulorum ACB & BCE. Sunt vero triacula ista æqualia *per hypoth.* adeoque bases AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393 *Geom.*), hoc est, reciproce ut perpendiculara ex centro C in bases AB & BE continuatas, quæ sunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20 *Analys. infin.*), demissa (§. 227 *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B sunt reciproce ut perpendiculara ex centro C in tangentes demissa (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO LXVIII.

654. *Centrum virium* diximus punctum O, ad quod mobile in linea curva revolutum a vi centripeta continuo urgetur. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur *Orbis*, vel *Orbita*, item *Trajectoria*. Tab. XVI. Fig. 161.

DEFINITIO LXIX.

655. *Radius vector* est recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hæere supponitur.

COROLLARIUM.

656. Est adeo radius vector distantia mobilis a centro virium (§. 192 *Geom.*).

THEOREMA CXXXVIII.

657. *In omni curva vis centralis est in ratione composita ex directâ radii vectoris, & reciproca radii osculi simplici, atque reciproca triplicata perpendiculari ex centro virium in tangentem orbis demissi.*

DEMONSTRATIO.

Tangat PN curvam in puncto M; sitque O centrum virium, OM radius vector

Tab. XVI. Fig. 161. vector & CM radius osculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius osculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ Mm haberi potest pro arcu circuli radio CM descripti (§. 313, 314 *Analys. infin.*). Vis centripeta agens versus centrum circuli erit ut mR, quæ vero agit versus centrum virium Orbis O ut mN. Quoniam radius osculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317 *Analys. infin.*), & mRN = CMN + MCR = (§. 239 *Geom.*) = CMN, ob MCR infinite parvum = 0 (§. 3 *Analys. infin.*); angulus R recto æqualis, consequenter etiam ipsi P (§. 145 *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON (§. 239 *Geom.*) = MNO, ob MON infinite parvum = 0 (§. 3 *Anal. infin.*). Ergo mR : mN = PO : MO (§. 267 *Geom.*), hoc est, vis centripeta agens versus centrum circuli osculatoris C est ad vim centripetam versus centrum virium O agentem, ut PO ad MO *per demonstrata*. Quod si celeritas, qua arculus Mm describitur, fuerit = C: erit vis centripeta agens in centrum osculi C = C² : MC (§. 627.) Est vero C reciproce ut PO, hoc est ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653); adeoque vis centripeta agens in centrum osculi C = $\frac{1}{PO^2 \cdot MC}$. Quare cum sit *per demonstrata* vis petens centrum osculi ad vim quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens versus centrum orbis O = $\frac{MO}{PO^3 \cdot MC}$,

Tab. XVI. Fig. 161. atque adeo est in ratione composita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii osculi MC, & reciproca triplicata perpendiculari ex centro Virium Orbis in tangentem demissi PO. Q.e.d.

THEOREMA CXXXIX.

658. Si corpus in peripheria circuli revolvatur, & vis centripeta idem urgeat versus punctum fixum O in peripheria situm; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris OM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 162. Tangat PR circulum in puncto dato M & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius osculi (§. 324 *Analys. infin.*). Jam cum CM (§. 308 *Geom.*) & OP *per hypoth.* sint perpendiculares ad PR; erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), consequenter o = x (§. 233 *Geom.*). Quare cum OPM sit rectus, *per construct.* & MON itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit MN : MO = MO : OP, (§. 267 *Geom.*); adeoque OP = $\frac{MO^2}{MN}$, consequenter OP³ = $\frac{MO^6}{MN^3}$. Est vero vis centripeta in M = $\frac{MO}{OP^3 \cdot MC}$ (§. 657). Quare si pro OP³ substituitur ejus valor $\frac{MO^6}{MN^3}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO \cdot MN^3}{MO^6 \cdot MC}$. Sunt vero MN & MC

Tab. XVI. MC in omni puncto peripheriæ constant, adeoque, ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diversis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^6}$ seu $\frac{1}{MO^5}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q. e. d.*

THEOREMA CXL.

659. Si corpus in peripheria circuli revolvitur, & vis centripeta ad punctum quodcunque intra circulum datum O tendat; erit ea in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda DM; sitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P per construct. & AMD (§. 317 *Geom.*) rectus est, ac præterea $o = x$ (§. 323 *Geom.*); erit $AD : AM = OM : OP$ (§. 267 *Geom.*), adeoque $OP = \frac{OM \cdot AM}{AD}$; consequenter $OP^3 = \frac{OM^3 \cdot AM^3}{AD^3}$. Est vero vis centripeta in M $= \frac{MO}{OP^3 \cdot DC}$ (§. 657 *Mech.* & §. 324 *Analys. infin.*). Quare eadem $= \frac{MO \cdot AD^3}{AM^3 \cdot OM^3 \cdot DC}$; consequenter cum AD & DC constantes sint, seu in omni puncto curvæ eadem; vis centripeta $= \frac{1}{AM^3 \cdot OM^2}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione compo-

sita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q. e. d.*

THEOREMA CXLI.

660. In omni Sectione conica, vis centripeta tendens ad focus curvæ est reciproce in ratione duplicata radii vectoris, seu distantia a foco.

DEMONSTRATIO.

Sit AMN Sectio conica quæcunque, parabola, ellipsis vel hyperbola. Tab. XVII. Sit focus in O, & in eo centrum virium. Fig. Tangat TM sectionem conicam 163. in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis, & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit ob OP & MH parallelas (§. 256 *Geom.*) $POM = x$ (§. 233 *Geom.*); adeoque ob rectos ad P & R, per construct. $MO : OP = MH : MR$ (§. 267 *Geom.*); consequenter $OP = \frac{MO \cdot MR}{MH}$. Est vero MR æqualis semiparametro (§. 418, 438, 504 *Analys. finit.*) adeoque $= \frac{1}{2}a$, si ea dicatur a . Ergo $OP = \frac{MO \cdot \frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^3 = \frac{MO^3 \cdot a^3}{8MH^3}$. Porro in omni Sectione conica radius osculi $= \frac{4MH^3}{a^2}$ (§. 322, 325, 327 *Anal. infin.*). Quare cum vis centripeta sit ut $\frac{MO}{PO^3 \cdot MC}$ (§. 657), substitutis valoribus PO^3 & radii osculi MC reperitur ea $\frac{8MO \cdot MH^3 \cdot a^2}{4MO^3 \cdot MH^3 \cdot a^3} = \frac{2}{MO^2 \cdot a}$, hoc est, ob 2

Tab. ob 2 & a constantes quantitates in XVII.

Fig. 163. a. omni puncto curvæ, $= \frac{1}{MO^2}$ (§. 178. 181 Arithm.). Vis igitur centripeta tendens ad focum Sectionis conicæ est reciproce ut quadratum distantiae a foco seu radii vectoris. Q. e. d.

SCHOLIUM.

661. Quoniam proprietas hæc Sectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus fuit; ideo conveniens est ut generaliter ex iisdem demonstretur. Mensuram virium centripetarum ut $\frac{MO}{PO^3.MC}$ superius demonstratam (§. 657) invenit ABRAHAMUS DE MOIVRE, Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum mensuris aliorum, quas quantitates infinite parvæ ingrediuntur, sequente Problemate ostendere lubet.

PROBLEMA CVI.

662. Invenire vim centripetam in qualibet curva.

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 161. Sit O centrum virium, MO radius vector, MC radius osculi, & OP ad tangentem PM perpendicularis. Describatur ex centro virium O, radio vectore MO, arcus infinite parvus MK. Fiat $MC = n$, $MO = x$; erit $mK = dx$. Sit porro $MK = dz$, & arculus curvæ $Mm = ds$; tempus vero per arcum $Mm = dt$. Quoniam hoc est ut sector OMK (§. 652); erit $dt = MK \cdot \frac{1}{2} MO$ seu ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut $MK.MO$ (§. 178 Arithm.), adeoque ut xdz . Porro cum angulus ad P sit rectus, per constr. & K rectus (§. 38 Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Analys. infin.), & ob infinite parvum Tab. XVI. Fig. 161. $Mm = 0$ (§. 3 Analys. infin.), $PMO = MmK$ (§. 239 Geom.); erit $Mm : MK = MO : OP$

$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Est igitur $OP^3 = \frac{x^3 dz^3}{ds^3}$, & hinc, cum

$$\begin{aligned} \text{Vis centralis } \frac{MO}{OP^3.MC} & (\text{§. 657}), \text{ erit ea} \\ & = x : \frac{nx^3 dz^3}{ds^3} \\ & = \frac{ds^3}{nx^2 dz^3} \end{aligned}$$

Est vero $dt = xdz$ per demonstr. & hinc $dt^2 = x^2 dz^2$

$$\text{Quare Vis centralis} = \frac{ds^3}{ndz dt^2}$$

Atque hic est character analyticus unus, quem dedit VARIGNONIUS (a).

Aliter.

Quoniam angulus CMR rectus (§. 337 Anal. infin.), erit MRm, ab eodem non differens nisi quantitate infinite parva MCR (§. 239 Geom.) itidem rectus (§. 4 Anal. infin. & §. 145 Geom.), & ex eadem ratione MmR etiam rectus. Quamobrem mR haberi potest pro arculo, radio Mm descripto ex centro M (§. 38 Analys. infin.). Cum adeo sit $Mm = MR$ (§. 40 Geom.); erit RN differentia inter arcum Mm & portionem tangentis MN, seu differentia secunda arculi Mm. Unde si $Mm = ds$, ut ante, $RN = dds$. Sit porro ut ante $MK = dz$, $MO = x$, adeoque $Km = dx$:

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1708. p. 28. edit. Bat.

Tab. XVI. Fig. 161. $=dx$: tempusculum vero per arcum $Mm = dt$. Cum $MmK + KmC$ sit re-
ctus (§. 38 *Analys. infin.*), & RNm
+ RmN itidem reclus (§. 241 *Geom.*);
sit vero $KmC = RmN$ (§. 156 *Geom.*);
erit $MmK = RNm$ (§. 91 *Arithm.*).

Est vero præterea NRm reclus, per
demonstr. & MKm itidem reclus (§. 38
Analys. infin.). Quamobrem (§. 207
Geom.)

$$Km : KM = NR : mR$$

$$dx : dz = dds : \frac{dds dz}{dx}$$

Porro cum CMR sit reclus, & Mm
ad RC perpendicularis, per *demonstr.*
erit (§. 327 *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$

$$\frac{dds dz}{dx} : ds = ds : \frac{ds^2 dx}{dz dds}$$

$$\text{Est itaque } CM = n = \frac{ds^2 dx}{dds dz}$$

Jam vis centralis ante reperta fuit
 $\frac{ds^3}{ndz dt^2}$. Quare si substituatur valor ra-
dii circuli osculatoris n , modo inven-
tus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3 dz d'ds}{ds^2 dx dz dt^2}$

$= \frac{ds dds}{dx dt^2}$. Atque hæc est formula
altera quam dedit VARIGNONIUS (a).

SCHOLIUM.

663. Quodsi beneficio harum formula-
rum vis centralis in circulo & sectionibus
conicis eruere volueris, quemadmodum ante
factum est: multo difficilius idem fieri in-
telliges, quam in anterioribus a nobis fac-

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1700.*
p. 286.

tum est. Sufficit itaque ostendisse, quomo-
do formula, qua nos usi sumus, in Varigno-
nianas degeneret.

PROBLEMA CVII.

664. Data lege virium centripeta-
rum, & concessis quadraturis; invenire
Trajectoriam in qua mobile incedit.

RESOLUTIO.

Sit in O centrum virium, AC Tra-
jectoria, AO ejus axis, AL arcus cir-
culi radio AO descriptus. Ducantur ra-
dii OL & Ol infinite propinqui, & radiis
 OB ac Ob describantur arcus EB &
 eb . Fiat denique $AO = a$, $AL = z$,
 $OE = x$; erit $Ee = BN = dx$, $Ll = dz$,
&, ob sectores similes ObN ac OLl
(§. 138, 412 *Geom.*).

$$OL : Ll = Ob : bN$$

$$a : dz = x : \frac{xdz}{a}$$

Sit celeritas qua mobile fertur in
 $B = c$, & vis centralis $= v$. Quoniam
massa mobilis eadem existente sive
 $= 1$, elementum celeritatis dc , quod
positivum vel negativum esse potest
prout celeritas vel augetur vel minui-
tur, est ut elementum temporis in vim
solicitantem sive centralem ductum (§.
113); tempus vero per BN , ob mo-
tus in spatiolo infinite parvo æquabili-
tatem, ut $\frac{dx}{c}$ (§. 39); erit

$$dc = \frac{v dx}{c}$$

$$cdx = v dx$$

$$\frac{1}{2}c^2 = \int v dx$$

hoc

Tab. hoc est omiffa quantitate constante $\frac{1}{2}$,
XVII. cum hic tantummodo rationum habea-
Fig. tur ratio, (§. 187 *Arithm.*), & ad-
164. dita constante homogenea ex lege in-
tegrationis (§. 95 *Analys. infin.*)

$$\begin{aligned} ab - c^2 &= fvd x \\ \frac{ab - fvd x}{a^2} &= c^2 \\ \sqrt{(ab - fvd x)} &= c. \end{aligned}$$

Quoniam motus per Bb in tempus-
culo infinite parvo peractus æquabilis,
erit spatium Bb = c dt (§. 34)

adeoque Bb = dt $\sqrt{(ab - fvd x)}$

$$\begin{aligned} \text{Sed } dt &= BO. bN \quad (§. 652) \\ &= \frac{x^2 dz}{a} \end{aligned}$$

$$\text{Ergo } Bb = \frac{x^2 dz \sqrt{(ab - fvd x)}}{a}$$

$$Bb^2 = \frac{x^4 dz^2 (ab - fvd x)}{a^2}$$

$$\text{Jam } BN^2 = dx^2$$

$$bN^2 = \frac{x^2 dz^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned} Bb^2 &= dx^2 + \frac{x^2 dz^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2} \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2} = \frac{x^4 dz^2 (ab - fvd x)}{a^2}$$

hoc est, ut observetur lex homoge-
neorum.

$$\begin{aligned} a^4 c^2 dx^2 + a^2 c^2 x^2 dz^2 &= x^4 dz^2 (ab - fvd x) \\ a^4 c^2 dx^2 &= x^4 dz^2 (ab - fvd x) - a^2 c^2 x^2 dz^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{a^4 c^2 dx^2}{x^4 (ab - fvd x) - a^2 c^2 x^2} \\ &\frac{a^2 c dx}{\sqrt{(ab x^4 - x^4 fvd x - a^2 c^2 x^2)}} = dz \\ z &= \int (a^2 c dx : \sqrt{(ab x^4 - x^4 fvd x - a^2 c^2 x^2)}) \end{aligned}$$

Hæc est æquatio generalis ad Tra-
jectoriam, in qua mobile data vi cen-
trali v ad punctum O urgetur, & in
qua c denotat quantitatem arbitrariam
constantem ex lege homogeneorum
assumendam.

SCHOLIUM.

665. *Æquationem hanc generalem ad Tra-
jectoriam invenit Joannes BERNOULLI, Pro-
blema inversum de Trajectoriis, in quibus
vires centrales sunt reciproce ut quadrata
distantiarum, soluturus; ac inde casum hunc
specialem non sine artificio deduxit (a): majo-
ris enim artis est solvere Problema in casu
speciali, quam generaliter. Ut vero solu-
tionem nostro more cum primis Matheseos
principiis perspicue connectamus, Problemata
quædam per modum Lemmatum præmittenda
sunt.*

PROBLEMA CVIII.

666. *Invenire æquationem ad Para-
bolam, abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

Sit in Parabola QO = x , QM = y ,
parameter = p ; erit AO = $\frac{1}{4}p$ (§. 396
Analys. fin.); adeoque AQ = $\frac{1}{4}p + x$,
consequenter $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px$ (§. 388
Analys. fin.). Q. e. i. & d.

PROBLEMA CIX.

667. *Invenire æquationem ad Ellip-
sin, abscissis a foco computatis.*

Y 2

RESO-

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710.
p. 691. & seqq.

Tab.
XVII.
Fig.
164.

Tab.
XVII.
Fig.
163. b.

Tab.
XVII.

RESOLUTIO.

Fig. 165. Sit in F focus Ellipsis & in C centrum. Fiat $AB = m$, parameter $= p$, $FP = x$: erit $FA = \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)}$ (§. 427 *Analys. fin.*); adeoque
 $AP = \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x$
 $PB = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} + x$

$AP \cdot PB = \frac{1}{4}pm - 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2$
 Jam ex natura Ellipseos (§. 420 *Analys. fin.*),

$$y^2 : \frac{1}{4}pm - 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2 = p : m$$

Ergo

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m} \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - \frac{px^2}{m}. \quad Q. e. i. \& d.$$

PROBLEMA CX.

Tab. 668. *Invenire equationem ad Hyperbolam, abscissis a foco computatis.*

Fig.
163.b.

RESOLUTIO.

Sit focus Hyperbolæ in O, centrum C, axis dimidius transversus CA. Sit $2AC = m$, parameter $= p$, $OQ = x$, $QM = y$: erit $AO = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m$ (§. 463 *Anal. fin.*); adeoque
 $AQ = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m + x$
 $AQ + 2AC = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{1}{2}m + x.$

$$AQ (AQ + 2AC) = \frac{1}{4}pm + 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2$$

Quare, cum sit ex natura Hyperbolæ (§. 459 *Analys. fin.*).

$$y^2 : \frac{1}{4}pm + 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2 = p : m$$

erit

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m} \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{px^2}{m}$$

Q. e. i. & d.

PROBLEMA CXI.

669. *Invenire Trajectoriam in qua mobile incedit, si vis centripeta qua urgetur fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris.*

Tab.
XVII.
Fig.
164.

RESOLUTIO.

Quoniam in solutione generali radium vectorem diximus x , erit vis centralis $v = \frac{I}{x^2} = \frac{a^2 g}{x^2}$, servata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali substitui possit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (§. 664) in casu generali; =

$$\frac{\sqrt{(abx^4 - x^4 \int v dx - a^2 c^2 x^2)}}{a^2 c^2 dx}$$

erit idem in casu speciali

$$x \sqrt{(abx^2 - x^2 \int \frac{a^2 g dx}{x^2} - a^2 c^2)}$$

$$\text{Sed } \int \frac{a^2 g dx}{x^2} = \int a^2 g x^{-2} dx = a^2 g x^{-1}$$

$$\text{Quare } dz = \frac{a^2 c^2 dx}{x \sqrt{(abx^2 + a^2 g x - a^2 c^2)}}$$

Cum dx , sive Ll , sit elementum arcus a forma ordinaria discedens; ut ad eam reducat, fiat

$$x = \frac{a^2}{y}$$

$$\text{erit } dx = -\frac{a^2 dy}{y^2}, \& x^2 = \frac{a^4}{y^2};$$

adeoque

Tab.
XVII.
Fig.
164.

$$\begin{aligned} \text{Tab. adeoque } dz &= - \frac{a^4 c^2 dy : y^2}{\frac{a^2}{y} \sqrt{\left(\frac{a^5 b}{y^2} + \frac{a^4 g}{y} - a^2 c^2\right)}} \\ &= - \frac{a^4 c^2 dy}{a^2 y \sqrt{\left(\frac{a^5 b}{y^2} + \frac{a^4 g}{y} - a^2 c^2\right)}} \\ &= - \frac{a^4 c^2 dy}{a^3 \sqrt{(a^3 b + a^2 g y - c^2 y^2)}} \\ &= - \frac{a c^2 dy}{\sqrt{(a^3 b + a^2 g y - c^2 y^2)}} \end{aligned}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2 g}{2 c^2} - t$

erit $y^2 = \frac{a^4 g^2}{4 c^4} - \frac{a^2 g t}{c^2} + t^2$

adeoque $-c^2 y^2 = -\frac{a^4 g^2}{4 c^2} + a^2 g t - c^2 t^2$

$a^2 g y = \frac{a^4 g^2}{2 c^2} - a^2 g t$

$dy = -dt$

Unde tandem habetur

$dz = \frac{a c dt}{\sqrt{(a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4 c^2} - c^2 t^2)}}$

Fiat denique $a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4 c^2} = c^2 h^2$

erit $dz = \frac{a c dt}{c \sqrt{(h^2 - t^2)}}$

$\frac{dz}{a} = \frac{dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$

$= \frac{1}{h} \cdot \frac{h dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$

Habemus adeo elementum circuli $\frac{h dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$, cujus radius h , sinus rectus t (§. 153 *Anal. infin.*), per radium h divisum, & $\frac{dz}{a}$ est itidem ele.

Tab. XVII. Fig. 164.
mentum circuli Ll per radium LO divisum vi denominationis in solutione generali (§. 664) facta. Jam dato radio, datoque arcu, datur angulus (§. 57 *Geom.*), atque adeo ratio arcus ad radium; consequenter arcus per radium divisus (§. 129 *Arithm.*), exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LOl , & $\int \frac{dz}{a}$ angulum

AOL ; pariterque $\frac{h dt}{b \sqrt{(h^2 - t^2)}}$ angulum

priori LOl , & $\int \frac{h dt}{b \sqrt{(h^2 - t^2)}}$ alium posteriori AOL æqualem, cujus radius b , sinus rectus t . Unde jam fluit constructio curvæ ABC istiusmodi.

Radio $b = \sqrt{\left(\frac{a^3 b}{c^2} + \frac{a^4 g^2}{4 c^4}\right)}$ descri-

batur Quadrans MKT , sumtoque arcu $AL = z$, pro arbitrio, ducatur recta OL secans quadrantem istum in K , erit arcus $KM = \int \frac{h dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)}}$, & $KI = t$.

Jam porro inveniri potest radius OB five OE . Quoniam enim

$y = \frac{a^2 g}{2 c^2} - t = \frac{a^2 g - 2 c^2 t}{2 c^2}$

& $x = \frac{a^2}{y}$

erit $x = \frac{2 a^2 c^2}{a^2 g - 2 c^2 t}$

$= \frac{2 c^2}{g - 2 \frac{c^2 t}{a^2}}$

Est igitur $a : c = c : \frac{c^2}{a}$, & $a : t = \frac{c^2}{a} : \frac{c^2 t}{a^2}$,

ac denique $g - 2 \frac{c^2 t}{a^2} : c = c : \frac{c^2}{g - 2 c^2 t : a^2}$.

Tab. XVII. Fig. 164. Quodsi recta OB hoc modo inventa, ex centro O describatur arcus EB; interfecabit is radium OL in B, eritque punctum B in Trajectoria quæsitæ.

PROBLEMA CXII.

670. Invenire æquationem ad Trajectoriam, in qua vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium.

RESOLUTIO.

Tab. XVII. Fig. 167. Sit $OQ = \frac{a^2 g}{2c^2}$, & $OP = t$; erit $PQ = \frac{a^2 g}{2c^2} - t = y$ (§. 669). Quoniam

$OB = z = \frac{a^2}{y}$; si intra asymptotos QO & QR describatur Hyperbola GNV, latere potentie existente $= a$ (§. 489 *Analys. finit.*) erit $PN = z$ (§. 488 *Analys. finit.*). Fiat jam $OF = x$, $FB = y$; reliqua sint ut ante; erit (§. 268 *Geom.*)

$$OP : OS = OF : OB$$

$$t : b = x : \frac{bx}{t}$$

$$\text{Sed } OB = \frac{2a^2 c^2}{a^2 g - 2c^2 t} \text{ (§. 669).}$$

$$\text{Ergo } \frac{bx}{t} = \frac{2a^2 c^2}{a^2 g - 2c^2 t}$$

$$a^2 ghx - 2c^2 btx = 2a^2 c^2 t$$

$$a^2 ghx = 2c^2 btx + 2a^2 c^2 t$$

$$\frac{a^2 ghx}{2c^2 bx + 2a^2 c^2}$$

Porro (§. cit. *Geom.*)

$$OP : PS = OF : FB$$

$$t : \sqrt{(b^2 - t^2)} = x : y$$

$$x\sqrt{(b^2 - t^2)} = ty$$

$$b^2 x^2 - t^2 x^2 = t^2 y^2$$

$$b^2 x^2 = t^2 x^2 + t^2 y^2$$

$$\frac{b^2 x^2}{x^2 + y^2} = t^2$$

Est vero etiam per demonstrata.

$$t^2 = \frac{a^4 g^2 b^2 x^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^4 bx + 4c^4 b^2 x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{b^2 x^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^4 g^2 b^2 x^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^4 bx + 4c^4 b^2 x^2}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{a^4 g^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^4 bx + 4c^4 b^2 x^2}$$

$$4a^4 c^4 + 8a^2 c^4 bx + 4c^4 b^2 x^2 = a^4 g^2 x^2 + a^4 g^2 y^2$$

$$y^2 = \frac{4c^4 b^4 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Quæ est æquatio ad Trajectoriam quæsitam. Cum ea sit quadratica, erit ad Sectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in Trajectoria urgeatur a vi centripetæ, quæ est reciproce ut quadratum distantie a centro virium; erit Trajectoria ista aliqua Sectio conica.

Ut appareat, ad quamnam Sectionem conicam sit æquatio; comparetur ea cum æquationibus singularum sectionum conicarum, quas ante reperimus, abscissis a foco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter $= p$, (§. 666)

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px$$

Æqua-

Tab. XVII. Fig. 167.

Tab. XVII. *demonstr.* Æquatio vero ad Trajectoriam per

Fig. 167. $y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$

Ob deficientem in Parabola secundum terminum, erit

$$\frac{4c^4 b^2}{a^4 g^2} - 1 = 0$$

$$4c^4 b^2 = a^4 g^2$$

$$b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4}$$

$$b = \frac{a^2 g}{2c^2}$$

Est vero per constructionem, $b = OT = OS$, & $\frac{a^2 g}{2c^2} = OQ$.

Trajectoria igitur Parabola est, si $OT = OQ$.

In calculo sumimus

$$b = \sqrt{\left(\frac{a^3 b}{c^2} + \frac{a^4 g^2}{4c^4}\right)}$$

in casu Parabolæ

$$\frac{a^3 b}{c^2} = 0;$$

adeoque $b = 0$.

$$p = \frac{8c^4 b}{a^2 g^2} \quad \frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$= \frac{8c^4 a^2 g}{2a^2 c^2 g^2} \quad p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$= \frac{4c^2}{g} \quad p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo Parabolæ est tertia proportionalis ad g & $2c$.

Tab. XVII. *Fig. 167.* Æquatio pro Ellipfi, abscissis a foco computatis, est (§. 667),

$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm\right)} + \frac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam per demonstrata

$$y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo eadem, quæ in Parabola.

Porro, $\frac{p}{m} = \frac{4c^4 b^2}{a^4 g^2} - 1$

hoc est $1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4 b^2}{a^4 g^2}$

$$a^4 g^2 - \frac{4a^4 c^2 g}{m} = 4c^4 b^2$$

$$b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}\right)}$$

In Ellipfi adeo $\frac{a^2 g}{2c^2} > b$

hoc est, $OQ > OT$.

Quodsi ulterius desideretur valor ipsius m , fiat

$$-\frac{2p}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{8c^4 b}{a^2 g^2}$$

hoc

Tab.
XVII.
Fig.
167.

$$\begin{aligned} \text{hoc est, } & \frac{8c^2}{mg} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g}\right)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2} \\ & \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g}\right)} = \frac{mc^2h}{a^2g} \\ & \frac{\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g}}{\frac{c^2m}{g}} = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2} \\ & \frac{\frac{1}{4}m - \frac{c^2}{g}}{\frac{c^2}{g}} = \frac{mc^4h^2}{a^4g^2} \\ & \frac{a^4g^2m - 4a^4c^2g}{a^4g^2m - 4mc^4h^2} = \frac{4mc^4h^2}{4a^4c^2g} \\ & m = \frac{4a^4c^2g}{a^4g^2 - 4c^4h^2}. \end{aligned}$$

Æquatio pro Hyperbola abscissis a foco computatis est (§. 668).

$$y^2 = \frac{px^2}{m} + \frac{2px}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} + \frac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam est

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2 \\ \frac{\frac{1}{4}p^2}{g^2} &= \frac{4c^4}{g^2} \\ \frac{\frac{1}{2}p}{g} &= \frac{2c^2}{g} \\ p &= \frac{4c^2}{g} \end{aligned}$$

Eadem ergo parameter in Hyperbola, quæ in ceteris Sectionibus conicis.

$$\begin{aligned} \frac{p}{m} &= \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1 \\ \text{hoc est } \frac{4c^2}{gm} &= \frac{4c^4h^2 - a^4g^2}{a^4g^2} \\ \frac{4a^4c^2g^2}{4a^4c^2g^2 + a^4g^3m} &= \frac{4c^4h^2gm - a^4g^3m}{4c^4h^2gm} \\ \frac{4a^4c^2g + a^4g^2m}{4c^4m} &= h^2 \\ \sqrt{\left(\frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{c^2m}\right)} &= h \end{aligned}$$

Jam cum $QO = \frac{a^2g}{2c^2}$ & $TO = h$, fit. Tab. XVII.

que $\frac{a^2g}{2c^2} < h$; erit $QO < TO$, quando Fig. 167.

Trajectoria Hyperbola.

Si ulterius desideretur valor ipsius m , fiat

$$\frac{2p}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

hoc est, ob $p = \frac{4c^2}{g}$;

$$\begin{aligned} \frac{8c^2}{gm} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} &= \frac{8c^4h}{a^2g^2} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} &= \frac{mc^2h}{a^2g} \\ \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm &= \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2} \\ m + p &= \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2} \\ \text{hoc est, } m + \frac{4c^2}{g} &= \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2} \\ \frac{a^4g^2m + 4a^4c^2g}{4a^4c^2g} &= \frac{4mc^4h^2}{4mc^4h^2 - a^4g^2m} \\ \frac{4a^4c^2g}{4c^4h^2 - a^4g^2} &= m. \end{aligned}$$

Quodsi, datis m & p per literas assumptas h, c, g & a , harum valores desiderentur per m & p ; æquationum reductione facta facile determinantur.

$$\begin{aligned} \text{Est enim } p &= \frac{4c^2}{g} & b &= \frac{a^2g}{2c^2} \\ g &= \frac{4c^2}{p} & c^2 &= \frac{a^2g}{2b} \\ c^2 &= \frac{1}{4}pg \\ \frac{1}{4}pg &= \frac{a^2g}{2b} \\ p &= \frac{2a^2}{b} \\ h &= \frac{2a^2}{p} \end{aligned}$$

Si

Si ergo p datur & c pro arbitrio assumitur, cum in omni Sectione conica sit $p = 4c^2 : g$, valor ipsius g omni Sectioni conicæ respondet. At cum in Parabola tantummodo sit $h = a^2 g : 2c^2$; valor ipsius h per a & p determinatus Parabolæ proprius. Unde si valores quantitatum g & h modo repertos substituas in æquatione ad Trajectoriam, in æquationem ad Parabolam, abscissis à foco computatis, eadem degenerat. Nimirum æquatio ad Trajectoriam

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 h x}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Porro

$$g = \frac{4c^2}{p} \quad h = \frac{2a^2}{p}$$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} = \frac{16a^4 c^4 p^2}{16a^4 c^4 p^2} = 1$$

Coëfficiens itaque ipsius $x^2 = 1 - 1 = 0$: atque adeo hic terminus in æquatione, quæ quæritur, deficit.

$$\frac{8c^4 h}{a^2 g^2} = \frac{16a^2 c^4 p^2}{16a^2 c^4 p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4 p^2}{16c^4} = \frac{1}{4}p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \frac{1}{4}p^2$, quæ est ad Parabolam, abscissis à foco computatis (§. 666.).

Quodsi valor ipsius h in Ellipsi vel Hyperbola desideretur, in æquationibus.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

$$h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2} \text{ \& } h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} + \frac{a^4 g}{mc^2}$$

substituendus est valor ipsius g . Nimirum

$$g = \frac{4c^2}{p} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo

$$h^2 = \frac{16a^4 c^4}{4c^4 p^2} - \frac{4a^4 c^2}{mpc^2} = \frac{4a^4}{p^2} - \frac{4a^4}{mp} \\ = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2}$$

$$h = \frac{2a^2}{p} \sqrt{\left(1 + \frac{p}{m}\right)}$$

Si denique valor ipsius b desideretur, in æquatione $a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} = cb^3$ substituendus est valor ipsius g^2 & h^2

In Parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

$$\text{Unde } a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$$

$$\text{h. e. } a^3 b + \frac{4a^4 c^2}{p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$$

$$a^3 b = 0$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam supra reperimus.

In Hyperbola

$$h^2 = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Z

Ergo

$$\begin{aligned} \text{Ergo } a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} &= \frac{4a^4 mc^2 + 4a^4 c^2 p}{mp^2} \\ a^3 b &= \frac{4a^4 mc^2 + 4a^4 pc^2}{mp^2} - \frac{4a^4 c^2}{p^2} \\ &= \frac{4a^4 c^2}{mp} \\ b &= \frac{4ac^2}{mp} \end{aligned}$$

In Ellipsi idem prodit valor, sed negativus.

SCHOLIUM.

671. *A Theoria virium centralium pendet solutio Problematis de curva, in qua grave descendens eandem ubique premit vi ponderi absoluto equali: quod à Joanne BERNOULLI propositum (a) solvit HOSPITALIUS (b). Ejus igitur solutionem hic subnectere libet.*

PROBLEMA CXIII.

Tab. XVII. 168. 672. *Invenire curvam, in qua grave descendens motu naturaliter accelerato eandem in singulis punctis premit vi ubique equali ponderi corporis absoluto; seu, si MC sit radius evolutæ in puncto M, ut ubique filum MC eadem vi tendat.*

RESOLUTIO.

Sit AH axis curvæ, AB altitudo per quam cadendo acquirit celeritatem initialem, qua descensum in curva inchoat: PM & pm sint ordinatæ infinite propinquæ, MC radius evolutæ ad curvam BMK ex evolutione descriptam normalis (§. 317 *Analys. infin.*). Producat PM in N & repræsentet MN pondus absolutum corporis descendentis. Producat itidem radius evolutæ CM

indefinite & in eum sic productum ex Tab. XVII. Fig. 168. N demittatur perpendicularis NO; repræsentabit MO partem ponderis quo premitur curva in puncto M, seu planum in quo est tangens curvæ in puncto M (§. 47 *Geom.*).

Enimvero filum CM non modo tenditur in M ab hac gravitatis parte, quæ est ut MO; verum etiam a vi centrifuga quam habet in arcu Mm radio evolutæ MC descripto. Quamobrem aggregatum ex ea gravitatis parte & conatu centrifugo in M est æquale ponderi absoluto *per hypoth.*

Sit jam conatus centrifugus = V, erit (§. 639).

$$\frac{MC : 2PM = MN : V}{2PM \cdot MN}$$
adeoque $V = \frac{2PM \cdot MN}{MC}$, consequenter

$$MN = \frac{2PM \cdot MN}{MC} + MO$$
per demonstr.

Sit igitur MN = a, quia MN pondus absolutum denotans constans est, AP = x, PM = y, arcus curvæ BM = v; erit Pp = MR = dx, mR = dy, Mm = dv, & MC = t dv : dx (§. 320 *Anal. infin.*).

Ut valor ipsius t determinetur, fiat; ut ibidem, differentiale ipsius MC = 0. Sed quia in singulis arcibus Mm pressio eadem *per hypoth.* ubivis assumendi sunt æquales, atque adeo Mm = dv quantitas constans. Sumta igitur in differentiatione dv pro constante, prodibit

(a) In *Actis Erudit. Supplem.* T. 2. p. 291.

(b) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1700. pag. 11.

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$\frac{dv dt dx - t dv ddx}{dx^2} = 0$$

$$dv dt dx = t dv ddx$$

$$\frac{dt dx}{ddx} = t$$

Est vero $dt = dy$ (§. cit. *Analys. infin.*)

$$\text{Ergo } t = \frac{dy dx}{ddx}.$$

Substituatur hic valor in expressione radii osculi seu evolutæ $MC = t dv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dv dy dx}{dx ddx} = \frac{dy dv}{ddx}$$

Porro $CMR + RMm$ est rectus (§. 317 *Analys. infin.*), & $PMC + CMR$ itidem rectus, ob MR & Pp perpendiculares ad pR alteri PM parallelam (§. 230 *Geom.*). Quamobrem $CMR + RMm = PMC + CMR$ (§. 145 *Geom.*), adeoque $RMm = PMC$ (§. 91 *Arith.*). Est vero $PMC = OMN$ (§. 156 *Geom.*). Ergo $RMm = OMN$ (§. 87 *Arithm.*). Quoniam præterea anguli O & R recti sunt *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : MO$$

$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}.$$

Denique cum fit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2PM \cdot MN}{MC}$$

$$\text{hoc est, } \frac{dy dv}{ddx} : a = 2y : \frac{2 ay ddx}{dy dv}$$

$$\text{habebimus ob } \frac{2PM \cdot MN}{MC} + MO = MN$$

$$\text{per demonstrata, } \frac{2 ay ddx}{dy dv} + \frac{adx}{dv} = a$$

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$2 ay ddx + ady dx = ady dv$$

$$2 y ddx + dy dx = dy dv.$$

Quodsi coëfficiens 2 abesset, summa membri primi foret $y dx$. Sed si integrabile fieri debet, dividendum est per $2\sqrt{y}$: quo facto prodit

$$\frac{2 y ddx + dy dx}{2\sqrt{y}} = \frac{dy dv}{2\sqrt{y}}$$

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}, \text{ quia } dv \text{ constans.}$$

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv sit differentiale arcus, dx abscissæ; adjicienda est quantitas constans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $-dv\sqrt{a}$. Habemus adeo

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$$

$$y dx^2 = y dv^2 - 2 dv^2 \sqrt{ay} + a dv^2$$

$$\text{Sed } dv^2 = dx^2 + dy^2$$

Ergo

$$y dx^2 = y dx^2 + y dy^2 - 2 dx^2 \sqrt{ay} - 2 dy^2 \sqrt{ay} + a dx^2 + a dy^2$$

$$2 dx^2 \sqrt{ay} - a dx^2 = y dy^2 + a dy^2 - 2 dy^2 \sqrt{ay}$$

$$dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}.$$

$$\text{Fiat } z = 2\sqrt{ay} - a$$

$$\text{erit } dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{dz\sqrt{y}}{a} = dy$$

$$\text{Jam } z = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{y} - a$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

Tab.
XVII.
Fig.
168.

five $\frac{z+a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$

Porro $\frac{z}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

feu $\frac{z-a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$.

Quodsi ergo valores hactenus inventi substituantur in formula

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}; \text{ prodibit.}$$

$$dx = \frac{dz(z+a)(z-a)}{4a\sqrt{a}\sqrt{z}} \\ = \frac{(z^2 - a^2) dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a} = \frac{z^2 dz - a^2 dz}{\sqrt{z}} \\ = z^{3/2} dz - a^2 z^{-1/2} dz$$

$$4ax\sqrt{a} = \frac{2}{5} z^{5/2} - 2a^2 z^{1/2}$$

$$2ax\sqrt{a} = \frac{1}{5} (z^2 - 5a^2) \sqrt{z}$$

Jam $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$
 $\sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$

Quamobrem

$$10ax\sqrt{a} = (4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2) \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a) \sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)}$$

Sit $x = 0$; erit

$$2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$$

$$2y - 2\sqrt{ay} = 2a$$

$$y - \sqrt{ay} = a \\ \frac{3}{4}a \quad \frac{1}{4}a$$

$$y - \sqrt{ay} + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a$$

$$\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$2y = 3a + a\sqrt{5} = 2AB$$

Fiat $y = 0$,
 erit $5ax = -2a\sqrt{a^2}$

$$x = -\frac{2}{5}a$$

Curva igitur KMB continuatur ultra punctum B. Nimirum si fiat $AD = a$ & erecta perpendiculari $CD = \frac{2}{5}a$; curva huic in puncto C occurrit.

Quoniam curva verticalem ad angulos rectos secat, ubi differentiale semiordinatæ $= 0$; ut punctum reperiatur, in quo curva rectam AB secat ad angulos rectos, fiat $dy = 0$, erit ob
 $dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$
 $dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)} = 0$

$$2a\sqrt{ay} - a^2 = 0$$

$$2\sqrt{ay} = a$$

$$4ay = a^2$$

$$y = \frac{1}{4}a$$

Quamobrem si fiat $AG = \frac{1}{4}a$, curva secabit AB in G ad angulos rectos.

PROBLEMA CXIV.

673. Invenire curvam, in qua mobile descendens eandem quidem constanter eadem vi premit, sed quæ non equalis est ponderi absoluto.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in Problemate præcedente, nisi quod vis premens dicatur b ; erit (§. 672)

$$\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = b$$

$$2ayddx + adydx = bdydv$$

$$\frac{2ayddx + adydx}{2\sqrt{y}} = \frac{bdydy}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y} = bdy\sqrt{y} - ady\sqrt{a} \\ a^2 y dx^2$$

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$a^2 y dx^2 = b^2 y dv^2 - 2 ab dv^2 \sqrt{ay} + a^3 dv^2$$

$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2 y dx^2 = b^2 y dy^2 + b^2 y dx^2 - 2 ab dy^2 \sqrt{ay} - 2 ab dx^2 \sqrt{ay} + a^3 dy^2 + a^3 dx^2$$

$$a^2 y dx^2 - b^2 y dx^2 + 2 ab dx^2 \sqrt{ay} - a^3 dx^2 = b^2 y dy^2 - 2 ab dy^2 \sqrt{ay} + a^3 dy^2$$

$$dx \sqrt{(a^2 y - b^2 y + 2 ab \sqrt{ay} - a^3)} = dy (b \sqrt{y} - a \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy (b \sqrt{y} - a \sqrt{a})}{\sqrt{(a^2 y - b^2 y + 2 ab \sqrt{ay} - a^3)}}$$

Fiat $b=0$, erit

$$dx = \frac{ady \sqrt{a}}{\sqrt{(a^2 y - a^3)}} = \frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$

$$x = 2 \sqrt{(ay - a^2)}$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

Est igitur in hoc casu curva, per quam mobile descendit, Parabola, cuius parameter $= 4a$. Quando vero $b=0$, perinde est ac si mobile in vacuo libere descendit. Quamobrem consensus Hypothesium præsentium cum curva descensus Galileana patet. (§. 482).

SCHOLIUM.

674. Monuit jam VARIGNONIUS (a) eandem Solutionem ad alia Problemata similia extendi posse: quod quomodo fiat, sequente Problemate ostendere lubet.

PROBLEMA CXV.

Tab. XVII. 675. Invenire curvam, qua a pondere in ea descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum PM. Fig. 168.

RESOLUTIO.

Si omnia sint ut in antecedentibus, erit per hypothes.

$$\frac{2 ay ddx + adx dy}{dy dv} = \frac{y^n}{a^{n-1}} \quad (\S. 672)$$

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. P. 196.

$$2 y ddx + dxdy = y^n a^{-n} dv dy$$

$$\frac{2 y ddx + dxdy}{2 \sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{n-1/2} a^{-n} dv dy$$

$$dx \sqrt{y} = \frac{y^{n+1/2} dv}{(2n+1)a^n} = \frac{y^n dv \sqrt{y}}{(2n+1)a^n}$$

$$(2n+1) a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 = y^{2n} dv^2$$

$$= y^{2n} dx^2 + y^{2n} dy^2$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 - y^{2n} dx^2 = y^{2n} dy^2$$

$$dx \sqrt{(a^{2n} (2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n} (2n+1)^2 - y^{2n})}}$$

Quodsi jam fuerit $n=1$, adeoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile descendit, consequenter in ratione duplicata celeritatum (§. 86): erit.

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{(9a^2 - y^2)}}$$

$$x = -\sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

Fiat $y=0$, relinquetur $\sqrt{9a^2} = 3a$, consequenter (§. 109 Anal. infin.)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Est ergo curva quaesita circulus, cujus radius est $3a$.

Sit $n=2$, hoc est, prematur curva in ratione duplicata altitudinum descensus, seu quadruplicata celeritatum (§. 86); erit

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(25a^4 - y^4)}}$$

Z 3

Quæ

Quæ est æquatio ad Curvam Elasticam Bernoullianam (a).

Sit $n = \frac{1}{2}$, hoc est, prematur curva in ratione subduplicata altitudinum, seu in ratione celeritatum (S. cit.); erit

$$dx = \frac{y^{1/2} dy}{\sqrt{(4a-y)}}$$

$$dx^2 = \frac{y dy^2}{4a-y}$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= dv^2 = \frac{y dy^2}{4a-y} + dy^2 \\ &= \frac{y dy^2 + 4a dy^2 - y dy^2}{4a-y} \\ &= \frac{4a dy^2}{4a-y} \end{aligned}$$

$$dv = \frac{2dy \sqrt{a}}{\sqrt{(4a-y)}} = \frac{2ady}{\sqrt{(4a^2-ay)}}$$

$$v = -4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Fiat $y=0$, erit residuum $= -8a$, adeoque

$$v = 8a - 4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Tab.
XVII.

Quodsi diameter circuli HB $= 4a$,

Fig. HI $= y$; erit IB $= 4a - y$.

166. Quare IB² $= 16a^2 - 8ay + y^2$

$$IN^2 = 4ay - y^2$$

(S. 377 Anal. fin.)

$$BN^2 = 16a^2 - 4ay$$

$$BN = 2 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$$2BN = 4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

= arcui Cycloidis BM (S.

168 Anal. infin.)

$$2BH = BM + AM$$

$$8a = BMA$$

$$8a - 4 \sqrt{(4a^2 - ay)} = \text{arcui AM.}$$

Atque adeo patet curvam, quæ a mobili descendente premitur in ratione celeritatum, seu altitudinum subduplicata, esse Cycloidem ordinariam.

COROLLARIUM.

676. Quodsi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$; & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem est $dx = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(4a-y)}}$. Quare

si diameter circuli genitoris fuerit $= a$; reliqua maneant ut ante; æquatio ad Cycloidem est $dx = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}} = \frac{y dy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$,

consequenter area Cycloidis APM $= \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$.

C A P U T XIV.

De Resistentiâ Medii.

DEFINITIO LXX.

677. **P**ER Resistentiâ medii intelligitur resistentia fluidi, per quod mobile fertur.

(a) In Actis Eruditorum A. 1694. p. 272. & A. 1695. p. 538.

COROLLARIUM.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus resistit, loco pellere tenetur, atque adeo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, massa quippe manente eadem, minuitur (S. 22).

PRO-

PROBLEMA CXVI.

Tab. XVII. Fig. 169. 679. *Data celeritate mobilis in medio resistente motu aquabili lati; invenire celeritatem dato tempore amissam, spatium confectum, & curvam resistantie, in qua semiordinatae sunt ut celeritates amissae.*

RESOLUTIO.

Sit AB celeritas, qua mobile initio fertur $=a$, ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP $=x$ amissas, PN celeritas amissa $=r$; erit NM celeritas residua, quae dicatur v . Sit jam pm alteri PM infinite propinqua; erit NK differentia positiva semiordinatarum PN & pn , seu celeritatum extinctarum $=dr$, eademque differentia negativa semiordinatarum NM & nm seu celeritatum residuarum $=-dv$. Unde resultat

$$I. dr = -dv.$$

Tab. XVII. Fig. 170. Sit porro curva ESI, cujus ordinatae PS sunt ut NK (Fig. 169). seu legem resistantiae exponunt. Quod si ergo NK divides per PS, quotus erit quantitas constans; perinde enim fere est, ac si eandem quantitatem divides per se ipsam. Sit PS $=z$. Quoniam NK $=-dv$, per demonstrata; erit $\frac{NK}{PS} = -\frac{dv}{z}$. Jam cum Pp $=dx$; quia AP perinde ac in curva praecedente tempus exponit, sit constans; erit per legem homogeneorum

$$\frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}.$$

$$II. -adv = zdx.$$

Sit denique spatium a mobili tempusculo dx percursum $=ds$. Quoniam idem est vdx (§. 34), erit

$$ds = vdx$$

$$\text{adeoque III. } s = \int vdx$$

SCHOLIUM.

680. Ex formulis hisce generalibus, quas dedit VARIGNONIUS (a), deducuntur quae de resistantia medii in hypothesebus specialibus a WALLISIO, NEWTONO, HUGENIO, atque LEIBNITIO inventa sunt: quemadmodum ex sequentibus patebit.

THEOREMA CXLII.

681. Si mobile motu aquabili fertur per medium in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; curva resistantiae totalis ANG est Logarithmica, cujus asymptotus tempus, semiordinatae ad ipsum relate celeritates residuas representant.

Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobili resistitur in ratione celeritatum per hypothese. seu celeritates in instanti amissae sunt ut celeritates; si omnia sint ut in Problemate praecedente (§. 679): erit $z=v$. Est vero $-adv = zdx$, vi num. II. (§. cit.). Ergo $-adv = vdx$; consequenter $a = -\frac{vdx}{dv}$. Est vero

$-\frac{vdx}{dv}$ subtangens curvae, cujus abscissae sunt x , semiordinatae decrescientes v (§. 20 Anal. infin.). Ergo subtangens

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. m. 503.

Tab. tangens curvæ resistantiæ totalis ANG
XVII. constans est. Ipsa adeo est Logarithmi-
Fig. ca, cujus asymptotus BF (§. 54 Anal.
169. infin.). Repræsentat autem BF tem-
pus, & semiordinatæ ad ipsum relatæ
exprimunt celeritates residuas à resi-
stentia medii. Q. e. d.

S C H O L I O N.

682. Si quis dubitet hanc esse Logarithmi-
cæ proprietatem propriam, quod subtangens
sit constans: haud difficulter idem demonstra-
tur. Sint enim z & y duæ semiordinate, v &
 x ipsis respondentes abscissæ: erunt subtangen-
tes $\frac{ydx}{dy}$ & $\frac{zdv}{dz}$, adeoque $ydx:dy = a$, &
 $zdv:dz = a$ (§. 54 Anal. infin.), conse-
quenter $ydx:dy = zdv:dz$ (§. 87 Arithm.)
Quoniam differentiale abscissæ sumitur con-
stans; erit $dx = dv$, consequenter $y:dy$
 $= z:dz$ (§. 183 Arithm.), adeoque $y +$
 $dy:y = z + dz:z$ (§. 190 Arithm.). Ha-
bemus adeo semiordinate in proportionem geo-
metricam. Jam ipsis respondentes abscissæ $x +$
 dx & x , atque $v + dv$ & v , ob $dx = dv$,
sunt æqui-differentes (§. 322 Arithm.).
Abscissis adeo æqui-differentibus respondent
semiordinate in geometrica progressionem; con-
sequenter curva constantis subtangentis est
Logarithmica (§. 552 Anal. fin.). Ceterum
ANG dicitur curva resistantiæ totalis, ad
differentiam curvæ resistantiæ instantaneæ,
in qua semiordinate sunt ut celeritates in
instanti amissæ.

T H E O R E M A CXLIII.

683. Si mobile motu æquabili per
medium fertur, in quo eidem resiste-
tur in ratione celeritatum, & tempora
sumuntur æqualia; erunt celeritates in
principiis singulorum temporum in pro-

gressionem geometrica, & partes singulis
temporibus amissæ erunt iisdem propor-
tionales, seu ut totæ, vel etiam ut cele-
ritates in fine illorum temporum.

D E M O N S T R A T I O.

Si enim mobili a medio per quod
motu æquabili fertur, resistitur in ra-
tione celeritatum; curva resistantiæ
ANG Logarithmica est, cujus asymp-
totus BF tempus repræsentat, abscissæ
vero NM celeritates residuas exhibent
(§. 681). Quodsi ergo tempora su-
muntur æqualia, celeritates in princi-
piis temporum sunt in geometrica pro-
gressionem (§. 552 Anal. fin.) Quod
erat unum.

Quodsi fiat $BM = MR$, tempora;
quibus amittuntur celeritates AO &
NV, æqualia sunt. Est vero $AB:NM$
 $= NM:TR$, per demonstr. Ergo AB
 $- NM:AB = NM - TR:NM$ (§.
193 Arithm.), hoc est, $AO:AB = NV:$
 NM ; consequenter $AO:NV = AB:$
 NM (§. 173 Arithm.), seu celerita-
tes temporibus æqualibus amissæ sunt
ut totæ in principiis illorum tempo-
rum. Quod erat secundum.

Quoniam $AB:NM = NM:TR$ per
demonstr. crit etiam $AB - NM:NM$
 $= NM - TR:TR$ (§. 193 Arithm.);
hoc est, $AO:NM = NV:TR$, con-
sequenter $AO:NV = NM:TR$ (§.
173 Arithm.), seu celeritates tempo-
ribus æqualibus BM & MR amissæ, sunt
ut celeritates NM & TR in fine illo-
rum temporum. Quod erat tertium.

Tab. XVII. Fig. 169. Ultimum quoque ita ostenditur. $AO:NV = AB:NM$, per num. 2. & $AB:NM = NM:TR$, per num. 1. Ergo $AO:NV = NM:TR$ (§. 167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA CXLIV.

684. Si mobile motu æquabili per medium fertur in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; spatia singulis temporibus descripta sunt ut celeritates amissæ, & si tempora sumantur æqualia, ut celeritates totæ in principio vel in fine illorum temporum.

DEMONSTRATIO.

Si omnia sint ut in Problemate generali (§. 679); erit — $adv = zdx$, vi num. II. & $vdx = ds$, vi num. III. Est vero $z = v$ per hypoth. Ergo — $adv = vdx$ (§. 15 *Arithm.*); consequenter $ds = —adv$ (§. 87 *Arithm.*). Est igitur $s = a^2 — av$ (§. 95 *Anal. infinit.*), seu, ob constantem a , est s ut $a — v$ (§. 181 *Arithm.*). Sed $a — v$ est celeritas a mobili tempore x amissæ. Quamobrem spatia sunt ut celeritates amissæ. *Quod erat unum.*

Quod si tempora sumantur æqualia, celeritates amissæ sunt ut totæ in principio, vel in fine illorum temporum (§. 683). Sunt vero etiam ut celeritates amissæ istis temporibus, ita spatia movendo iisdem confecta per demonstrata. Ergo eadem spatia sunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA CXLV.

685. Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum resistitur, & tempora sumuntur æqualia seu in progressionem arithmetica; erunt celeritates in instanti, seu tempusculo infinite parvo, amissæ ut celeritates in fine illorum temporum.

DEMONSTRATIO.

Curva enim resistentiæ Logarithmica est, cujus asymptotus tempora, semiordinatæ ad eandem relatæ celeritates in fine illorum temporum repræsentant (§. 681). Quare si tempora sint x & t , semiordinatæ ipsis respondentes y & z ; erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (§. 54 *Anal. infin.*); consequenter cum tempora sumantur in progressionem arithmetica, per hypoth. fitque adeo $dx = dt$ (§. 333 *Arithm.*) $y:dy = z:dz$. Est itaque $y:z = dy:dz$ (§. 173 *Arithm.*), hoc est, celeritates in fine temporum istorum y & z sunt ut celeritates in instanti inde amissæ dy & dz . *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

686. Quoniam in curva resistentiæ Tab. instantaneæ ESI, abscissa EP est ut tem- XVII. pus, semiordinata PS ut celeritas in in- Fig. stanti amissæ (§. 682); PS vero est celeri- 170. tas in fine temporis EP mobili residua (§. 685), & in curva resistentiæ totalis abscissis, tanquam temporibus, respondent semiordinatæ, tanquam celeritates istis amissæ (§. 682); curva resistentiæ totalis eadem quæ curva resistentiæ instantaneæ, si mobili motu æquabili lato resistitur in ratione velocitatum.

A a

THEO-

THEOREMA CXLVI.

687. Si mobili motu aquabili lato resistitur in medio per quod fertur in ratione celeritatum; spatia adhuc percurrenta sunt celeritatibus residuis proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium integrum percurrentum ad spatium aliud percurrentum, ita celeritas quam initio motus habet mobile ad celeritatem residuam (§. 684). Quamobrem spatium quodlibet adhuc percurrentum est ad integrum, ut celeritas residua qua percurrentum, ad celeritatem initialem, seu quam in principio habet mobile (§. 193 *Arithm.*): quod cum de omni spatio percurrento verum sit; erit spatium percurrentum unum ad aliud quodcunque, ut celeritas residua qua illud percurrentum, ad celeritatem residuam, qua hoc percurrentum (§. 195 *Arith.*); hoc est, spatia adhuc percurrenta sunt celeritatibus residuis quibus percurrenta proportionalia (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. XVII. Fig. 169. 688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per spatium integrum percurrentum; cum spatia percurfa sint AO, AQ &c. (§. 684), erunt percurrenta OB, QB &c. seu applicatæ NM & TR ad asymptotum BF Logistica ANG.

THEOREMA CXLVII.

689. Si mobili motu aquabili lato a medio resistitur in ratione celeritatum, & spatia adhuc percurrenta sint ut numeri;

erunt tempora insumta percursis ut illorum Logarithmi.

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenta sunt ut semiordinatæ Logisticae NM, TR &c. applicatæ ad tempora insumta BM, BR, spatiis jam percussis AO, AQ (§. 688). Enimvero si in Logistica NM, TR sumuntur ut numeri, abscissæ BM, BR sunt ut eorum Logarithmi (§. 553 *Anal.*). Ergo si spatia percurrenta sunt ut numeri, tempora sunt eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA CXLVIII.

690. Si mobile aquabili motu incedit in medio quod in ratione velocitatum eidem resistit; celeritas nonnisi tempore infinito extinguitur, & spatium percurrentum integrum AB nunquam absolvit, etsi semper accedat ad limitem.

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decrescen-tes sunt ut semiordinatæ Logarithmicæ ad asymptotum BF applicatæ, & asymptotus tempus exhibet (§. 681). Quare cum AB celeritatem integram repræsentet quam mobile in principio motus habet; ea prorsus extinguere nequit, nisi punctis G & F coincidentibus, seu Logistica ANG cum asymptoto BF concurrente; quod cum fieri non possit nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. infin.*); celeritas quoque nullo tempore finito extinguere potest. *Quod erat primum.*

Jam cum celeritate quam in principio motus habet mobile non prorsus extincta,

Tab. XVII. Fig. 169. extincta, terminum B attingere non pos-
sit; nullo quoque tempore finito eun-
dem attingere valet; adeoque spatium
percurrendum integrum AB nunquam
absolvit. *Quod erat secundum.*

Quia tamen motus indefinenter con-
tinuatur, adeoque spatium celeritatibus
amissis descriptum continuo crescit;
mobile ad terminum suum B continuo
propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHOLIUM.

691. Nemo objiciat Propositionem præsen-
tem experientia repugnare: neque enim hypo-
thesis resistantia in ratione velocitatum natura
rerum conformis, quemadmodum suspicatus
fuit WALLISIUS. Et si vel maxime hypo-
thesis naturæ prope ad eam accederet; ex na-
turæ consuetudine motus in praxi tandem insen-
sibilis fieri deberet, quemadmodum a LEIB-
NITIO (a) jam annotatum est.

THEOREMA CXLIX.

692. Si intra asymptotos rectangulas
AB & BK describatur Hyperbola FLS, &
motus initio, celeritas exponatur per re-
ctam AB, elapso aliquo tempore vero per
rectam OB; tempus per aream AFL(),
& spatium eo tempore descriptum per
rectam AO exprimi potest.

DEMONSTRATIO.

Si enim BQ & BO fuerint celerita-
tes in fine temporum BM & BR restan-
tes; dicaturque $BQ = y$, $BO = z$; erit
 $y : z = dy : dz$ (§. 685), consequenter
 $y : dy = z : dz$ (§. 173 Arithm.).
Sunt vero $\frac{dy}{y}$ & $\frac{dz}{z}$ elementa spatii hy-

perbolici asymptotici (§. 120 Anal. Tab. XVII. Fig. 169. *infin.*). Quamobrem elementa ista
æqualia sunt, si eorum altitudines quæ
sunt abscissarum in asymptoto BA sum-
tarum differentialia, fuerint ut celeri-
tates in instanti amissæ. Quod si ergo,
ab initio motus usque ad plenariam ex-
tinctionem, sumantur continuo AO, AQ
ut celeritates extinctæ; spatium hyper-
bolicum asymptoticum resolvitur in
elementa inter se æqualia. Atque adeo
area FAOL successiva elementorum
æqualium additione gignitur, quemad-
modum abscissa AP continua accessio-
ne elementorum æqualium resultat.
Enimvero abscissa AP exponitur tem-
pus, quo celeritas PN, sive AO, amit-
titur, per hypoth. Ergo etiam spatium
hyperbolicum AFLO tempus designare
debet, quo celeritas AO amittitur.
Quod erat unum.

Jam rectæ AO & AQ sunt ut celeri-
tates temporibus BM & BR amissæ, per
hypoth. Sunt vero spatia temporibus
BM & BR movendo confecta ut cele-
ritates iisdem temporibus extinctæ
(§. 684). Ergo spatia temporibus BM
& BR seu, quod perinde est per de-
monstrata, temporibus AFLO & AFHQ
confecta sunt ut rectæ AO & AQ.
Quod erat alterum.

THEOREMA CL.

693. Si motui æquabili in medio re-
sistitur in ratione celeritatum; decre-
menta celeritatum sunt incrementis spa-
tiorum proportionalia.

(a) In Actis Eruditorum. A. 1689. p. 41.

DEMONSTRATIO.

Spacia enim & celeritates amissæ eodem tempore per eandem rectam exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decrements eodem tempore, per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa spatiorum & decrements celeritatum iisdem rectis proportionalia sunt; spatiorum quoque incrementa celeritatum decrements proportionalia sunt (§. 167 Arithm.) *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

694. WALLISIUS, qui primus de resistentia aëris in motu corporum determinanda cogitavit (a), & resistentiam in ratione celeritatum fieri supposuit; rationem celeritatis a , quæ initio motus est, ad residuam, uno momento, seu tempusculo infinite parvo elapso, sumit ut m ad 1. Celeritas igitur residua est $\frac{a}{m}$.

Jam cum celeritates residuæ in progressionem geometricam decrescant (§. 685), per hanc seriem exhibentur celeritates ab initio motus usque ad

ejus extinctionem, $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}, \&c.$

in infinitum, donec scilicet quod restat est respectu ipsius a infinite parvum, adeoque nullum. Summa igitur celeritatum

$a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5} \&c.$

in infinitum, ob terminum ultimum contemtilis parvitatatis, $= \frac{a}{m-1} + a$ (§. 120 Anal. fin.)

$= \frac{a + ma - a}{m-1} = \frac{ma}{m-1}$. Jam vero, singulis

celeritatibus, tempusculis aequalibus describuntur singula spatiola, quæ cum sint ut celeritates, spatium integrum, celeritate prorsus ex-

(a) In Algebra c. 101. f. 438. Vol. 2. Oper.

tingita, erit $\frac{ma}{m-1}$, seu, si $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, quemadmodum idem determinat WALLISIUS.

SCHOLIUM II.

695. NEWTONUS (b) cum deprehenderet hypothesin resistentiæ in ratione celeritatis magis mathematicam esse quam naturalem, & naturam magis conformem censens alteram de resistentia in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege resistentiæ oriundos considerare cepit. Nostrum igitur est ut eosdem hic more nostro explicemus. Ex superioribus enim formulis generalibus deducuntur, quæ de eodem notanda veniunt; prouti ex sequentibus patet.

THEOREMA CLI.

696. Si corpus motu æquabili per medium simile fertur, ipsique resistitur in velocitatis ratione duplicata; curva resistentiæ totalis est Hyperbola æquilatera ANG intra asymptotos HK & KF, puncto B, in quo celeritas initialis AB applicatur, a centro K intervallo rectæ AB quæ celeritatem initialem exponit distante.

Tab. XVII
Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis $AB = a$, celeritas amissa $= v$, tempus quo amittitur $= x$, decrementum celeritatis instantaneum ut z ; erit $—adv = zdx$ (vi num. II. §. 679). Est vero decrementum celeritatis instantaneum in ratione duplicata celeritatis extinctæ per hypothesin adeoque servata lege homogeneorum $z = \frac{v^2}{a}$.

Quamobrem

$$\frac{—adv}{v^2} = \frac{\frac{v^2 dx}{a}}{a^2}$$

hoc

(b) In Princ. Lib. 2. Prop. 5. & seqq. p. m. 239.

Tab. XVII. Fig. 171. hoc est, $\frac{v^{-2} dv}{v^{-1}} = dx : a^2$
Sive, si quantitas constans in integration adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = 0$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, adeoque

$$\frac{1}{a} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$$

$$\frac{a^2 - av}{a^2} = \frac{vx}{a^2}$$

$$a^2 = vx + av$$

Curva igitur resistentiae totalis ANG est Hyperbola æquilatera intra asymptotos HK & KF; latere potentiae Hyperbolæ existente linea recta quæ celeritatem exponit, & applicata AB, quæ eandem exponit, sui intervallo a centro K remota (§. 490 Anal. fin.).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræsentatur per asymptotum BF, celeritates residuæ per semiordinatas NM, Hyperbola vero cum asymptoto ANG non concurrit (§. 481 Anal. fin.); celeritas, quas fertur mobile, integra nonnisi infinito tempore per resistentiam medii exinguitur, seu mobile nunquam motu suo prorsus privatur.

THEOREMA CLII.

698. Si mobili motu æquabili lato resistitur a medio in ratione duplicata celeritatis; celeritas residua erit ad extinctam in ea ratione quam habet latus

potentiae Hyperbolæ KB ad partem asymptoti BM exponentem tempus quo celeritas extincta fuit.

Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si enim potentiae Hyperbolæ latus $KB = BA = a$, recta tempus exponens $BM = x$, celeritas residua $MN = v$, adeoque extincta $PN = a - v$; erit $a^2 - av = vx$ (§. 696). Est igitur $a : x = v : a - v$ (§. 299 Arithm.), hoc est, $AB : BM = MN : NP$, seu celeritas residua est ad extinctam, ut latus potentiae Hyperbolæ ad partem asymptoti tempus exponentem quo celeritas extincta fuit. Q. e. d.

THEOREMA CLIII.

699. Si mobili motu æquabili lato resistitur a medio in ratione duplicata celeritatis; spatium dato tempore est ut logarithmus rationis quam habet celeritas initialis ad residuam tempore isto elapso.

DEMONSTRATIO.

Si enim spatium sit s , reliqua sint ut ante; erit $v dx = ds$ (§. 679). Est vero in hypothesi propositionis $-\frac{a^2 dv}{v^2} = dx$ (§. 696), adeoque $v dx = -a^2 dv : v$, consequenter $ds = -a^2 dv : v$. Sed $-a dv : v$ est differentiale logarithmi fractionis $a : v$ (§. 243 Analys. infin.). Quamobrem $s = al(a : v)$, hoc est, ob constantem a , spatium dato percursum tempore est ut $l(a : v)$, seu ut logarithmus celeritatis initialis a ad residuam v . Q. e. d.

THEOREMA CLIV.

Tab. XVII. Fig. 171. 700. Si mobili æquabili motu per medium resistens lato resistitur in ratione duplicata celeritatum; tempore, quod per partem asymptoti BM Hyperbolæ ANG exponitur confectum spatium representatur per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN inter celeritatem initialem AB & residuam NM interceptum.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $BM = x$ & celeritas restans $MN = v$; erit $v dx$ elementum arcæ ABMN (§. 97 *Analys. infin.*). Sed si spatium tempore BM descriptum $= s$; erit $ds = v dx$ (§. 679). Ergo $s = \int v dx = ABMN$. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, respondens ABMN, exprimit spatium a mobili tempore isto confectum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

701. Quoniam spatia motu æquabili dato tempore confecta sunt in ratione composita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret spatium, quod est ut BM. AB (§. 159 *Arithm.*); consequenter spatium istud exponit rectangulum ABMP (§. 376 *Geom.*). Quare cum motu resistentiis in duplicata celeritatum ratione impedito, tempore BM, conficiatur spatium per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit spatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita descriptum, ad spatium quod eodem tempore in medio non resistente describeret mobile; ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN, ad rectangulum ABMP.

THEOREMA CLV.

702. Si motus æquabilis impeditur resistentiis quæ sunt in ratione duplicata celeritatum; decrementa celeritatum instantanea sunt in ratione composita ex celeritate residua & incremento momentaneo spatii percurssi.

DEMONSTRATIO.

Constat ex demonstratione Theorematis 151. (§. 696), esse $— dv = v^2 dx : a$. Est igitur $— dv$ ut $v^2 dx$ propter constantem a^2 (§. 181 *Arith.*). Enimvero $v^2 dx = v \cdot v dx$, & v designat celeritatem residuam, $v dx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum spatii in medio resistente percursum. Ergo, in hypothese Theorematis, decrementa momentanea velocitatis $= — dv$ sunt in ratione composita celeritatum residuarum & incrementorum momentaneorum spatii percurssi. *Q. e. d.*

THEOREMA CLVI.

703. Si recta AB celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio per quod æquabiliter movetur in ratione duplicata celeritatum resistitur, & erectis perpendicularibus AC & BF describantur duæ Logarithmicæ ANG & BOR, quarum communis est subtangens AB, altera vero BOR ad asymptotum AC, altera ANG ad asymptotum BF relata; ducta PO ipsi AB parallela, exponet MO tempus, PN celeritatem isto tempore amissam, & NM celeritatem in fine illius temporis adhuc residuam.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XVII. Si enim subtangens communis AB
Fig. 172. $=a$, tempus $=x$, celeritas in fine
ejusdem residua $=v$; erit

$$a^2 = vx + av \quad (\S. 696)$$

$$0 = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

Sunt adeo $-\int \frac{dv}{v}$ & $\int \frac{dx}{a+x}$ duo logarithmi æquales (§. 243 *Analys. infin.*). Quare si sit $BM=y$ & NM

$=v$; erit $\frac{dy}{a} = -\frac{dv}{v}$; adeoque

ANG Logarithmica ad asymptotum BF relata, cujus subtangens $a=AB$.

Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$, (§. 87 *Arithm.*)

erit itidem BOR Logarithmica ad asymptotum AC relata, cujus itidem subtangens AB (§. 54 *Anal. infin.*)

Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus $=x$, celeritas residua $=v$, vi denominationis; recta $MO=x$ tempus, $NM=v$ celeritatem in fine ejus residuam, & PN celeritatem tempore MO amissam exponit. Q. e. d.

THEOREMA CLVII.

Tab. XVII. 704. Si tempus BM resolvitur in
Fig. 171. tempuscula quæ sunt in progressionem geometrica; spatiola istis tempusculis descripta æqualia sunt, & velocitates residuæ sunt in eadem ratione decrescente in qua tempora crescunt quantitate quadam constante aucta.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM asymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; spatium hyperbolicum ABMN exponit spatium a mobili tempore BM in medio resistente descriptum (§. 700). Enimvero ostendimus in superioribus (§. 692), si BM resolvitur in particulas, quæ sunt in progressionem geometrica, arcam ABMN resolvi in spatiola seu elementa inter se æqualia. Spatiola igitur tempusculis in ratione geometrica progredientibus descripta sunt inter se æqualia. Quod erat unum.

Si AB exprimat celeritatem initialem, & duæ fuerint Logisticae ANG & BOR ad asymptotos BF & AC relatæ; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine istius residuam (§. 703). Sumantur jam in asymptotis abscissæ BM vel AP in progressionem arithmetica, erunt NM & PO in progressionem geometrica & quidem semiordinatæ NM in decrescente, semiordinatæ vero PO in crescente (§. 552 *Anal. fin.*). Patet igitur, temporibus MO quantitate constante AB (=PM) auctis in ratione geometrica crescentibus, celeritates residuas NM in ratione geometrica decrescere. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

705. Quoniam spatia dato tempore descripta sunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum residuarum (§. 699): celeritates residuæ sumantur ut numeri, spatia sunt ut eorum logarithmi, & tempora etiam sunt ut numeri (§. 704).

COROL.

Tab. XVII.
Fig. 171.

Tab. XVII.
Fig. 172.

COROLLARIUM II.

Tab.
XVII.
Fig.
172.

706. Quare cum AP vel BM sit ut logarithmus MN vel PO ; erit BM vel AP ut spatium tempore MO celeritate PN, utpote extincta tempore MO (§. 705), descriptum (§. 453 Anal. fin.)

SCHOLIUM.

707. Eadem methodo ad alias Hypotheses resistentiæ applicari poterant formulæ generales. Sed cum istiusmodi Hypotheses magis geometricæ, quam naturales sint ; plura in præsentem non addimus : ad resistentias in motu gravium explicandas progressuri in duabus Hypothesibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in Hypothesi Galilæana, utpote experimentis in iis a Centro Telluris distantis consentiente, in quibus ea capere licet.

PROBLEMA CXVII.

Tab.
XVIII.
Fig.
173.

708. Invenire curvam resistentiæ, celeritatem residuam, & spatium dato tempore descriptum, in motu gravium, seu æquabiliter accelerato.

RESOLUTIO.

Exponat recta AC tempus. Fiat AP=PM ; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquisitam (§. 68), & AMF erit linea recta, ac APM triangulum æquicrurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per resistentiam, & MN celeritas in fine illius temporis residua ; erit ANG curva resistentiæ totalis. Ducatur pm ipsi PM infinite propinqua, & demissa perpendiculari NR ; erit nR particula celeritatis tempusculo Pp extincta. Fiat PS ut nR ; erit ESI curva resistentiæ instantaneæ (§. 682). Denique fiat QP=NM ; erit AQH curva celeritatum residuarum.

Sit jam AP=PM=x, NM=Tab. PQ=v, PS=z, PN=r ; erit XVIII.
Fig.
173.

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

$$I. dr = dx - dv$$

Porro ut supra (§. 679)

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{Unde } \frac{dx - dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$II. adx - adv = zdx$$

quæ est æquatio ad curvam resistentiæ instantaneæ ESI.

Tandem si s spatium tempore x confectum denotet, erit ut supra (§. 679)

$$III. vdx = ds.$$

SCHOLIUM.

709. Ex formulis hisce generalibus, perinde ac supra, deducuntur quæ de motu gravium in medio resistente a NEWTONO, HUGENIO & LEIBNITIO inventa sunt ; quemadmodum ex sequentibus intelligitur.

THEOREMA CLVIII.

710. Si gravi descendentem resistitur Tab. in ratione celeritatum ; curva celerita- XVIII.
Fig.
174.
tum residuarum AQH est Logarithmica, cujus asymptotus BF tempus exponit, semiordinata vero OQ ad asymptotum relata sunt differentia inter celeritates residuas PQ & subtangentem AB.

DEMONSTRATIO.

Si AP=x, PQ=v, AB=a ; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708).

Est

ab. VIII. Fig. 74. Est vero $z = v$ per hypoth.

Ergo $adx - adv = vdx$

$$\frac{adx - vdx = adv}{dx = \frac{adv}{a-v}}$$

$$dx = \frac{adv}{a-v}$$

Quæ est æquatio ad curvam AQH.

Fiat $a - v = y$

erit $a - y = v$

$$-dy = dv$$

$$\frac{ady}{y} = \frac{adv}{a-v} = dx$$

Quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$ (§. 54 *Analys. infin.*).

Sit itaque $AB = a$, $AP = BO = x$; erit $Oo = Pp = dx$. Quoniam $PQ = v$; erit $QO = a - v = y$, adeoque $QL = -dy$. Quod si ergo, sumpta AB pro subtangente, describatur Logarithmica, cujus asymptotus BF; erit

$dx = -\frac{ady}{y}$ æquatio ad eandem. Est

igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF, semiordinatæ vero sunt differentiæ inter lineas quæ celeritates in fine singulorum temporum residuas exponunt, atque rectam quandam constantem AB, cui subtangens æqualis est (§. 54 *Anal. infin.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

711. Quod si fiat $PM = AP$ & $MN = PQ$; erit PN celeritas per resistantiam amissa tempore AP, consequenter ANG curva resistantiæ totalis (§. 682). Data igitur

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum, datur curva resistantiæ totalis ANG. Tab. XVIII. Fig.

THEOREMA CLIX.

174.

712. Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum; spatia movendo confecta sunt ut celeritates extinctæ.

DEMONSTRATIO.

Si omnia fuerint ut in Theoremate præcedente, erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Est vero $vdx = ds$ (§. cit.). Ergo $ds = adx - adv$, consequenter $s = ax - av$. Est igitur propter constantem a spatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181 *Arithm.*). Quoniam $PM = x$, $MN = v$; PM vero est celeritas cadendo tempore AP acquisita & MN celeritas in fine temporis in medio resistente residua, erit $PN = x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igitur spatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. Q. e. d.

COROLLARIUM.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non resistente a gravi acquisitam est ut tempus AP (§. 68); PN vero denotans celeritatem extinctam ut spatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus insumptis proportionales, a quibus spatia movendo in medio resistente confecta si subtrahantur, relinquunt rectas NM celeritati in medio resistente a gravi acquisitæ proportionales.

THEOREMA CLX.

714. Si complementa celeritatum a gravi in medio resistente in ratione celeritatum cadendo acquisitarum ad celeritatem maximam quam corpus cadendo acquirere valet sumantur ut numeri; erunt tempora insumta ut eorum logarithmi.

B b

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab.
XVIII.
Fig.
174.

Si BF exponit tempus, curva AQH celeritatum residuarum est Logarithmica; cujus asymptotus BF, subtangens AB (§. 710). Quoniam Logistica AQH cum asymptoto BF non concurret nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. fin.*); AB est celeritas quam in medio resistente infinito tempore grave cadendo acquirere potest, adeoque absolute maxima. Est itaque QO celeritatis tempore AP in medio resistente acquisitæ complementum ad maximam. Quamobrem si complementa celeritatum acquisitarum ad maximam sunt ut numeri; erunt tempora infumta, quæ per AP sive BO denotantur, ut ipsorum logarithmi (§. 553 *Anal. fin.*) *Q. e. d.*

THEOREMA CLXI.

715. Si grave in medio cadit quod in ratione celeritatum descensui ejus resistit; celeritatem absolute maximam nunquam acquirit.

DEMONSTRATIO.

Est enim curva celeritatum residuarum in medio resistente, seu acquisitarum si medium in ratione celeritatum resistit, AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF. (§. 710). Quoniam celeritates acquisitæ sunt semiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræsentatur per semiordinatam, quæ respondet puncto, in quo curva AQH asymptotum BF secat. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 553 *Anal. fin.*), seu

quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem absolute maximam acquirat. Eam igitur nunquam acquirit. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXII.

716. Si grave descendit per medium in ratione velocitatum resistens; celeritatum, temporibus in progressionem arithmetica auctis, cadendo acquisitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere potest differentia in progressionem geometrica decrescunt.

DEMONSTRATIO.

Constat enim ex antecedentibus, si AQH sit Logarithmica, cujus asymptotus BF & AK eidem parallela; esse QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquisitam (§. 710), & BA celeritatem maximam quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abscissæ EO, BR ut tempora, semiordinatæ ipsis respondentes OQ & RV ut celeritatum QP & VT istis temporibus acquisitarum differentia a maxima, seu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero si in Logarithmica abscissæ crescunt in progressionem arithmetica semiordinatæ in geometrica decrescunt (§. 552 *Anal. fin.*). Ergo si grave per medium in ratione velocitatum resistens cadit, & tempora in progressionem arithmetica crescunt; celeritatum temporibus istis acquisitarum differentia a maxima in geometrica decrescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXIII.

Tab. 717. Si gravi per medium descen-
VIII. denti resistatur in ratione celeritatum, &
Fig. axis AK tempora descensus representet,
174. ANG sit curva resistentia totalis, AQH
vero curva celeritatum acquisitarum,
& circa axem AD ad AK normalem de-
scribatur Parabola AIC, cujus parameter
est ut dupla celeritas maxima quam
corpus cadendo acquirere valet; spatium
in medio resistente confectum est ad spa-
tium eodem tempore in vacuo conficien-
dum, in ratione PN ad PI, seu ut semi-
ordinata curva resistentia totalis ad se-
miordinatam Parabola externa ad eun-
dem axem relata.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim spatium, in medio re-
sistente in ratione celeritatum, moven-
do confectum est tempore $AP = x$ ut
 $ax - av$ (§. 712); spatium vero eo-
dem tempore in vacuo conficiendum
ut $\frac{1}{2}x^2$ (§. 80); erit istud ad hoc ut
 $ax - av$ ad $\frac{1}{2}x^2$, consequenter ut
 $x - v$ ad $x^2 : 2a$ (§. 181 Arithm.).
Jam cum ANG sit curva resistentiae to-
talis per hypoth. erit $PN = x - v$ (§. 712),
& quia AQH est curva celeritatum
temporibus x acquisitarum per hypoth.
celeritas maxima, quam corpus caden-
do acquirere potest, est ut recta AB
 $= a$ (§. 715). Enimvero si circa axem
AD parametro $2a$, quae est ut dupla
celeritas maxima a gravi acquisitu possi-
bilis, describatur Parabola AIC, cum sit
 $QI = AP = x$; erit $AQ = PI = x^2 : 2a$
(§. 398 Anal. fin.). Est igitur spa-

tium movendo in medio resistente con-
fectum, ad spatium eodem tempore in
medio non resistente conficiendum, ut
PN ad PI. Q. e. d. Tab. XVIII. Fig. 174.

THEOREMA CLXIV.

718. Spatium a gravi per medium
in ratione velocitatum resistens descen-
dente confectum tempore infinito infini-
tum est; celeritas vero tempore isto ac-
quisita finita est.

DEMONSTRATIO.

Iisdem enim positis, quae in antece-
dentibus, spatium movendo confectum
tempore AP est ut semiordinata PN.
Quare cum crescente AP crescat etiam
PN; ubi AP fit infinita, etiam applica-
ta ad AP infinita evadere debet, con-
sequenter tempore infinito percursum
spatium infinitum est. Quod erat unum.

Jam celeritas absolute maxima, quam
corpus in medio resistente cadendo ac-
quirere potest, exponitur per substan-
gentem Logisticae AQH ipsi AB aequa-
lem, adeoque per lineam finitam; con-
sequenter & ipsa finita est. Celeritas
igitur tempore infinito acquisita finita
est. Quod erat alterum.

THEOREMA CLXV.

719. Si intra asymptotos CB & BA Tab. XVIII. Fig. 175.
rectangulas describatur Hyperbola equi-
laterata, & recta AB vel rectangulum
ABNE exponat celeritatem maximam
quam corpus per medium in ratione cele-
ritatum resistens acquirere valet; area
AILE exponet tempus, rectangulum
B b 2 AIKE

Tab. AIKE *celeritatem cadendo acquisitam*, &
XVIII. EKL *spatium tempore isto confectum*.

Fig.

DEMONSTRATIO.

175.

Sit $AB = a$, seu ut celeritas maxima quam corpus acquirere valet, $AI = v$, seu ut celeritas tempore x acquisita, & $AE = b$; erit, ob constantem b , $ab : bv = a : v$ (§. 178 *Arithm.*), adeoque etiam rectangulum ABNE exponet celeritatem maximam, quam corpus cadendo in medio resistente acquirere valet, & AIKE exponet celeritatem dato tempore x acquisitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium resistit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{adv}{a-v}$ (§. 710),

adeoque $b dx = \frac{ab dv}{a-v}$. Quoniam

$AB = a$, $AI = v$; erit $BI = a - v$. Est vero in Hyperbola BA. $AE = BI \cdot IL$ (§. 486 *Analys. fin.*), adeoque $(a-v) \cdot IL = ab$, consequenter $IL = ab : (a-v)$. Est igitur $ab dv : (a-v)$ elementum areæ AILE. Quamobrem $b x$ æquatur areæ AILE, & hinc x seu $AP = AILE : AE$. Ob constantem itaque AE, tempus x est ut spatium hyperbolicum asymptoticum AILE (§. 178 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Jam si tempus x exponatur per rectam AP, & celeritas eodem acquisita v per rectam AI; spatium cadendo confectum est ut $x - v$ (§. 712). Quare si tempus exponitur per spatium hyperbolicum AILE, & celeritas isto tempore acquisita per rectangulum AIKE; spatium descensus exponitur per eorum differentiam, adeoque per trilineum hyperbolicum EKL. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

720. Quoniam celeritas per resistentiam medii in ratione celeritatis extincta est ut spatium dato tempore cadendo confectum (§. 712), spatium vero hoc est ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore AILE extincta ut trilineum KLE.

COROLLARIUM II.

721. Et quia rectangulum AIKE celeritatem cadendo tempore AILE acquisitam exponit (§. 719); celeritas acquisita est ad celeritatem extinctam ut rectangulum AIKE ad trilineum hyperbolicum EKL.

THEOREMA CLXVI.

722. Si recta dimidia AB sit subtangens, & AC asymptotus Logarithmica BOI, ductaque BF ipsi AC parallela, fiat ut semiordinata Logarithmica OP aucta dupla subtangente AB ad OK semiordinatam, ita abscissa AP ad quartam proportionalem PQ; erit punctum Q in curva celeritatum residuarum AQH, seu abscissa AP tempus, semiordinata PQ celeritatem hoc tempore cadendo a gravi acquisitam exponet, siquidem eadem resistitur in ratione celeritatum duplicata.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PQ = v$; erit $adx - adv = z dx$ (§. 708). Est vero $z = v^2 : a$, per hypoth. observata scilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2 dx - a^2 dv = v^3 dx$$

$$a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$$

$$dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$$

Fiat

Tab.
VIII.
Fig.
176.

Fiat $v = \frac{ay - a^2}{y + a}$

erit $dv = \frac{aydy + a^2dy - aydy + a^2dy}{(y+a)^2} = \frac{2a^2dy}{(y+a)^2}$

& $v^2 = \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

adeoque $a^2 - v^2 = a^2 - \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{(y+a)^2} = \frac{4a^3y}{(y+a)^2}$

Ergo $\frac{a^2dv}{a^2 - v^2} = \frac{2a^4dy(y+a)^2}{4a^3y(y+a)^2} = \frac{\frac{1}{2}ady}{y}$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2}ady : y$, quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $\frac{1}{2}a$.

Sit itaque $AB = a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Describatur Logarithmica BOI, cujus asymptotus AC, subtangens $= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Si jam sumatur $AP = x$, erit $PO = y$, adeoque $OK = y - a$, consequenter $dx = \frac{1}{2}ady : y$ (§. 54 Anal. infin.). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, adeoque $y + a : y - a = a : v$. Est itaque $PO + AB : OK = AB : PQ$. Quare cum $PQ = v$ sit celeritas tempore x residua; recta AP tempus, PQ celeritatem residuam seu hoc tempore acquisitam exponit; consequenter AQH est curva celeritatum residuarum (§. 682). Q. e. d.

COROLLARIUM.

723. Quodsi fiat $PM = AP$, & $MN = QP$; erit punctum N in curva resistantiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM est ut celeritas cadendo in vacuo seu medio non resistente acquisita (§. 68).

Quare cum QP sit ut celeritas in medio resistente tempore AP acquisita (§. 722); XVIII. si MN ipsi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas resistantia medii extincta tempore AP. Est igitur ANG curva resistantiæ totalis (§. 682). Fig. 176.

THEOREMA CLXVII.

724. Iisdem positis quæ in Propositione precedente, dupla subtangens AB Logarithmica BOI, cujus ope curva celeritatum residuarum AQH construitur, celeritatem maximam exponit quam grave, in medio in ratione duplicata celeritatum resistente cadendo, acquirere potest; eam vero grave non acquirit nisi tempore infinito elapso, & recta BF est curvæ celeritatum residuarum AQH asymptotus.

DEMONSTRATIO.

Ponamus semiordinatam QP quæ celeritatem in medio resistente tempore AP acquisitam exponit, fieri ipsi AB seu subtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Est vero $PO + AB : OK = AB : PQ$ (§. 722), hoc est, $OK + 2AB : OK = AB : PQ$. Quare si PQ ipsi AB æqualis fieri debet, necesse est ut OK æqualis evadat ipsi $OK + 2AB$. Enimvero hoc fieri nequit, nisi quando $2AB$ respectu ipsius OK infinite parva evadit (§. 4 Analys. infin.), consequenter quando OK, adeoque etiam BF infinita evadit. Ergo PQ ipsi AB æqualis fieri nequit, nisi quando AC infinita evadit. Curva igitur celeritatum residuarum cum recta BF nonnisi infinito intervallo concurrat, atque

Tab. XVIII. Fig. 176. adeo BF est ipsius asymptotus, & AB exponit celeritatem maximam quam corpus in medio resistente acquirere potest; cumque recta tempus repræsentans AP infinita evadat, quando fit $PQ = AB$, celeritas maxima nonnisi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

725. Quoniam $OK + 2AB:OK = AB:PQ$ (§. 722); erit $AB - PQ:PQ = 2AB:OK$ (§. 193 *Arithm.*), hoc est, $KQ:QP = 2AB:OK$, seu differentia celeritatis dato tempore acquisitæ a maxima quæ in medio resistente acquiri potest, est ad celeritatem dato tempore acquisitam; ut dupla maxima quæ acquiri potest, ad semiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad asymptotum BF curvæ celeritatum in medio resistente acquisite AQH.

COROLLARIUM II.

726. Quoniam celeritas maxima a gravi cadente, in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit, non acquiritur nisi infinito tempore elapso (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere potest.

SCHOLION.

727. HUGENIUS celeritatem maximam, quam grave in medio resistente acquirere potest, celeritatem terminalem appellat (a).

THEOREMA CLXVIII.

728. Si grave descenderet in vacuo seu medio non resistente, tempore finito eam celeritatem acquireret quam in medio sive in simplici, sive in dupli-

(I n Discursu de causa gravitatis p. 170.

cata ratione celeritatum resistente nonnisi tempore infinito acquirere potest.

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile descendat in medio quod in ratione celeritatum simplici resistit, sive in medio cadat quod in illorum duplicata ratione descensum impedit; celeritas maxima quam cadendo acquirere potest grave est ut linea quædam data (§. 715, 724), adeoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquisitæ sint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio resistente tempore finito acquiritur in non resistente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque resistente non acquiritur nisi tempore infinito (§. 715, 726): Ergo, in medio non resistente, finito tempore acquiritur, quæ, in resistente utroque, infinito acquiritur. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXIX.

729. Spatium in vacuo celeritate terminali AB tempore AP a gravi percursum, est ad spatium eodem tempore percursum in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente; ut rectangulum ABKP ad arcam AQP. Tab. XVIII. Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur per hypoth. erit idem in ratione composita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§. 34), adeoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio resistente spatium tempore AP per-

Tab. XVIII. Fig. 176. percursum est ut area curvæ celeritatum residuarum AQP (§. 708). Est igitur spatium a gravi in medio resistente percursum, sive motus impediatur in ratione celeritatum, sive in ratione earundem duplicata, ad spatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum, ut area curvæ celeritatum residuarum AQP ad rectangulum ABKP. Q. e. d.

THEOREMA CLXX.

730. Si celeritate terminali tanquam radio describatur quadrans circuli & celeritas in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit a gravi cadendo acquisita exponatur per cosinum arcus; spatium in medio isto descriptum erit ut differentia logarithmorum sinus versi & excessus diametri supra eundem.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $= x$, celeritas in medio resistente acquisita $= v$; erit spatium in eodem percursum $\int v dx$ (§. 708). Reperimus vero supra (§. 722) $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sed $\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a - v)(a + v)} = \frac{\frac{1}{2} dv}{a - v} - \frac{\frac{1}{2} dv}{a + v}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ per demonstrata $= \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a - v} - \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a + v}$. Jam $\int dv : (a - v) = -l(a - v)$, & $\int dv : (a + v)$

$= l(a + v)$ quia, quantitate constante a sumpta pro unitate, $a - v$ exprimit numerum unitate minorem, adeoque logarithmum habet negativum (§. 351 Arithm.). Ergo $\int v dx = -\frac{1}{2} a^2 l(a - v) - \frac{1}{2} a^2 l(a + v)$. Sunt ergo spatia in medio resistente tempore x percurfa ut $-\frac{1}{2} a^2 l(a - v) - \frac{1}{2} a^2 l(a + v)$; consequenter, ob constantem $\frac{1}{2} a^2$, ut $-l(a - v) - l(a + v)$ (§. 181 Arithm.), hoc est, ut differentie logarithmorum quantitatum $a - v$ & $a + v$. Quod si jam celeritate terminali AB describatur quadrans BD, ducaturque recta QE ipsi PD parallela; erit AL, sinus arcus ED, seu cosinus arcus BE, $= v$, adeoque BL, sinus versus arcus ejusdem BE, $= a - v$, consequenter logarithmus negativus $a - v$, logarithmus sinus versi BL. Jam diameter circuli $= 2a$. Quare si inde subducas $a - v$, relinquetur $a + v$. Est igitur $a + v$ excessus diametri BS supra sinum versum BL, adeoque logarithmus positivus $a + v$, logarithmus excessus diametri BS supra sinum versum BL. Jam cum $-l(a - v) - l(a + v)$ sit differentia logarithmi negativi ipsius BL & positivi LS; spatium a mobili in medio in ratione celeritatum duplicata resistente descriptum, est ut differentia logarithmorum sinus versi BL & excessus diametri BS supra sinum versum BL, si celeritate terminali describitur quadrans circuli BED, & AL cosinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP, quæ celeritatem tempore AP acquisitam exponit quo spatium istud confectum est. Q. e. d.

COROLLARIUM.

Tab.
XVIII.
Fig.
176.

731. Quoniam excessus diametri supra sinum versum est hujus complementum ad diametrum, & differentia logarithmorum sinus versi & excessus ejus supra diametrum, est logarithmus sinus versi per complementum ejus ad diametrum divisi (§. 343 Arithm.); consequenter logarithmus rationis sinus versi ad complementum ejus ad diametrum (§. 129 Arithm.); si, celeritate terminali sumpta pro sinu toto, cosinus arcum sint ut celeritates cadendo acquisitæ, erunt logarithmi rationis sinuum versorum ad eorum complementa ad diametrum, ut spatia temporibus istis descripta quibus celeritates fuere acquisitæ.

THEOREMA CLXXI.

732. Si gravis descensus impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritate terminali AB describitur quadrans circuli BED, sitque $ER = AL$ sinus arcus ED ut celeritas in medio resistente cadendo acquisita, erit spatium percursum ut logarithmus sinus complementi EL.

DEMONSTRATIO.

Patet, ex demonstratione præcedentis Theorematis, si spatium sit s , AL

$$= ER = v, AB = a, \text{ esse } ds = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$$

Sit $EL = y$: erit (§. 377 Anal. fin.)

$$y^2 = a^2 - v^2$$

$$2y dy = - 2v dv$$

$$y dy = - v dv$$

$$a^2 y dy = - a^2 v dv$$

$$\frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2} = - \frac{a^2 y dy}{y^2}$$

$$\text{hoc est, } ds = - \frac{a^2 dy}{y}$$

$$s = - a^2 \int \frac{dy}{y} = - a^2 ly$$

Sunt igitur spatia ut $- a^2 ly$, seu propter constantem a , (§. 181 Arithm.) ut $- ly$. Est vero $- ly$ logarithmus sinus EL, utpote negativus; quia sinus EL continuo decrescunt, crescentibus sinibus ER. Quare si velocitates residuæ sumuntur ut sinus arcuum ED, erunt spatia descripta eodem tempore quo celeritates istæ cadendo acquisitæ, ut logarithmi cosinum EL, seu sinuum complementorum arcuum ED. Q. e. d.

SCHOLION.

733. Quodsi dubites summam differentialis $- a^2 dy : y$ esse $- a^2 ly$, propterea quod quantitas constans eidem in integratione adjici possit (§. 95 Anal. infin.): adjice quantitatem constantem c ut sit $s = c - a^2 ly$. Quoniam, in casu $s = 0$ evadit $y = la$, erit $c - a^2 la = 0$. Sumatur a pro unitate, erit $c - la = 0$, adeoque $c = la$. Sed Logarithmus unitatis $= 0$ (§. 334 Arithm.) Ergo etiam $c = 0$. Patet igitur, si AB sumatur pro unitate, non opus esse ut quantitas quædam constans in summatione elementi cosinus EL adjiciatur.

THEOREMA CLXXII.

734. Si gravi descendenti resistitur in ratione duplicata celeritatum, & cosinus arcus EB exponit celeritatem cadendo acquisitam, radius vero AB celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem istam cadendo acquisivit grave, est ut logarithmus rationis SL ad

Tab.
XVIII.
Fig.
176.

Tab. ad LB, seu complementi sinus versi ad
XVIII. diametrum ad sinum versum.

Fig.
176.

DEMONSTRATIO.

Si sit $AB = a$, $AL = ER = v$,
tempus descensus $= x$; erit $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$

prouti apparet ex demonstratione
Theorematis 166 (§. 722). Jam vero

$\frac{a^2 dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v}$ utpote
(facta reductione ad denominationem
eandem) $=$

$\frac{1}{2}a^2dv + \frac{1}{2}avdv + \frac{1}{2}a^2dv - \frac{1}{2}avdv : (a-v)(a+v)$

Ergo $\frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx.$

Quoniam $\int \frac{dv}{a-v} = -l(a-v)$

& $\int \frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v)$

$- \frac{1}{2}al(a-v)$. Sunt igitur, propter

constantem $\frac{1}{2}a$, tempora quibus cele-
ritates v acquiruntur ut $l(a+v) -$
 $l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v)$

$= l \frac{a+v}{a-v}$ (§. 343 Arithm.), hoc est,

cum sit $a+v = LS$ & $a-v = BL$,
 $l(a+v) - l(a-v) = l(LS:LB)$, qui
est logarithmus rationis LS ad LB (§.

129 Arithm.). Ergo si radius cir-
culi AB exponit celeritatem termina-
lem, & AL cosinus arcus BE celerita-
tem in medio resistente data lege ac-
quisitam; erit tempus quo celeritas
hæc a gravi cadendo acquiritur ut
logarithmus rationis complementi si-
nus versi ad diametrum LS ad sinum
versum LB. Q. e. d.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

COROLLARIUM I.

735. Patet, ex demonstratione Theore-
matis præsentis, esse tempus x ut $l \frac{a+v}{a-v}$ Tab. XVIII. Fig. 176.

si a exponat celeritatem terminalem & v
celeritatem tempore x acquisitam. Est
vero $a+v$ celeritas acquisita terminali
aucta & $a-v$ differentia ejus a termi-
nali, seu complementum ad terminalem;
consequenter $(a+v) : (a-v)$ exprimit
rationem celeritatis acquisitæ terminali
auctæ, ad ipsius complementum ad termi-
nalem. Tempus igitur est ut logarith-
mus rationis celeritatis acquisitæ termi-
nali auctæ, ad ipsius complementum ad
terminalem.

COROLLARIUM II.

736. Quoniam $QP = v$, $KQ = a-v$;
si fiat $PT = AS = AB$; erit $QT = a+v$;
consequenter logarithmus rationis TQ
ad QK ut tempus.

THEOREMA CLXXIII.

737. Si rationes inter summam ce-
leritatis terminalis & acquisitæ atque
differentiam acquisitæ a terminali su-
mantur ut numeri; & descensui gravis
resistitur in ratione duplicata celerita-
tum; erunt tempora, quibus celeritates
fuerunt acquisitæ, ut logarithmi.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim descensus gravis im-
peditur in ratione duplicata celerita-
tum & celeritas terminalis fuerit $= a$,
acquisita $= v$; erit summa terminalis
& acquisitæ $a+v$ & differentia acqui-
sitæ a terminali $a-v$, consequenter
ratio summæ istius ad hanc differen-

tiam $= \frac{a+v}{a-v}$ (§. 129 Arithm.).

Cc

Sunt

Sunt vero tempora, quibus celeritates

istæ acquiruntur, ut $t \frac{a+v}{a-v}$ (§. 734).

Quare si ratio summæ terminalis celeritatis ac acquisitæ ad differentiam acquisitæ a terminali sumitur ut numerus; erit tempus quo celeritas acquisita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXIV.

Tab. XVIII. Fig. 176. 738. Si descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum, & spatia percursa sint ut logarithmi sinuum LE arcus BE quadrantis BD celeritate terminali tanquam radio descripti; tempora insumta sunt ut logarithmi rationis inter sinum versum BL & complementum ejus ad diametrum LS.

DEMONSTRATIO.

Si enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis, & celeritate terminali AB descripto quadrante BED, cosinus arcus BE, seu arcus ED sinus LA est ut celeritas acquisita, spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum EL (§. 732); tempora vero insumta ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§. 734). Quamobrem quando spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum; tempora insumta sunt ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXV.

739. Incrementum celeritatis gravium in medio non resistente est ad incrementum acquisitæ in medio quod in ratione duplicata celeritatis resistit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus supra quadratum celeritatis acquisitæ excessum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritas gravium in medio non resistente crescit in ratione temporis (§. 68); si tempus dicatur x , erit incrementum celeritatis momentaneum, in tempusculo scilicet dx , uti dx . Jam si celeritas terminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio quod in ratione duplicata celeritatis resistit acquisita $= v$; erit $a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$, prouti patet ex demonstratione Theorematis 166 (§. 722). Est igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv sit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege resistente acquisitæ; erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio resistente, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus excessum supra quadratum acquisitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $(a^2 - v^2) = (a+v)(a-v)$; erit dx ad dv in ratione composita a ad $a+v$ & a ad $a-v$, hoc est, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum est in casu dato ad incrementum in medio resistente, in ratione composita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquisita auctam, & ejusdem celeritatis terminalis ad ipsius supra acquisitam excessum.

THEO.

THEOREMA CLXXVI.

Tab. VIII. 177. 741. Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritas terminalis exponitur per rectam $AB = CF$, qua tanquam radio describitur quadrans, eadem vero pro latere potentie Hyperbolæ sumpta intra asymptotos AC & CD describatur Hyperbola BME , fiatque HF celeritati in medio resistente acquisitæ equalis; area hyperbolica $APMB$ exprimit spatium eo tempore a gravi percursum quo celeritatem ut HF acquisivit.

DEMONSTRATIO.

Sit enim $AB = AC = CF = a$, $HF = v$; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§. 417 Geom.), $GH = PC = \sqrt{a^2 - v^2}$; consequenter ob $PC \cdot PM = AB^2$ (§. 488 Anal. fin.) $PM = a^2 : \sqrt{a^2 - v^2}$. Jam differentiale rectæ $AP = a - \sqrt{a^2 - v^2}$

$= \frac{v dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$. Quamobrem elementum

areae $APMB = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$; conse-

quenter area $APMB = \int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Est

vero spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas v acquisi-

ta $= \int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Ergo spa-

tium hyperbolicum $APMB$ exprimit spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas ut HF acquisita.

Q. e. d.

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquisita FH in Tab. terminalem FC degenerat; semiordinata XVIII. PM cum asymptoto CD coincidit, adeoque Fig. area hyperbolica $ABMP$ degenerat in infi- 177. nitam $EBACD$; consequenter spatium representat infinitum a gravi percursum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit nisi tempore infinito elapso (§. 726); spatium infinitum a gravi non nisi tempore infinito percurritur.

THEOREMA CLXXVII.

743. Si intra asymptotos rectangulas DC & AC describatur Hyperbola æquilatera EMB , cujus latus potentie est ut celeritas terminalis, AP vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquisitam; spatium hyperbolicum $ABMP$ exponet spatium eodem tempore a gravi in medio descriptum quod in ratione duplicata descensui resistit quo celeritas acquisita fuit.

DEMONSTRATIO.

Sit $AC = a$, erit etiam latus potentie Hyperbolæ $= a$. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acqui-

sita $= v$; erit $PA = \frac{v^2}{a}$, consequen-

ter $CP = a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2 - v^2}{a}$.

Unde ob $CP \cdot PM = a^2$ (§. 488

Anal. fin.), reperitur $PM = \frac{a^3}{a^2 - v^2}$.

Jam differentiale abscissæ $PA = \frac{2v dv}{a}$,

consequenter elementum spatii hyper-

bolici $ABMP = \frac{2a^2 v dv}{a^2 - v^2}$, adeo-

Tab. XVIII. que $ABMP = 2 \int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Est igitur

Fig. 177. area hyperbolica ABMP ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ propter constantem 2 (§. 181 *Arithm.*). Ex antecedentibus constat spatium a gravi, in medio data lege resistente, interea temporis descriptum dum cele-

ritatem v acquirit, esse ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ Tab. XVIII. Fig. 177. (§. 730). Idem igitur spatium est ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMP.

SCHOLIUM.

744. Patet adeo, unum idemque spatium descensus multis modis per figuras representari posse.

CAPUT XV.

De Machinis Simplicibus.

DEFINITIO LXXI.

745. **M**achina vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLIUM.

746. Quoniam effectus Machinarum ex structura ipsarum secundum immutabiles motuum leges consequuntur: omnes operationes rerum corporearum Mechanicæ dicuntur, quia agunt structura sua convenienter & juxta æternas motuum leges. Hinc manifestum est, illum demum Mechanice Philosophari, qui evidenter ostendit, quomodo vi legum motus effectus rerum ex structura ipsarum consequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum esse, qui Mechanice Philosophantur. Apparet etiam, Philosophiam Mechanicam liberam esse ab ea labe, quam imperiti eidem adspargere conantur. Immo nec obscurum est, sine Matheseos præsidio de rebus naturalibus temere Philosophari.

DEFINITIO LXXII.

747. Per *Potentiam* intelligo Vim, quæ Machinæ applicata ad motum tendit, sive actu eundem producat, sive non. In priore casu dicitur *Potentia movens*; in posteriore *Potentia sustentans*.

DEFINITIO LXXIII.

748. *Pondus* appello, quod ope Machinæ vel sustentatur, vel movetur, vel motui producendo utcumque resistit.

DEFINITIO LXXIV.

749. *Vectis* est linea recta inflexilis & gravitatis expers AB, unico sui puncto C fulcro firmo D innixa, circa quod moveri potest. Tab. XVIII. Fig. 5.

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo instrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in usu applicatur, ad Vectem revocantur; consequenter quæ de Vecte demonstrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION I.

751. Ex natura Vectis adeo ratio redditur non modo structuræ & effectuum omnium instrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non passim in vita communi obviorem; sed & motuum animalium: quod posterius primus docuit Joannes Alphonfus BORELLUS in peculiari De motu animalium Opere.

SCHOLION II.

752. In genere autem notandum est, ubi Machinarum leges investigamus, non considerare materiam ex qua constant, nec materiæ affectiones, neque varias figuras quæ ob certos usus inducuntur; sed tantum eorum rationem haberi, quæ Machinæ essentiam absolvent, ut nempe constet quæ Machinæ quali convenient. Quodsi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obstaculum impedire, quominus Lex ista accurate observari queat; ea ex suis principiis seorsim sunt determinanda.

DEFINITIO LXXV.

753. Hypomochlium est fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO LXXVI.

Tab.V. 754. Vectis Homodromus est, in quo
Fig.59. pondus medium locum tenet inter locum potentiae B & hypomochlium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C.

DEFINITIO LXXVII.

755. Vectis heterodromus, est in quo Tab.V.
hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiae B. Fig.58.

DEFINITIO LXXVIII.

756. Axis in Peritrochio est circulus AB basi cylindri concentricus, & una Tab.V.
cum ipso circa axem ejus EF mobilis. Fig.60.
Cylindrus ille Axis, circulus Peritrochium; radii circuli (qui subinde soli comparent) Scytalæ appellantur.

SCHOLION.

757. Proprie per Axem intelligitur virga ferrea, cui circumpositus est cylindrus ligneus scytalis instructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi (S. 746), cur definitiones ad Geometriam puram revocari consultum sit.

COROLLARIUM.

758. Axi adeo in Peritrochio locus est, quotiescunque in motu Machinæ concipere licet circulum circa axem fixum descriptum, & cylindri huic circumpositi plano concentricum.

DEFINITIO LXXIX.

759. Trochlea est circulus AB circa Tab.V.
centrum C volubilis. Fig.61.

DEFINITIO LXXX.

760. Cochlea est cylindrus rectus AB Tab.V.
spirali similiter sulcatus. Describitur Fig.
autem illa spiralis, si recta FG motu 62. 63.
æquabili in superficie cylindri circumferatur, & interea punctum I ex F versus G motu itidem æquabili descendit. Cochlea mas est, si superficies convexa; Cochlea femina vero, si concava fuerit: sulcata.

SCHOLIUM.

Tab.V. 761. *Mas & fœmina, si motus gigni de-
Fig.63. bet, semper conjunguntur. Loquor nimirum
de Cochleæ simplicis usu. Si enim cum Axe
in Peritrochio conjungitur, fœmina opus non
est, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc
in casu Machina composita prodit.*

DEFINITIO LXXXI.

Tab.V. 762. *Cuneus est prisma triangulare,
Fig.64. cujus bases sunt triangula æquicrura
acutangula.*

AXIOMA X.

763. *Potentia aqualis est ponderi
quod, salvo effectû, in ejus locum sub-
stitui potest.*

SCHOLIUM.

764. *Patet ex ipsa aequalitatis definitione
(§. 15 Arithm.).*

THEOREMA CLXXVIII.

765. *Si potentia B, Vecti sive homo-
dromo, sive heterodromo applicata, su-
stentat pondus in A applicatum; ratio-
nem reciprocâ distantiarum ab hypo-
mochlio ad pondus habet.*

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Sit primum Vectis AB heterodro-
Fig.58. mus. Quoniam supponitur horizonti
parallelus; linea directionis utriusque
ponderis erit ad ipsum perpendicularis,
Centrumque gravitatis unius in A, alte-
rius in B (§. 215.) Quodsi ergo pro
potentia in B applicata substituatür pon-
dus æquale; habebimus duo pondera,
quorum Centra gravitatis recta AB
connectuntur, eaque in æquilibrio, cum
potentia pondus sustentet, per hypoth.

Est igitur C centrum gravitatis com-Tab.V
mune (§. 122); consequenter pondus Fig.58
in B, hoc est potentia, ad pondus in
A reciproce se habet, ut AC ad CB
(§. 144). *Quod erat unum.*

Si Vectis fuerit homodromus CB, Tab.V
ponderis G non aliam partem susten- Fig.59
tat potentia in B applicata, quam quæ
ferenda est a fulcro ibi supposito. Est
igitur ad pondus A, ut distantia ponde-
ris ab hypomochlio AC, ad distantiam
potentiæ CB (§. 231). *Quod erat se-
cundum.*

Si Vectis fuerit inclinatus, hoc est, Tab.V
si linea directionis ponderis & poten- Fig.6
tiæ cum Vecte AB angulum efficiat obli-
quum, erunt CD & CE ad lineas di-
rectionis AF & EG perpendiculares
distantiæ a centro motus C (§. 229);
consequenter eodem, quo ante, mo-
do demonstratur, potentiam sustentan-
tem quæ in B applicatur esse ad pon-
dus in A suspensum, ut DC ad CE
(§. 272). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

766. *Quodsi potentia, quæ pondus su-
stentat, augeatur; præpollebit, adeoque
dato Vecte pondus movebit.*

SCHOLIUM.

767. *Facile itaque ad Vectem ea omnia
transferuntur, quæ superius de æquiponderan-
tibus (§. 144 & seqq. itemque §. 231 &
seqq. §. 272 & seqq.) demonstrata sunt.*

PROBLEMA CXVIII.

768. *Data gravitate Vectis hetero-
dromi AB, distantia Centri gravitatis ab
hypo-*

b.V. hypomochlio CV, distantis ponderis at-
58. que potentia AC & CB, una cum pon-
dere O; invenire potentiam, qua ipsum
sustentare valet.

RESOLUTIO.

1. Concipiamus Vectem gravitatis ex-
pertem & ejus loco in V appensum
pondus eidem æquale G. Quod si
fiat ut AC ad CV, ita gravitas Ve-
ctis ad quartum: reperietur pondus,
quod Vectis sustentare valet (§.
765).

2. Subtrahatur id a pondere dato;
residuum erit pondus a potentia su-
stentandum.

3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pon-
dus residuum ad quartum: & repe-
rietur potentia in B applicanda, ut
dato Vecte datum pondus sustentet
(§. 765).

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5,
G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 — 2 — 10	5 — 1 — 280
<u>10</u>	<u>1</u>
20	280
<u>300</u>	
20	280
<u>280</u>	

PROBLEMA CXIX.

769. Datis gravitate Vectis hetero-
dromi AB, distantia Centri gravitatis
ab hypomochlio CV, distantis potentia
atque ponderis BC & CA; invenire
pondus sustentandum.

RESOLUTIO.

1. Quærat, ut in Problemate præce-
dente, pars ponderis a Vecte solo
sustentanda.

2. Quærat, eadem ratione pars alte-
ra ponderis, quam potentia in B
applicata sustentare valet.

3. Jungantur partes sigillatim repertæ
in unam summam. Ita prodit pon-
dus quæsitum.

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5,
G = 10, potentia 56 librarum: inve-
nietur

pondus pars prima = 20
altera = 280
<hr style="width: 100px; margin: 0 auto;"/>

pondus integrum = 300

PROBLEMA CXX.

770. Datis gravitate Vectis hetero-
dromi AB, pondere sustentando G, po-
tentia in B applicanda, longitudine ac
Centro gravitatis Vectis V; invenire
Centrum gravitatis commune seu cen-
trum motus C.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers,
& ejus loco in Centro gravitatis
V appensum pondus G. Quærat
Centrum gravitatis commune Z po-
tentia in B applicata & ponderis
G (§. 149.).

2. Subtrahatur ZB ex AB; relinque-
tur AZ.

3. Concipiatur denique in Z appen-
sum pondus gravitati Vectis & po-
tentia junctim sumptis æquale, &
inveniat, hujus ponderis & pon-
deris dati O Centrum gravitatis
commune C (§. 149); quod quære-
batur.

Ex. gr. Sit potentia in B 56, gravitas
vectis 10, pondus O 300 librarum, AB
= 6, VB = 3. Fiat

Tab.V. 66 — 10 — 3
 Fig. 58. $\frac{3}{30}$ $ZB = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$
 $\frac{30}{30}$ $AB = \frac{66}{11}$
 $AZ = \frac{61}{11}$
 366 — 66 — $\frac{61}{11}$ (1 = AC)

PROBLEMA CXXI.

Tab.V. 771. *Datis gravitate & Centro gravitatis F Vectis homodromi CB, pondere G, distantia ejus ab hypomochlio CA, una cum distantia potentia CB; invenire potentiam quæ pondus sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers & ejus loco in F appensum pondus ei æquale, quæratunque potentia vectem solum sustentatura (§. 765).
2. Quæratur porro potentia requisita ad pondus datum G sustentandum (§. cit.).
3. Addantur potentiæ sigillatim reperiæ in unam summam. Ita prodit potentia quæsitæ.

Sit ex. gr. $CA = 1$, $CF = 3$, $CB = 6$, pondus datum 300, gravitas Vectis 10 librarum. Reperietur potentia Vectem sustentatura 5, pondus vero solum sustentatura 50, adeoque potentia integra 55 librarum.

THEOREMA CLXXIX.

772. *Si potentia Vecte sive heterodromo sive homodromo, pondus attollit; spatium illius est ad spatium hujus, ut hoc ad potentiam quæ idem pondus tantum sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum pondus attollitur per arcum Tab.V. Aa , potentia movetur per arcum Bb . Fig. 58. 59. Sunt vero arcus Aa & Bb similes, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad Cæquales (§. 156 Geom.); in homodromo, quia concentrici, consequenter $Aa : Bb = AC : CB$ (§. 138 412 Geom.). Sed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod sustentare valet (§. 765). Ergo spatium potentiæ ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quæ idem sustentare valet (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

773. Lucrum itaque virium cum temporis dispendio conjungitur & contra.

PROBLEMA CXXII.

774. *Stateram construere; hoc est, Instrumentum quo, unico pondere mediante, diversorum corporum gravitates explorare licet.*

RESOLUTIO.

1. In virga ferrea, aut lignea, aut ex Tab.V. quacunque materia alia parata AB, Fig. 66. assumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen seu lingula CD.
2. Jugum intra trutinam seu scapum GF suspendatur, &
3. Brachium minus AC unco AH & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquibretur, aut non multum ab æquilibrio absit.

4. Pon-

Tab.V.4. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duabus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, & notentur puncta in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipsa constructio loquitur, hoc modo, unci ponderis I ope, pondera corporum admodum differentium explorari posse (§. 765).

SCHOLIION I.

775. Quodsi onera ingentia, quales sunt Currius fœno onusti, ponderanda; non opus est, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illæ Statera trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin sufficit, nudo oculo facile dignoscitur.

SCHOLIION II.

776. Empirica Statera, qua utuntur artifices, divisio geometricæ præferenda est, qua brachium longius BC ejusdem ubique spissitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut constructio satis sit accurata.

SCHOLIION III.

777. Cum pondera non ubivis locorum æqualia sint: Statera quoque empirico modo constructa universales non sunt.

SCHOLIION IV.

778. Utut autem commodissimus sit Statera usus, quia non multis opus est ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proscribi præstat, quoniam venditores fraudulentis fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu sit fallaciam retegere. Ad communem itaque usum construuntur Libræ æqualium brachiorum. Sed antequam earum constructionem tradamus; fundamenta quædam theoretica sunt præmittenda.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA CLXXX.

779. Si Libra, cujus centrum motus C fuerit supra rectam e cujus extremis pendent pondera æqualia H & I, horizonti sit parallela; quiescit: sed si inclinatur; tamdiu movetur donec iterum horizonti sit parallela. Tab.V. Fig.67.

DEMONSTRATIO

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad id sunt perpendiculares, (§. 212), adeoque brachia AL & LB coincidunt cum distantis a centro motus (§. 229). Quare cum sit $AL = LB$, erit in L Centrum gravitatis commune ponderum (§. 145). Ex hoc igitur suspensa quiescunt (§. 124). Quod erat unum.

Quodsi ex situ suo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt distantia GE & EF (§. 229), quæ cum inæquales sint, pondera non æquilibrantur (§. 765), sed alterum I præponderat (§. 152): quod cum descendat, redit Libra in statum horizonti parallelum. Quod erat alterum.

THEOREMA CLXXXI.

780. Si Libra æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus infra jugum AB, fuerit horizonti parallela; quiescit: si vero inclinatur; in situm horizontalem non revertitur, sed descendit pondus unum, donec Libra pervenerit in situm priori contrarium. Tab.V. Fig.68.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Si jugum AB fuerit horizontale, Fig.68. erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), adeoque distantia a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Est vero $AL = LB$, ex natura Libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia sint, per *hypoth.* Centrum gravitatis commune eorundem est in C (§. 145), adeoque situm non mutat (§. 124). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis, & per E recta GF eidem parallela; erunt distantia GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori distantia EG (§. 152), adeoque continuo descendit, donec A, B & L sint in eadem recta horizontali. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CLXXXII.

Tab.V. 781. Si Libra, aequalibus ponderibus Fig.69. utrimque onusta, cujus centrum motus C in ipso jugo AB, fuerit horizonti parallela; quiescit, nec quomodocunque inclinata situm mutat.

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in Theoremate præcedente. Posterius ita demonstratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE distantia ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad E & D, atque verticales angulos ad C æquales (§. 156 Geom.), itemque $AC = CB$, ex natura Libræ, erit $DC = CE$ (§. 252 Geom.). Qua-

re cum pondera H & I æqualia sint per Tab.V. *hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Fig.69. Libra igitur quiescit. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXIII.

782. Libram construere, hoc est; instrumentum, in cujus extremitatibus appensa gravia æqualia æquiponderant in situ horizontali.

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, Tab.V. ita ut brachia AC & CB sint ejusdem longitudinis; sintque tum brachia cum uncis suis A & B, tum lances D & E ejusdem prorsus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appensum; tam lancibus instructum quam sine iisdem, situm tueatur horizontalem.
2. In medio jugi puncto C exciterur perpendiculariter examen, sive lingula CF.
3. Jugum denique intra trutinam HI ita suspendatur, ut centrum motus C sit paulo supra jugum seu rectam AB, quæ appensionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus sit in ipsa recta AB.

Dico, si, Libra ex trutina HI suspensa, examen intra eandem abscondatur, gravia lancibus imposita esse æqualia, seu gravitatem utriusque esse eandem.

DEMONSTRATIO.

Si Libra ex I suspendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215). Quod si ergo lingula

Tab.V. lingula intra eam absconditur, cum ea Fig.70. fit ad jugum AB perpendicularis, per constructionem, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C sit vel in jugo AB, vel supra jugum, per construct. pondera utrinque suspensa æqualia sunt (§. 779, 781). Q. e. d.

COROLLARIUM.

783. Si brachia sint inæqualia, Libra dolosa est.

SCHOLION I.

784. Præstat brachia esse longiora, quam breviora, quia idem error in divisione brachiorum admissus minorem in ponderibus producit, si brachia longiora, quam si breviora. Fac enim brachium AC esse justo longius uno scrupulo quarto, seu una decima lineæ. Si brachium AB = 5^u, erit BC : AC = 500 : 501. Si AB = 5ⁱ; erit BC : AC = 5000 : 5001. In casu itaque posteriori differentia brachiorum est $\frac{1}{5000}$; in priore $\frac{1}{500}$ brevioris. Hinc & pondus majus in casu posteriore excedere debet minus $\frac{1}{5000}$ sui, in priore autem $\frac{1}{500}$ sui.

SCHOLION II.

785. Vulgares Libræ ita construuntur, ut centrum motus sit paulo altius jugo, quo Libra ex situ horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appensis, non quiescat, nisi eidem restituta (§. 779). Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.

SCHOLION III.

786. Ne affricus impediatur jugi è situ horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inseritur, cylindricus sit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi perniciosior evadit, si axis in aciem desinat, qua parte trutinam

tangit. Unde & jugum leve ac tenue esse debet, quantum per materiam ponderandam fieri potest, ut minori vi e situ suo dimoveatur sique accuratius indicet æquilibrium.

PROBLEMA CXXIV.

787. Libram propositam examinare, utrum accurata sit, necne.

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quod si enim maneat æquilibrium, Libra accurata est; sin minus, dolosa.

DEMONSTRATIO.

Si enim Libra dolosa est, brachia inæqualia sunt (§. 783), adeoque lance ex majori brachio suspensa levior altera (§. 765). Quare si lancem leviolem e minori, graviolem e majori brachio suspendas: præponderabit e majori brachio suspensa, adeoque æquilibrium tollitur (§. 152). Q. e. d.

PROBLEMA CXXV.

788. Libram dolosam verum pondus mercis explorare. Tab.V. Fig.70.

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collocata, notetur pondus in altera D ipsi æquilibratum.
2. Eadem translata in D, notetur pondus in E ipsi æquilibratum.
3. Pondera ista in se invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc esse verum mercis pondus.

Sit ex. gr. pondus in E = 10, in D = 9 librarum, reperietur verum mercis pondus $9\frac{48}{100}$.

D d 2

DE

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Est enim ut AC ad BC, ita merx ad
Fig.70. pondus in D positum; & ut AC ad BC
ita pondus in E ad mercem (§. 765).
Ergo mercis pondus est medium pro-
portionale inter pondera in lancibus
D & E collocata (§. 167, 156 *Arithm.*);
consequenter æquale radici ex facto
ponderum in se invicem extractæ (§.
501 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

789. Si verum mercis pondus inventum,
ratio brachiorum non amplius latet. Est
enim AC ad CB ut pondus mercis ad pon-
dus in D ipsi æquilibratum (§. 765); ex.
gr. in nostro exemplo ut 948 ad 900, seu
ut 237 ad 225 (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

790. Data ratione brachiorum AC &
CB, facile determinatur error in æquilibrio
admissus (§. 765). Æquiponderentur ex.
gr. in lance E 100 libræ merci in altera D
collocatæ. Ut habeatur quæsitum, fiat

$$237 - 225 = 100$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 22500 \end{array} 237) \begin{array}{r} 22500 \\ 2133 \\ 1170 \\ 1185 \end{array} \quad (95 \text{ fere}$$

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM III.

791. Invenitur quoque pars, qua bra-
chium longius excedit minus, iisdem datis.
Sit enim jugum integrum 1000 partium.
Fiat ut summa brachiorum 237 + 225 seu
462 ad majus 237, ita 1000 ad idem bra-
chium in partibus jugi millesimis 513 fere.
Sed ex natura libræ esse debet 500: exce-
dit ergo veram quantitatem particulis 13,
qualium scilicet jugum est 1000.

THEOREMA CLXXXIII.

792. Si potentia, ope Axis in Peritro-
chio, sustentet pondus G, sitque linea di-
rectionis AL ad peripheriam rotæ vel
ad scytalam perpendicularis; erit ut ra-
dius axis CE ad radium rotæ CA seu
longitudinem scytalæ, ita potentia ad
pondus.

Tab.
VI.
Fig.
71.

DEMONSTRATIO.

Quodsi potentia in A applicata de-
primit rotam vel scytalam, perinde est
ac si vecte heterodromo ACE, cujus
centrum motus in C, pondus G susten-
taret. Si vero in a applicata eandem
attollit, perinde est ac si vecte homo-
dromo aEC pondus idem G sustentaret.
Omnes enim machinæ partes reliquæ
ad ponderis sustentationem nil confe-
runt, cum utrinque sibi mutuo æquili-
brentur, ut machina tanquam gravi-
tatis expers considerari possit. Jam
cum linea directionis potentiæ in A vel
a sit ad AC vel aC perpendicularis,
per hypoth. & funis EG a pondere G
extensus ad EC horizontalem per
hypoth. similiter normalis (§. 215);
erit ut CE ad CA, vel ut CE ad Ca;
ita potentia ad pondus (§. 765).
Q. e. d.

THEOREMA CLXXXIV.

793. Si potentia in F deprimat ro-
tam juxta lineam directionis FD ad
radium rotæ obliquam sed directioni per-
pendiculari parallelam; ad potentiam;
qua juxta directionem perpendicularem
AL agit, eam habet rationem, quam
sinus totus ad sinum anguli directionis
DFC.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 71. Quoniam FD perpendicularis ad AC, per hypoth. erit DC potentia in F applicatae distantia a centro motus C (§. 229). Est ergo ut potentia in F ad pondus G, ita EC ad CD (§. 272): & ut potentia in A ad pondus G, ita EC ad CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 199 Arithm.). Sed si AC vel FC (§. 40 Geom.) sumatur pro sinu toto, erit DC sinus anguli DFC (§. 2 Trigon.). Potentia igitur in A est ad potentiam in F, ut sinus totus ad sinum anguli directionis DFC. Q. e. d.

COROLLARIUM.

794. Quare cum distantia potentiae in A sit radius CA; dato angulo directionis DFC, inveniri potest distantia DC.

Sit ex. gr. $FC = 4''$ & $DFC = 48^\circ$: Calculus ita subducetur:

Log. sin. tot.	1000000000
Log. FC	0.6020600
Log. sin. DFC	98710735

Log. DC 404731335
cui quam proxime respondent in Tabulis
2' 9" 7".

THEOREMA CLXXXV.

795. Potentia in diversis punctis F & K, rotam juxta directiones FD & KI perpendiculari AL parallelas deprimentes, sunt inter se ut distantia a centro motus CD & CI reciproce.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 71. Est enim potentia in F ad pondus G, ut EC ad CD; & idem pondus G ad potentiam in K, ut IC ad CE (§. 793). Ergo potentia in F ad potentiam in K, ut IC ad CD (§. 198 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

796. Crescente adeo distantia a centro motus, potentia decrescit, & contra, pondere manente eodem.

COROLLARIUM II.

797. Quare cum radius AC sit distantia maxima, & potentiae juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quae datum pondus G sustentare valent juxta diversas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM III.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 256 Geom.). Quare si ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipsi AC parallela (§. cit.), consequenter $FM = DC$ (§. 257 Geom.). Cum adeo FM sit distantia potentiae in F applicata; in praxi facile definitur absque calculo.

THEOREMA CLXXXVI.

799. Si potentia juxta perpendicularem AL deprimit rotam & pondus G attollit; erit spatium potentia ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quae id sustentare valet.

DEMONSTRATIO.

Dum rota semel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per spatium peripheriae axis aequale. Est itaque spatium potentiae

Tab. VI. ad spatium ponderis, ut peripheria rotæ
Fig. 71. radius rotæ AC ad radium axis CE
(§. 412 *Geom.*). Sed ut AC ad CE, ita
pondus ad potentiam quæ id sustenta-
re valet (§. 792). Ergo spatium po-
tentia est ad spatium ponderis, ut pon-
dus ad potentiam quæ id sustentare
valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXVI.

800. Dato pondere, dataque potentia
ipsum sustentatura; Axem in Peritrochio
construere.

RESOLUTIO.

1. Assumatur radius Axis ponderi su-
stentando conveniens, ne scilicet
axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus, ita ra-
dius axis ad radium rotæ, seu lon-
gitudinem scytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

801. Quodsi potentia fuerit pars ponde-
ris exigua, radius rotæ enormis prodit.
Ex. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 li-
brarum; erit radius rotæ ad radium axis,
ut 60 ad 1. Hinc si radius axis non ex-
cederet pedem dimidium, foret radius
rotæ pedum 30.

SCHOLION.

802. Huic malo medela offertur, rotas
cum axibus multiplicando; & ut una al-
teram circumagere valeat, dentibus vel etiam
zympanum paxillis instruendo.

THEOREMA CLXXXVII.

Tab. VI. 803. Si pluribus rotis dentatis po-
tentia aliqua, cujus linea directionis
Fig. 72. KL peripheriam ultimæ tangit, pondus
H sustentat; erit ea in ratione compo-
sitæ omnium earum quas radii axium

ad radios rotarum habent; nempe Tab. VI.
CB : CD, EF : EG, HI : HK. Fig. 72

DEMONSTRATIO.

Quodsi concipiamus potentiam ap-
plicari in D: erit ea ad pondus A ut
CB ad CD (§. 792); consequen-
ter = A. CB : CD (§. 297 *Arithm.*).
Axis igitur DF tantopere gravatur,
ac si pondus A. CB : CD appende-
retur. Concipiamus itaque porro po-
tentiam in G applicari, quæ hoc
pondus, ope rotæ alterius solius, con-
sequenter pondus A ope duarum sus-
tentet. Cum sit ad pondus A. CB : CD,
ut EF ad EG (§. 792); repe-
rietur = A. CB. EF : CD. EG (§.
297 *Arithm.*). Quare axis tertius GI
tantopere gravatur, ac si pondus
A. CB. EF : CD. EG appenderetur. Quo-
niam potentia in K est ad hoc pon-
dus, ut HI ad HK (§. 792); repe-
rietur ea = A. CB. EF. HI : CD.
EG. HK (§. 297 *Arithm.*), & ita
porro, si plures fuerint rotæ. Est
igitur potentia in K applicata ad pon-
dus A quod ope plurium rotarum
sustentat, ut A. CB. EF. HI : CD.
EG. HK ad A; hoc est, ut A. CB.
EF. HI ad A. CD. EG. HK (§. 178
Arithm.), adeoque & ut CB. EF. HI,
ad CD. EG. HK (§. 181 *Arithm.*);
consequenter in ratione composita
CB : CD, EF : EG & HI : HK
(§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

804. Quodsi pondus ducas in factum ex
radiis axium, & productum divides per fa-
ctum ex radiis rotarum; potentia ipsum
sustentatura reperitur, quæ aucta idem
attollet,

Tab. attollet. Sit ex. gr. $A = 6000$ librarum,
VI. $BC = 6''$, $CD = 34''$, $EF = 5''$, $EG =$
Fig. 72. $35''$, $HI = 4''$, $HK = 27''$; erit $BC.EF.HI$
 $= 120$. & $CD.EG.IK = 32130$ &
hinc potentia $= 6000$. $120 : 32130 =$
 $22\frac{1214}{3213} = 22\frac{146}{357} = 22\frac{1}{3}$ quam proxime.

COROLLARIUM II.

805. Si vero potentiam ducas in fa-
ctum ex radiis rotarum, & productum
dividas per factum ex radiis axium; pro-
dibit pondus quod sustentare valet. Sit
ex. gr. potentia $22\frac{146}{357}$ librarum, reliqua
omnia sint ut ante; reperietur pondus
6000.

SCHOLION.

Tab. 806. Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur
VI. manubrium ABCD, ubi AE radio axis, CD
Fig. 73. radio rotæ respondet.

PROBLEMA CXXVII.

807. Data potentia, datoque ponde-
re; invenire numerum rotarum, & in
unaquaque rationem radii axis ad ra-
dium rotæ definire, ita ut potentia pe-
ripheria rotæ ultima applicata juxta di-
rectionem perpendicularem pondus datum
sustentet.

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus dispergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare
numerum rotarum, radiosque axium
se habere ad radios rotarum ut unita-
tem ad radios singulos.

Sit ex. gr. pondus 3000 librarum & po-
tentia 60, erit quotus 500, qui resolu-
tur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur
construi possunt rotæ, in quarum una ra-

dus axis est ad radium rotæ, ut 1 ad 4,
in reliquis ut 1 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur;
unitas est ad quotum, ut potentia ad
pondus (§. 69 *Arithm.*). Est igitur
potentia ad pondus in ratione compo-
sita unitatis ad singulos factores (§. 159
Arithm.). Quare si radii axium fiant
ad radios rotarum, ut unitas ad eosdem
factores; potentia erit ad pondus in ra-
tione composita radiorum axium ad ra-
dios rotarum. Potentia igitur pondus
sustentare valet ope machinæ constru-
ctæ (§. 803). *Q. e. d.*

SCHOLION.

808. Quoniam in excessu peccari nequit;
consultum est, ubi potentia non exacte di-
vidit pondus, quotum unitate majorem as-
sumere. Similiter unam, immo aliquot uni-
tates quoto addere licet, si in factores com-
mode dispergi nequit.

THEOREMA CLXXXVIII.

809. Si ope duarum rotarum poten- Tabi.
tia movet pondus; revolutiones tardius VI.
mota sunt ad revolutiones celerius mo- Fig. 72.
ta, ut peripheria axis celerius mota ad
peripheriam rotæ cui occurrit.

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius mota M
unam revolutionem absolvit, periphe-
ria axis FD, qui eidem occurrit, to-
tam ejus peripheriam emetiri debet. To-
ties igitur axis FD, consequenter ro-
ta N, circumvolvitur, antequam
rota M unam revolutionem absol-
vit, quoties peripheria axis FE
in peripheria rotæ M continetur.
Sunt.

Tab. VI. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ, ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

810. Eadem igitur revolutiones sunt ut radius axis FE, ad radium rotæ DC (§. 412 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

811. Cum numerus dentium in axe FD fit ad numerum dentium in peripheria rotæ M, ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celcius motæ N, ut numerus dentium seu paxillorum in axe ad numerum dentium in rota M cui iste occurrit.

THEOREMA CLXXXIX.

812. Si ope plurium rotarum M, N, O &c. potentia movet pondus A; erunt revolutiones rotæ celerrime motæ O ad revolutiones tardissime motæ M, in ratione composita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium IG, FD &c. & peripheriarum rotarum N, M &c. quibus illi occurrunt.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N m & n , peripheriæ axium DF & GI a & b ; erit ut a ad m , ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) $= m : a$ (§. 302 *Arithm.*). Est vero porro ut b ad n , ita $m : a$ ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) $= mn : ab$ (§. 302 *Arithm.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O sunt ad revolutiones rotæ tardissime motæ M, ut $mn : ab$ ad 1, hoc est ut mn ad ab (§. 178

Arithm.), consequenter in ratione composita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI qui ipsis occurrunt (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

813. Quoniam numeri dentium sunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM II.

814. Quia peripheriæ sunt ut radii, (§. 412 *Geom.*) revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM III.

815. Quare si factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardissime motæ M, & productum divides per factum ex radiis axium qui ipsis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velocissime motæ O (§. 302 *Arithm.*). Ex. gr. sit $GE = 8$, $DC = 12$, $GH = 4$, $DE = 3$, & revolutio rotæ M una; erit numerus revolutionum rotæ O $= 96 : 12 = 8$.

PROBLEMA CXXVIII.

816. Datis revolutionibus rotæ velocissime circumactæ O interea absolutis, dum tardissime motæ M semel in orbem redit; invenire dentium in axibus & rotis numerum.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum dispergatur in factores.
 2. Numerus dentium seu paxillorum in axibus pro arbitrio assumptus ducatur sigillatim in singulos factores.
- Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum quibus totidem axes occurrunt.

Ex. gr. Si rota velocissime mota 40 revolutiones absolvat, dum tardissime mota semel circumagitur; resolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus esse rotis totidemque axibus dentatis qui istis occurrant. Quod si axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis instruenda, figuram fortitura pro potentia applicanda conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardissime motæ, sunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis quibus occurrunt (§. 811). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ resolvitur; sitque adeo unitas ad factores hosce, ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis quibus occurrunt (§. 66 *Arithm.*); revolutiones rotæ tardissime motæ erunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita unitatis ad factores numeri revolutionum posteriorum dati, *Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.*

consequenter ut unitas ad ipsum hunc numerum (§. 159 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA CXC.

817. Si ope plurium rotarum potentia movet pondus; spatium ponderis est ad spatium potentia, ut potentia sustentans ad pondus.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. a, b, c, &c. axium CB, DE, GH &c. d, e, f &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M semel in orbem redit = $ab : ef$ (§. 812). Jam si rota M semel circumagitur, spatium a pondere percursum æquatur peripheriæ axis BC; spatium vero potentia, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea absolutarum multiplicata. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentia, ut d, ad $abc : ef$; consequenter ut def ad abc (§. 178 *Arithm.*). Sed $d : a = CB : CD$; $e : b = DE : EG$; $f : c = GH : HK$ (§. 412 *Geom.*); adeoque $def : abc = CB. DE. GH : CD. EG. HK$ (§. 218 *Arithm.*). Ergo spatium ponderis ad spatium potentia, ut $CB. DE. GH$ ad $CD. EG. HK$ (§. 167 *Arithm.*); & ideo ut potentia sustentans ad pondus (§. 812). Q. e. d.

Tab.
VI.
Fig. 72.

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA CXCI.

819. Spatia ponderis atque potentia sunt in ratione composita revolutionum

E c

rota

rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ, & peripheria axis istius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardissime motæ $= m$, numerus revolutionum velocissime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria posterioris $= b$. Cum in una revolutione spatium ponderis sit a , potentia b ; erit spatium ponderis, durantibus revolutionibus m , $= ma$; spatium potentia, durantibus revolutionibus n , $= nb$. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentia, ut ma ad nb , hoc est, in ratione composita revolutionum m & n , atque peripheria axis rotæ tardissime motæ a & peripheria rotæ velocissime motæ b (§. 159 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

820. Cum spatia ponderis & potentia sint reciproce ut potentia sustentans, ad pondus (§. 817); potentia sustentans pondus erit ad pondus, in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones velocissime motæ, & peripheria axis istius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA CXXIX.

821. *Data peripheria axis rotæ tardissime motæ, cum peripheria rotæ velocissime motæ, & ratione revolutionum rotæ istius ad revolutiones hujus; invenire spatium quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur spatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardissime motæ in antecedentem, & pe-

ripheria rotæ velocissime motæ in consequentem rationis.

2. Quærat ad hæc duo facta & spatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is spatium potentia quæsitum. (§. 819).

Sit ex. gr. ratio revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ $= 2 : 7$, & spatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardissime motæ sit ad peripheriam velocissime circumactæ, ut 3 ad 8. Reperietur spatium potentia $= 7$. 8. 30 : 2. 3 = 7. 4. 10 = 280'.

PROBLEMA CXXX.

822. *Data peripheria rotæ velocissime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem, & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardissime motæ quam revolutionum utriusque; invenire spatium ponderis.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velocissime motæ in numerum revolutionum ejusdem; factum erit potentia spatium.
2. Ducantur quoque in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
3. Quærat ad hæc duo facta & spatium potentia modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is spatium ponderis quæsitum (§. 819).

Ex. gr. Sit peripheria rotæ velocissime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis ex quo pondus suspenditur $= 8 : 3$, numerus revolutionum $= 28$, ratio revolutionum $= 7 : 2$. Reperietur spatium ponderis $= 3$. 2. 28. 10 : 8. 7 = 3. 10 = 30.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

823. *Data ratione peripheriarum rotæ velocissime motæ atque axis rota tardissime motæ, itemque revolutionum utriusque, una cum pondere; invenire potentiam quæ id sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
2. Quæraturn ad factum antecedentium, factum consequentium, & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæsitæ (§. 820).

Sit ratio peripheriarum $8 : 3$, ratio revolutionum $7 : 2$, pondus 2000. Reperietur potentia $= 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = 214\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

824. *Non absimili modo pondus invenitur, si potentia detur, & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardissime motæ & rotæ velocissime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA CXXXII.

825. *Datis revolutionibus rotæ velocissime motæ interea absolvendis, dum tardissime motæ semel in orbem redit, una cum spatio per quod pondus elevari debet, & peripheria rotæ tardissime motæ; invenire tempus elevationi quæsitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat ut peripheria axis rotæ tardissime motæ ad spatium ponderis datum, ita numerus revolutionum ro-

tæ velocissime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea absolvendarum dum pondus emetitur spatium datum.

2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ, intra unius horæ spatium aut tempus datum quodcunque, absolvendarum.
3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus. Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXCII.

826. *Si potentia P ope Trochleæ sim-Tab.V. plicis Q pondus sustentat, ita ut linea Fig.61. directionis utriusque tangat peripheriam; erit huic æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam Trochleæ tangunt, per *hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares sunt (§. 304 *Geom.*). Jam cum ad sustentationem, præter rectam ACB, partes reliquæ nil conferant, sitque centrum motus in C (§. 759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 765). Sed $CB = CA$ (§. 40 *Geom.*). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

827. Trochlea igitur simplex, si lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, sed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM II.

828. Utimur ergo Trochlea, quoties potentia trahentis directio verticalis in horizontalem, aut sursum tendens in tendentem deorsum, & contra mutari debet.

SCHOLIUM I.

Tab. VI. Fig. 74. 829. Hoc ipso securitati trahentium sapissime prospicitur. Fac enim pondus ingens esse ad insignem altitudinem attollendum ab Operariis funem trahentibus. Quodsi contingat funem DE abrumpi & Operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vite periculo constituuntur. Enimvero si ope Trochleæ B directio verticalis AB in horizontalem BC mutatur, rupto fune DE nihil metuendum periculi.

SCHOLIUM II.

830. Hæc ipsa mutatio lineæ directionis ope Trochlearum in horizontalem hunc etiam præstat usum, ut, si potentia aliqua secundum unam directionem plus virium impendere possit quam secundum alteram, vi maxima utamur; nec non ut potentiis uti liceat quæ juxta datam directionem agere non possent. Ex. gr. equus non trahit secundum directionem verticalem, trahit tamen secundum horizontalem. Verticalis igitur tractio si mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.

THEOREMA CXCIH.

Tab. VI. Fig. 75. 831. Si potentia in E applicata secundum lineam directionis BE, quæ Trochleam in B tangit & funi AD parallela est, pondus F ex centro Trochleæ C suspensum sustentet; ponderis subdupla est.

DEMONSTRATIO.

Patet enim, præter rectam AB, partes Trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F sustentationem. Cum vero

Trochlea sit circa centrum C mobilis (§. 759), in eo erit centrum motus. Et quia, tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentia BE ad AB perpendicularis *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F, ut AC ad AB (§. 765). Est vero $AC = \frac{1}{2} AB$ (§. 759). Ergo potentia ponderis F subdupla. Q. e. d.

SCHOLIUM.

832. Cum Trochlea cum unco suo & loculamento, quod in usu abesse nequit, una attollatur a potentia sursum trahente secundum directionem EB, ejus gravitas ponderi F addenda est.

THEOREMA CXCIIV.

833. Si potentia in B applicata ope Polyspasti sustentet pondus F ita ut omnes funes AB, HI, GF, EL, CD sint inter se paralleli; erit potentia ad pondus, ut unitas ad numerum funium HI, GF, EL, CD, qui a pondere F trahuntur. Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes sunt inter se paralleli, adeoque a centris Trochlearum suarum intervallo radiorum utrinque distant; nulla est ratio, cur a pondere F, unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit, adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, si fuerint funes quatuor, perinde sit ac si tantum pars quarta ponderis ex fune CD suspenderetur. Potentia igitur in B applicata, cum æqualis sit ponderi ex fune CD suspenso (§. 826); quartam

Tab. VI. Fig. 76. quantam non nisi ponderis partem in presenti casu sustentat, hoc est, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium quos pondus F extendit. Q. e. d.

SCHOLION I.

834. Ne Polyspastorum altitudo in nimium excrescat, si ex pluribus Trochleis componantur; Trochleæ ita junguntur, ut tam omnes superiores, quam omnes inferiores circa communem axem versatiles existant. Tum vero omnes inter se æquales esse debent, ut funes sint paralleli.

SCHOLION II.

835. Usus Trochlearum insignis est in ponderibus elevandis; tum quod machinæ spatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod insigni virium compendio pondus satis ingens attolli possit.

COROLLARIUM I.

836. Cum numerus Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum æqualis sit numero funium inferiores sustentantium; potentia pondus F ope Polyspasti sustentans est ad pondus, ut unitas ad numerum Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum.

COROLLARIUM II.

837. Datis igitur Trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus sustentandum; potentia nempe per pondus multiplicatur. Sit ex. gr. potentia 50 librarum, numerus Trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLION III.

838. DECHALES (a) autor est, experientia constare, quod homo simpliciter solo insistens 150 libras elevare possit. Cum igitur 150 librarum potentia ope Polyspasti ex 6 Trochleis compositi 900 libras sustentare

possit; evidens est, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere possit.

Tab. VI. Fig. 76.

SCHOLION IV.

839. Mire multiplicantur Trochlearum vires, si polyspasti plures conjunguntur, tum enim potentia, in Polyspasto uno ad attollendum pondus Q applicanda, vicem subit ponderis F ex Polyspasto altero appensi. Ponamus igitur pondus Q esse 1000 librarum, & Trochleas in unoquoque Polyspasto quatuor; erit ergo pondus P ex altero Polyspasto suspensum nonnisi quarta illius pars, nempe 250, consequenter potentia quarta pars hujus, hoc est, decima sexta totius, $62\frac{1}{2}$.

PROBLEMA CXXXIII.

840. Datis pondere atque potentia; invenire numerum Trochlearum ex quibus componendus est Polyspastus.

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quæsitus (§. 836).

Sit ex. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus Trochlearum 4; quarum omnium eadem diameter, si duæ in parte inferiore, duæ in superiore circa communem axem versatiles construantur (§. 834).

THEOREMA CXCIV.

841. Si potentia Trochlearum ope movet pondus; erit spatium potentie ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam sustentantem.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens est, funium omnium, ex quibus Trochleæ inferiores cum pondere sustentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui

E c 3

debe.

(a) Mechanic. Lib. 4. prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. m. 132.

debere. Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot sunt funes Trochleas inferiores sustentantes. Quare spatium ejus est ad spatium ponderis, ut numerus funium Trochleas inferiores sustentantium ad unitatem; consequenter ut pondus ad potentiam sustentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

842. Quo minor itaque potentia pondus ope Polyspasti attollit, eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis dispendio conjungatur.

THEOREMA CXCVI.

Tab. XVIII. Fig. 178. 843. Si potentia in F applicata suspendit pondus E secundum directionem obliquam BD, & hujus directio sit itidem obliqua ED, linea vero directionis Trochleæ DG per centrum C transit; erit potentia ponderi equalis, & tam ista quam hoc ad vim qua trochlea in L retinetur, ut sinus anguli ADB ad sinum anguli dimidii.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim funes DF & DE quomodocunque extensi Trochleam in B & A tangunt, si ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 308 Geom.) & AD = DB (§. 325 Geom.). Quare cum etiam sit AC = CB (§. 40 Geom.); erit angulus ADC ipsi CDB æqualis (§. 179 Geom.). Jam perinde est ac si mobile aliquod secundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus secundum directiones AD & DB trahentibus, illique æquipollenti-

bus, propter statum æquilibræ, ex hypothesi. Est adeo vis in F applicata ad pondus E, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales per demonstrata, adeoque & sinus eorum (§. 142 Geom. & §. 2 Trigon.). Quamobrem pondus potentiae æquale est. *Quod erat unum.*

Jam potentia est ad vim Trochleam secundum directionem DC sustinentem, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli ADB; & pondus E ad eandem vim, ut sinus anguli BDC ad sinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales sint, per demonstrata, adeoque dimidii anguli ADB; erit vis Trochleam sustentans, in statu æquilibræ ponderum E & F; ad horum alterutrum, ut sinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt, ad sinum anguli dimidii. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXCVII.

844. Si ponderis G linea directionis DC per centrum Trochleæ transit, & Trochlea trahatur secundum directiones obliquas ED & DF; erunt hæ vires inter se æquales; earum vero alterutra ad pondus, ut sinus anguli a directionibus obliquis intercepti ADB ad sinum anguli dimidii ADC.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata litera huc transcribi tota possit.

COROL-

COROLLARIUM.

845. Quoniam sinus anguli dimidii non est dimidius totius, seu, quod perinde est, simpli anguli sinus non est dimidius dupli (§. 325 *Analys. fin.*); in casu directionum obliquarum, potentia pondus, cujus directio per centrum Trochleæ transit, sustentans non est ponderis dimidia.

SCHOLIUM.

846. Ex duobus hisce Theorematis deduci possunt, quæ de Trochleis in casu directionum obliquarum præterea demonstranda sunt; quemadmodum videre est apud VARIGNONIUM, qui hanc Staticæ partem diffuse pertractat (a).

THEOREMA CXCVIII.

Tab.V. 847. Si pondus vel resistentia Cochleæ Fig.62. superanda fuerit ad potentiam, ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam binarum helicum BI; potentia ponderi æquipollet.

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, sunt ut spatia eodem tempore descripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI (§. 33). Sed vires mortuæ sunt in ratione composita celeritatum & massarum (§. 278). Quare cum potentia pondus æquale substitui possit (§. 763), sitque pondus potentia æquale ad pondus elevandum aut deprimentum, reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI, per hypoth. celeritates sunt ut massæ reciproce. Ergo vis potentia est ad vim

(a) *Nouvelle Mécanique, ou Statique* Tom. 1. Sect. 3. p. 283. & seqq.

ponderis, ut factum ex massa potentia in massam ponderis ad factum ex massa ponderis in massam potentia (§. 159 *Arithm.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arithm.*); vires æquales sunt. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

848. Cum peripheria a potentia percursa in una Cochleæ conversione sit spatium ejus, distantia autem duarum helicum BI respondeat spatium ponderis; erit hic quoque spatium ponderis ad spatium potentia, ut reciproce potentia sustentans ad pondus.

COROLLARIUM II.

849. Virium itaque compendium cum temporis dispendio denuo conjungitur.

THEOREMA CXCIX.

850. Si distantia helicum BI minor fuerit, potentia ad eandem resistentiam superandam applicata minor est, quam si illa major fuerit.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium potentia ad helicum distantiam, ita pondus ad potentiam (§. 847). Quod si ergo helicum distantia minuitur, spatium potentia ad eandem (§. 205 *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Est igitur potentia in casu posteriore minor, quam in priore (§. 206 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA CC.

851. Si Cochleæ mas intra scæminam Tab. quiescentem convertitur; minor potentia VI. ad eandem resistentiam superandam requiritur, si scytala CD longior, quam si brevior. Fig.78.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 78. Ut peripheria, scytala CD tanquam radio descripta, ad helicum distantiam IK, ita resistentia superanda ad potentiam (§. 848). Sed si scytala longior, major peripheria describitur, quam si brevior (§. 412 *Geom.*). Ergo in illo casu peripheria ad distantiam helicum IK (§. 203 *Arith.*), consequenter & resistentia superanda ad potentiam majorem rationem habet, quam in hoc casu. Quare cum resistentia eadem maneat, *per hypoth.* potentia in casu posteriore major, quam in priore (§. 189 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXXIV.

852. *Data distantia potentie a centro Cochleæ CD, distantia helicum IK, & potentia in D. applicata; determinare resistentiam superandam: vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quærat peripheria circuli radio CD describenda (§. 429 *Geom.*).
2. Quærat porro ad distantiam helicum, peripheriam modo inventam, & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, distantiam helicum IK, & resistentiam datam numerus quartus proportionalis; erit is in priore casu resistentia superanda, in altero potentia qua ad resistentiam datam vincendam utendum (§. 847).

Ex. gr. Sit distantia helicum 3'', distantia potentie a centro Cochleæ CD 25'', potentia 30 librarum. Fiat

$$100 - 314 - 50'''$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 157 \overline{) 100} \end{array}$$

Fiat porro

$$3 - 157 - 30$$

$$1 \quad 10 \quad 10 \quad (\S. 316 \text{ Arithm.})$$

1570 pondus, cui resistentia æqualis.

PROBLEMA CXXXV.

853. *Data resistentia quæ data potentia superari debet; Cochleæ diametrum, distantiam helicum IK, & longitudinem scytalæ CD definire.*

RESOLUTIO.

1. Distantia helicum & diameter Cochleæ pro arbitrio assumantur, si ope scytalæ convertenda est Cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad resistentiam quam superare debet, ita helicum distantia ad quartum: quæ erit peripheria a scytala CD in conversione Cochleæ describenda (§. 847).
3. Quodsi ergo quærat per semidiameter hujus peripheriæ (§. 429 *Geom.*); habebitur longitudo scytalæ CD.
4. Quodsi vero Cochlea fœmina circa marem convertitur sine scytala, peripheria *per n. 2.* inventa eadem fere est, quæ Cochleæ, adeoque semidiameter *per n. 3* reperta Cochleæ semidiameter.

Ex. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100; distantia helicum 1''. Repetitur peripheria a potentia percurrentia $6000:100=60$, adeoque longitudo scytalæ, si qua utaris, 1' 9'': si nulla utaris, erit latus Cochleæ fœminæ 19''.

COROL.

Tab. VI.

Fig. 78

COROLLARIUM.

Tab. 854. Quodsi peripheria Cochleæ in
VI. rectam BC transferatur, & in B perpendi-
Fig. 79. cularis BA erigatur altitudini Cochleæ
æqualis, tandemque factis B 1, 1 2, 2 3
&c. distantia helicum æqualibus, ducantur
rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogram-
mum circa cylindrum cujus peripheria
rectæ BC æqualis circumvolutum helicem
qua cylindrus sulcandus exhibebit.

DEFINITIO LXXXII.

Tab. 855. Cochlea infinita, seu perpetua
VI. vocatur, si rotam stellatam F circum-
Fig. 80. agit.

COROLLARIUM.

856. Dum Cochlea semel circumvolvi-
tur; rota nonnisi unius dentis intervallo
promovetur.

SCHOLIUM.

857. Dicitur autem ideo infinita, quia
sine fine circumagi potest.

THEOREMA CCI.

858. Si potentia manubrio Cochleæ
infinitæ AB applicata fuerit ad pondus,
in ratione composita ex peripheria axis
rotæ EH ad peripheriam manubrio ver-
sato a potentia descriptam, & revolutio-
num rotæ F ad revolutiones Cochleæ
CB; ponderi æqualebit.

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per nume-
rum revolutionum rotæ stellatæ F
multiplices, prodibit spatium ponderis
G. Sed si peripheria manubrio AB def-
cripta multiplicetur per numerum re-
volutionum Cochleæ CB, factum est
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

spatium potentia. Sunt igitur celeri-
tates, quibus pondus & potentia mo-
ventur, ut ista spatia (§. 33). Quare cum
pondus ad potentiam sit in ratione reci-
proca eorundem spatiorum (*per hypoth.*
& §. 159 *Arithm.*); vires sunt in ratione
composita earum, quas habet spatium
ponderis ad spatium potentia, & spa-
tium potentia ad spatium ponderis
(§. 278), hoc est, ut factum ex spatio
ponderis in spatium potentia ad fa-
ctum ex spatio potentia in spatium pon-
deris (§. 159 *Arithm.*); adeoque æqua-
les (§. 207 *Arithm.*). Q. e. d.

Tab.
VI.
Fig. 80.

COROLLARIUM I.

859. Quoniam rotæ motus tardissimus
(§. 856); exigua potentia ingens pondus
moveri potest ope Cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM II.

860. Utimur adeo Cochlea infinita, vel
si ingens admodum pondus per exiguum
spatium movendum, vel si motus tardissi-
mus efficiendus.

SCHOLIUM.

861. Commodus igitur ejus usus est in Ho-
rologiis. Unde HUGENIUS eadem utitur in
Automato Planetario.

PROBLEMA CXXXVI.

862. Datis dentium numero, distan-
tia potentia a centro Cochleæ AB, & radio
axis HE, una cum potentia; invenire
pondus.

RESOLUTIO.

I. Ducatur distantia potentia a centro
Cochleæ AB in numerum dentium;
F f factum

Tab. VI. *Fig. 80.* factum est ut spatium potentiae interea absolutum dum pondus conficit spatium peripheriae axis æquale (§. 413 *Geom.* & 858 *Mech.*).

2. Quæratnr numerus quartus proportionalis ad radium axis, spatium potentiae modo inventum, & potentiam; erit is pondus quod potentia sustentare valet (§. 858).

Ex. gr. Sit $AB = 3$, radius axis $HE = 1$, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ $F = 48$; erit pondus $= 3.48.100 : 1 = 14400$.

SCHOLION I.

863. Apparet hinc, Cochleam infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.

SCHOLION II.

864. Solent etiam Cochleæ construi, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque Cochleæ a singulis dentibus semel circumvolvatur, motus efficitur velocissimus. Hinc ejus usus est in Machinis, quæ ad poliendum corpora aspera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.

THEOREMA CCII.

Tab. V. *Fig. 64.* 865. Si potentia Cuneo ita applicata, ut linea directionis CD sit ad latus AB perpendicularis, fuerit ad resistantiam superandam, ut AB ad CD ; resistantia æquipollet.

DEMONSTRATIO.

Ponamus Cuneum detrudi usque ad Tab. *Fig. 6.* rectam GF ipsi AB parallelam: erit DE spatium potentiae, FG spatium ponderis. Est vero $DE : FG = DC : AB$ (§. 268 *Geom.*). Ergo celeritates potentiae & ponderis sunt, ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiae ac ponderis sunt in ratione composita ipsorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC , per hypoth. Ergo vires sunt ut $AB. DC$ ad $DC. AB$ (§. 159 *Arithm.*); adeoque æquales (§. 207 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

866. Potentia igitur dimidiæ resistantiæ æquivalens est ad eam, ut AC ad DC , hoc est, ut ad sinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7 *Trigon.*).

COROLLARIUM II.

867. Cum tangens anguli minoris minor sit quam majoris (§. 7 *Trigon.*), potentia ad dimidiam resistantiam majorem rationem habet, si angulus major, quam si minor (§. 203 *Arithm.*). Unde in priori casu major est quam in posteriori (§. cit.), hoc est, Cunei acutiores magis potentiae vires amplificant quam minus acuti.

SCHOLION.

868. Ex natura Cunei reddenda est ratio omnium fere instrumentorum quibus ad scindendum aut dividendum utimur: qualia sunt cultri, enses, secures, scissella, aliaque instrumenta celatoria.

CAPUT XVI.

De Potentiarum ad Machinas Applicatione.

DEFINITIO LXXXIII.

869. **P**ER *Potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: per *inanimatas* vero, aërem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO LXXXIV.

870. Potentia dicitur *trudendo movere*, si linea directionis tendit in plagam moventi oppositam.

DEFINITIO LXXXV.

871. Potentia dicitur *deprimere*, si linea directionis tendit a movente deorsum.

DEFINITIO LXXXVI.

872. Potentia dicitur *trahere*, si linea directionis tendit ad moventem, seu si mobile sequitur moventem vel ad eum accedit.

DEFINITIO LXXXVII.

873. Potentia dicitur *elevare*, si linea directionis tendit sursum, seu si mobile ascendit.

DEFINITIO LXXXVIII.

874. Potentia animata dicitur *calcando movere*, si pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO LXXXIX.

875. Potentia animata *versando mo-*

vere dicitur, si eidem loco insistentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA CXXXVII.

876. *Machinam construere, quam Tab. VII. Homo trudendo movere possit. Fig. 81.*

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF versari possit.
2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

Quodsi enim Homo manibus continuo protrudat vectem GH, cylindrus EF circa axem suum circumagetur (§. 870).

SCHOLION.

877. Si Machina ita simplex ad pondera attollenda adhibetur, Ergata appellari solet.

COROLLARIUM I.

878. Quodsi GH fuerit temo cum libra; Tab. VII. Equus vel Taurus trahendo Machinam movebit (§. 872). Fig. 82.

COROLLARIUM II.

879. Si annulo L alligetur funis, quem Tab. VII. manibus prehendat Homo, aut corpori suo circumplicet; Machinam trahendo movebit (§. 872). Fig. 81.

PROBLEMA CXXXVIII.

880. *Machinam construere, quam Homo versando movere possit.*

Ff 2

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VI. Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, Fig. 83. vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim Homo manu circa centrum radium BD circumducit; versando Machinam movet (§. 875 *Mech.* & §. 131 *Geom.*).

SCHOLIUM.

881. Si duo manubria eidem Machinæ applicantur, necesse est, ut situm habeant contrarium, quia dum unus manubrium ABDC deprimit, alter alterum EFGH attollere debet.

PROBLEMA CXXXIX.

882. Machinam construere, quam Homo partim trahendo, partim deprimendo movere possit.

RESOLUTIO.

Tab. V. Talis est Axis in Peritrochio EABF, Fig. 60. Quodsi enim scytalam A manu prehendat & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): sed ubi ulterius eandem deorsum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 871).

Tab. VII. Loco Peritrochii sufficiunt scytalæ solæ GH & KI: quæ si duobus in locis ad axem aptentur, duo Homines una eandem partim trahendo, partim deprimendo movebunt.

SCHOLIUM.

883. Si Cylindrus horizontaliter positus & solis Scytalis instructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur, Sucula vocatur.

PROBLEMA CXL.

884. Machinam construere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere possit Homo.

RESOLUTIO.

1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur.
2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum transeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodsi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB semiperipheriam describet, sicque trahendo movebis Machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem sui BC tibi obvertit, in pristinum situm redigas; idem radius BA alteram semiperipheriam describet; sicque trudendo movebis Machinam (§. 870).

Aliter.

Idem præstabis, si vectis HFG solo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere possit: reliqua omnia eadem ratione se habeant, ut ante.

SCHOLIUM.

885. Uncus interdum geminatur, ut alter sit altero superior & in contrarium positus: ita nimirum duo simul machinam agitare possunt motibus contrariis, uno scilicet trahente, dum alter trudit; & contra.

PROBLEMA CXLI.

886. Machinam construere, quam Homo calcando movere possit.

RESOLUTIO.

RESOLUTIO.

Tab. VII. *Fig. 87.* Construat^r Tympanum AB cum cylindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut Homo unus vel plures intra ejus ambitum stare possint. Hunc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874).

Aliter.

Tab. VII. *Fig. 88.* Construi quoque potest rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior superficies dentibus, superior scalis instruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi sua in eam agat (§. 261), major tamen distantia a centro motus esse potest, quam in verticaliter erectis.

Aliter.

Tab. VIII. *Fig. 89.* Si pondus movendum sit exiguum & motus celer requiritur, vecte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum ma-

Tab. VIII. *Fig. 90.* nubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, si pede deprimatur. Tornadores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elasticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, adeoque in minori distantia, applicatur; motus est celer, utut potentia major esse debeat resistentia in H vincenda (§. 765. 772).

PROBLEMA CXLII.

887. *Machinam construere, quam Equus vel Bos trahendo movere possit.*

RESOLUTIO.

Utendum est cylindro verticaliter erecto ND cum temone HG 8 minimi pedum, ut supra (§. 775). Præstat autem temonem esse longiorem, quam brevior, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA CXLIII.

888. *Machinam construere, quam Equus vel Bos calcando movere possit.*

RESOLUTIO.

Construendum est Tympanum AB subscudibus transversis munitum, & super eo stabulo includatur Equus vel Bos per solum pertusum pedibus posterioribus rotæ insistent, subscudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum assa, tympanum eum in modum construi solet, quo majora (§. 885), ab Hominibus intra eorum ambitum consistentibus impellenda; & Canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis sui mole idem circumagens.

SCHOLIUM.

889. *Cum Machinae hactenus descriptæ omnes, ad Axem in Peritrochio revocentur, nisi quod nonnullæ earum sint ex Vecte & Axe in Peritrochio compositæ, si attendatur ad lineam directionis potentia & inde determinetur distantia a centro motus (§. 229), virium æstimatio haud difficulter instituitur (§. 765, 792, 793).*

PROBLEMA CXLIV.

Tab. 890. *Machinam construere, qua a VIII. pondere descendente moveatur.*
Fig. 92.

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontaliter positum funis circumvolvatur, &
2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento distantia.
3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum descendit, cylindrum AB circumagitat.

COROLLARIUM I.

891. Quo major est altitudo, per quam pondus Q descendit, eo diutius durat motus.

SCHOLIUM.

892. *Hinc Horologia, qua a pondere descendente moventur, in editis Turribus collocantur, aut, si index circumagendus fuerit exiguus, in suprema conelavis parte.*

COROLLARIUM II.

893. Ut pondus Q lento gradu descendat, nec motus ejus acceleretur (§. 70); cylindri AB motus esse debet quam tardissimus; consequenter pondus ad movendam Machinam adhiberi nequit, nisi in Machinis compositis, ubi motus in principio tardus, sed per plures Machinæ partes propagatus fit celerior (§. 825).

COROLLARIUM III.

894. Cum adeo pondus in minori a centro distantia applicandum sit, ibi potissimum huic potentia est locus, ubi non magna est resistentia.

COROLLARIUM IV.

Tab. 895. Quodsi pondus P ex Polyspasto VIII. FH suspendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere potest. Dum enim per spatium peripheriæ cylindri descendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum sine Polyspasto nonnisi semel circumageretur. Sed

quia funis HI a quarta tantum ponderis Tab. Q parte trahitur (§. 833), vel etiam a VIII. minore (§. 843); perinde est ac si quarta tantum ejus pars, vel etiam quarta minor, sine Polyspasto ad Machinam agitantam adhiberetur. Utendum igitur est Polyspasto, ubi spatium non satis altum descensui ponderis conceditur.

PROBLEMA CXLV.

896. *Pondere appenso adjuvare potentiam moventem.* Tab. VIII.

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo E alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodsi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA CXLVI.

897. *Machinam elateris vi movere.* Tab. VIII.

RESOLUTIO.

1. Lamella chalybea AB altero sui extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur, & thecæ cylindricæ, cui altero sui extremo afferruminata, includatur.
2. Huic affigatur catenula, altero suo extremo axi coniformi GH alligata. Quoniam enim laminæ vis elastica continuo minuitur, sub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus distantia GL applicanda; sub finem vero, ubi segnius trahit, in majori IK (§. 792); quo obtinetur, ut potentia hæc, in se sat inæquabilis, ad motum tamen regularem qualis est horologiorum portatilium adhiberi possit.

SCHO-

SCHOLIION.

898. Equidem figura fusi GH non Conica, sed alia Conoidica esse debebat, & Celeberrimus DE LA HIRE (a) in ejus constructionem inquirat. Sed cum hypotheses assumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipsemet non diffitetur regulam quam invenit praxi non satis exacte respondere. Cæterum vi elastica animantur quoque automata culinaria.

DEFINITIO XC.

899. Rota directa est quæ ab aqua desuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. Rota vero retrograda vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM I.

900. Quoniam aqua rarissime ea rapiditate fertur ut rotas molares circumagere possit; ex alto præcipitata impetum acquirat necesse est (§. 79, 543).

COROLLARIUM II.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorsum tendat, quamdiu centro Telluris propius fieri potest; locus, ubi rotæ collocantur, centro Telluris vicinior esse debet quam is unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM III.

902. Et cum aquæ fluentes successive cadant, a latice seu origine earundem nonnisi exigua declivitas, nempe quam sufficere experientia loquitur, ad distantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad summum dimidii, concedenda; reliqua

(a) *Traité de Mécanique*, prop. 72. p. 233. & seqq.

autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM IV.

903. Inquirendum itaque quanto depressior sit locus, ubi rotæ molares constituantur, quam origo aquarum.

DEFINITIO XCI.

904. Ars libellandi est ars determinandi declivitatem aquarum, seu generalius, quanto intervallo punctum aliquod sit Terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta singula a centro Telluris æqualiter distant (§. 207): aquæ libellantur si lineæ horizontalis in datorum locorum superiore inventa usque ad inferiorem continuetur, & ejus a superficie aquarum distantia utrobique investigetur. Distantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO XCII.

906. Libella est instrumentum, quo invenitur lineæ horizontalis, & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA CXLVII.

907. Libellam construere.

RESOLUTIO.

1. Ex centro semicirculi C suspendatur pondusculum H. Tab. VIII.
2. Diametro AB infigantur unci E & F. Fig. 96.

Quodsi enim funis per uncas E & F ita extendatur, ut filum CD semicirculum appensum bifariam secet; lineam horizontalem apparentem repræsentabit.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Quia pondusculum H filum CD extendit: erit CD linea directionis ejus Fig. 96. (§. 17). Et quia semicirculum bifariam secat *per hyp.* ad AB perpendicularis est (§. 143, 78 *Geom.*). Ergo AB est linea horizontalis apparens (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VIII. 1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ, & inferius in C lamina cochlea E instructa. Fig. 97.

n. 1. 2. Laminæ vero huic afferruminentur prisma excavatum FG cum stylo GHIK bifurcato.

3. Inferius afferruminetur annulus cum ansula, ut, si opus fuerit, pondus appendi possit.

n. 2. 4. Paretur denique fulcrum semicirculare aut semi-Ellipticum NO superius in P cochlea PQ instructum, ut instrumentum cruribus IK, in cuspidibus acutis desinentibus, in punctis S & T insistere queat.

Quodsi enim fulcimentum, mediante cochlea, ad arborem aut baculum erectum firmetur, instrumentum eidem insistens vi gravitatis in eum situm sese disponet, ut regula cum dioptris sit horizonti parallela (§. 215).

Aliter.

Tab. VIII. RICCIOLUS propria experientia fretus hanc Libellam (a) commendat.

Fig. 98. 1. Super regula AB pedum 12 aut ad summum 20 canaliculo excavato inferatur tubus CABD ex laminis ferreis stanno obductis, vel cupreis

(a) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 26. §. 8. f. 230.

paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis. Tab. VIII.

2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ foeminæ; quibus aliæ mares inferantur, ut tubus quam artissime claudi possit. Fig. 98.

3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.

4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate molestus sit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque Libella moveri & in situ eodem, si necesse sit, immota servari possit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere possit inter transferendum.

Quodsi enim instrumentum aqua repleas, & tubum ita constituas ut aqua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens; cum fluidorum quiescentium partes omnes eandem a centro Telluris distantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent versus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Consultum quoque est, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem; quamvis etiam sine iisdem per utriusque aquæ superficiem collineatio in omni situ tubi fieri possit.

Aliter.

1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excrecere potest, Tab. IX. Fig. 99.

ab. potest, glutine quodam firmetur in-
IX. tra tubulos orichalceos IP & QL,
3.99. sitque tubus in altero extremo L
apertus, sed obturaculo quodam ex
subere parato & capite orichalceo
instructo claudendus.

2. Tubus ita paratus firmetur super re-
gulam ST, ad quam etiam

3. Firmentur dioptræ M & N.

4. Infra hanc regulam firmetur alia
minor CD circa axiculum in C mo-
bilem, mediante cochlea G nunc
attollenda, nunc deprimenda.

5. Intra has regulas sit lamina elastica
H ex orichalco aut chalybe parata,
ut instrumentum tanto accuratius ad
situm horizontalem disponi possit.

6. In medio denique regulæ inferioris
afferruminetur matrix seu cochlea
-foemina, ut Libella ad fulcrum quod-
dam, quoties ea utendum, firmari
possit.

Quodsi tubum velaqua, vel spiritu vi-
ni colorato repleas, ita tamen ut paucu-
lum aeris remaneat, bullulam in super-
ficie fluidi formaturum; ascendet bul-
lula in partem superiorem, si tubus fue-
rit inclinatus, sed datum situm e. gr. in
F tuebitur, si horizontalis fuerit. Levia
enim sursum ascendunt, quantum da-
tur.

SCHOLIION I.

907. *Alia Libellarum genera a Viris ce-
leberrimis Philippo DE LA HIRE, ROE-
MERO, HUGENIO, PICARDO inventa descri-
buntur a modo laudato PICARDO (a). Ad-*

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

(a) *Traité du Nivellement, c. 2. p. 37. & seqq.*

*huc alia dederunt Viri Cl. COUPLETUS (b)
& HARTSOEKERUS (c). Ego eas descripsi,
quas mea instrumentorum suppellex mihi sup-
peditavit. Omnium fere, quæ passim pro-
stant, descriptionem dedit Jacobus LEUPOL-
DUS (d).*

SCHOLIION II.

908. *Prima Libellarum, quam exhibui, Tab.
non satis fida. RICCIOLUS enim jam ob- IX.
servavit, facile aberrari 5 minutis, immo Fig.
gradu dimidio, nisi ingens fuerit. Sed moles 100.
usum molestum reddit. Facile tamen medela
paratur, si scilicet loco semicirculi utamur
regula AB trium pedum cum altera longiore
CD quatuor pedum ad angulos rectos priori
insistente: quæ si dioptris instruatur & libere
suspendatur, fulcro conveniente adhibito,
exactissimam Libellam constituit.*

SCHOLIION III.

909. *Solent quoque a nonnullis in Libella-
tionibus præsertim longioribus dioptrarum lo-
co adhiberi Telescopia: sed multa circumspectio-
ne opus est, ut rite ad instrumenta applicen-
tur. Enimvero ea de re in Astronomia ex
principiis opticis dicetur.*

PROBLEMA CXLVIII.

910. *Rectificare Libellam.*

RESOLUTIO.

Ut certus sis, Libellam esse revera Tab.
in situ horizontali IX.

1. Instrumento in G collocato, colli- Fig.
neatio fiat in C centrum tabulæ in 102.
Dd erectæ.

G g

2. Li-

(b) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences
A. 1699. p. 172.*

(c) *In Miscellan. Berolinens. p. 328. & in Artis
Eruditorum A. 1712. p. 34.*

(d) *In Theatro Horizontostatico sive libellationis,
quod est pars quarta Theatri Statici universalis.*

Tab. 2. Libella, quæ eum in finem duplici-
IX. bus dioptris instrui debet, invertatur
Fig. & denuo collineatio fiat in tabulam
102. eandem.

3. Quodsi idem punctum C sit in linea
visuali, Libella convenientem habet
situm; sin in puncto altiori aut de-
pressiori desinat, paulisper attollenda
vel deprimenda est [quo spectant
regulæ cum cochleis in Libellis pau-
lo ante descriptis], donec linea vi-
sualis punctum inter duas collinea-
tiones medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Ponamus instrumentum esse in linea
horizontali AC, & visu attingi pun-
ctum C. Si situs instrumenti mutetur,
ut B in A & A in B constituatur; cum
linea horizontalis non sit nisi unica, ad-
huc linea visualis AB ultra dioptras
continuata in puncto C terminabitur.
Quod erat unum.

Quodsi instrumentum non sit hori-
zonti parallelum, linea visiva in centro
ejus G secabit horizontalem AB, eritque
 $HGB = AGF$ (§. 156 *Geom.*), & col-
lineanti per F & H occurret punctum
altius D. Quodsi Libella invertatur, ut
H in *b* & F in *f* constituatur; erit
 $bGA = BGf$ (§. 156 *Geom.*). Est
vero $bGA = HGB$, quia instrumen-
tum, situ respectu lineæ horizontalis im-
mutato, inversum. Ergo $BGf = HGB$.
Quare cum porro, ob rectam *Dd*, in
quo sunt puncta D & *d*, ad lineam ho-
rizontalem perpendicularem anguli re-
cti ad C æquales sint (§. 145 *Geom.*);
erit $CD = Cd$ (§. 267 *Geom.*), hoc

est, linea horizontalis cadit in pun-
ctum C intra duo collineata D & *d* me-
dium. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXLIX.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

1. Eo in loco, ubi origo declivitatis
statuitur, ope ponderis ex fune sus-
pensi exploretur, quanto intervallo
superficies aquæ a ripa absit.
2. Idem fiat altero in loco, ubi decli-
vitatatis terminus statuitur.
3. Erectis in A & B baculis ad horizon-
tem perpendicularibus, cum tabulis
D & C nigro colore tinctis, sed cru-
ce alba notatis, atque ope cochleæ
in quocunque situ ad baculos fir-
mandis, libella EF collocetur in P.
4. Tabula utraque D & C nunc at-
tollatur, nunc deprimatur, donec
per EF collineanti punctum medium,
in quo lineæ albæ sese mutuo inter-
secant, occurrat.
5. Investigentur exactissime altitudines
punctorum D & C, nempe AD &
BC, atque in schedula notentur.
6. Tum instrumento in Q & baculo ex
A in M translato, fiat ut ante col-
lineatio in O & P, notenturque alti-
tudines OB & PM. Et ita operatio
continuetur, donec terminum decli-
vitatatis M attigeris.
7. Addantur in unam summam altitudi-
nes AD & BO &c. itemque BC &
MP &c. & priori adjiciatur altitu-
do ripæ in origine declivitatis A,
posteriori vero altitudo ripæ in fine
declivitatis M.

8. Quod-

Tab.
IX.
Fig.
101.

8. Quodsi enim aggregatum posterius e priori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A usque ad alterum M fluentium, respectu lineæ horizontalis apparentis.

9. Quare si tractus AM fuerit longus; quod ab ea subtrahendum est, ut habeatur declivitas respectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per Problema 39 (§. 216): aut sine novo calculo in Tabula superius exhibita (§. 217). Sit ex. gr.

altit. ripæ AL 64	altit. ripæ MN 58
AD 34"	BC 57"
BO 68	PM 102

Summa 166

Summa 217
166

declivitas LI 51

Sit LK 900 pedum, erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5'0"7".

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK, itemque OQ parallelæ; erit $DQ = OC$, $PN = QI$, $DL = BC$, $OB = QL$ (§. 226 Geom.). Ergo $DA + AL + OB = QL + BC$, & $PM + MN + BC = QI + BC$, consequenter $QI + BC - QL - BC = LI$ Q. e. d.

SCHOLION.

912. Quoniam in hac operatione facile aberrari potest, consultum est, ut libellatio bis instituat; nempe primum a termino A usque ad terminum M, deinde retro a termino M usque ad terminum A.

DEFINITIO XCIII.

913. Sectio fluminis est planum ad angulos rectos secans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem inter se parallelæ.

COROLLARIUM I.

914. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis est ad horizontalem perpendicularis (§. 215), & fundus alvei atque superficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter se parallelæ, per hypoth. latera plani secantis erunt ad basin perpendicularia & inter se parallelæ; consequenter opposita æqualia (§. 226, 238 Geom.), adeoque sectio rectangulum est (§. 100 Geom.).

COROLLARIUM II.

915. Invenitur adeo, si latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 375 Geom.).

COROLLARIUM III.

916. Sunt etiam sectiones diversæ in ratione composita latitudinum, alveorum & profunditatum aquarum (§. 376 Geom.).

SCHOLION I.

917. Cum aquæ fluentes nunc tabescant, nunc intumescant; eo potissimum tempore sectionem fluminis dimetiri debet molendina exstructurus, quo mediocrem habet altitudinem.

SCHOLION II.

918. Quodsi aquæ copia non abundamus; consultum est, ut aqua in stagno colligatur inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam sunt fontes in vicinia siti, & aquæ ex iis in stagnum derivandæ.

SCHOLION III.

919. Cum ex superioribus constet, in conflictu corporum non modo habendam esse rationem massæ, sed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quiescens impingens movetur (§. 543); in Molendinis aquarum vi agitandis consideranda est & sectio earum & decli-

declivitatē in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodsi declivitas fuerit insignis, plurimorum scilicet pedum, e. gr. 10 aut 12, & sectio aquæ exigua, rota construatur directa: ast si declivitas exigua & sectio ingens, rota utendum est retrograda.

PROBLEMA CL.

920. Aquam fluentem in rotam directam deducere.

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari possit, aqua per alveum aut canalem ex ligno constructum deducatur ad rotam, & distantia 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis segniter fluat.
2. Rota ratione decente constructa sub canali ita constituatur, ut aqua deorsum ruens per planum declive in capsulam ab axe secundam irruat, ipsa vero aquæ effusæ superficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM I.

921. Quodsi a declivitate integra subducatur pars quæ aquæ concedenda, ut intra alveum suum fluere possit & in rotam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effusa defluat; diameter rotæ relinquatur.

COROLLARIUM II.

922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores esse præstat.

PROBLEMA CLI.

923. Rotam directam construere.

RESOLUTIO.

Totum artificium huc redit, ut situs palmularum determinetur; id quod sequentem in modum fieri solet.

1. Semidiametro rotæ (quæ est dimidia altitudo ejus) in scala modica sumpta describatur circulus AIKA & semidiametro minore, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE sit $\frac{1}{3}$ AE.
3. Ex centro per D describatur circulus, in tot partes æquales dividendus quot palmulis instruenda est rota.
4. Applicata regula ad duo divisionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI, &
5. in H excitetur perpendicularis HG. Recta HI situm palmulæ unius; recta vero HG situm alterius determinat. Et eodem modo situs binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

Tab.
IX.
Fig.
103.

PROBLEMA CLII.

924. Aquam ad rotam retrogradam deducere.

RESOLUTIO.

1. Ne aqua superflua in rotam incidat, & tota ejus declivitas, parte demta quæ ipsi ut fluere possit concedenda, in præcipitium mutari queat; fossa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo distans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumescens ripis fossæ atque molendino facile damnum inferat.

2. Ne

2. Ne autem aqua intumescens agros vicinos inundet, riparum sufficiens esse debet altitudo. Consultum quoque est, ut fundus fossæ arena complanetur.

3. Quo aquæ sufficiens copia in fossam deducatur, per transversum fluminis excitandus est agger, tantæ altitudinis quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu suo retardandam.

4. In fine fossæ trabs horizontaliter sternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen; ejus superficies cum fundo fossæ sit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari possit.

5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transversa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depressa, aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti possit.

6. Ut igitur aqua tabula depressa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorsum fluere possit, & ne aqua intumescens ripas fossæ egrediatur; alicubi fossæ molinariæ a latere jungenda est alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ superflue transitum concessura.

7. Alveus denique declivis in fine fossæ excitetur profunditatis AB, quanta est declivitas in præcipitium mutanda, utque in rotam directe impingat aqua, superficies per quam delabitur sternenda est juxta arcum DC ex centro rotæ E, intervallo radio ejus paulo majore, descriptum.

8. Quodsi fossæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transversum fluminis prope rotam construendus, ut aqua in motu retardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM I.

925. Si ea fuerit fossæ latitudo, ut duabus rotis juxta se invicem constituendis locus concedatur; duo quoque construendi sunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere posito, per quem aqua superflua a molendino arcetur.

COROLLARIUM II.

926. Quodsi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel subtripulum &c. rotæ agitandæ sufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ constituuntur, declivitate inter eas divisa; ita tamen ut præcipitium majus sit ante posteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLION I.

927. Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quorum anteriores altiores, posteriores humiliores, differentia altitudinis primorum & ultimorum existente equali altitudini, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & sabulo replentur & superius stratum paratur vel ex asseribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum distantiam complanatur, ne aqua vim ipsi inferre possit.

SCHOLION II.

928. Rotarum retrogradarum constructio nihil habet difficultatis: palmularum enim situs determinatur per radios ex centro rotæ eductos, sive intra orbes collocentur, sive in fronte constituentur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aquæ sectio.

Minoris altitudo (quam Germani ein Staber-Rad appellant) est 12 pedum; majoris vero (quæ nobis ein Panster-Rad nuncupatur) ordinarie 16 pedum. In illa distantia palmularum digitorum 12 & 13; in hac 16 vel ad summum 19. Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratorum; in hac pedum quinque. Quodsi palmulæ ad peripheriam rotæ sint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas Straub Ræder dicimus); altitudo rotæ & distantia palmularum variat, pro diversa fundi declivitate & sectionis magnitudine.

PROBLEMA CLIII.

Tab. IX. Fig. 105. 929. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi infigantur virgæ AD & CB se mutuo ad angulos rectos in E secantes, quarum longitudo 32 pedum fieri solet.
2. Ad has virgas ex scandulis construuntur alæ figuram trapezii parallelarum basium habentes, quarum latitudo HI fit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad I & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ sunt, ut FG cum axe FL efficiat angulum 54° .
4. Denique, ut alæ vento semper obverti possint, tota machina circa axem NK versatilis esse debet, ut ope vectis PQ huc illucque versari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus construunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato versatile existat. Eum scilicet in finem

1. Turricula annulo ligneo cingitur, & in eo canaliculus effoditur, in cuius fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum segmentum ultra eum promineat.
2. Intra canaliculum alius annulus reponitur, cui tectum superstructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G, &
4. cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum altera priorem tecto firmiter affigit.
5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero sui extremo Axi in Peritrochio aut Suculæ alligandus.

Quodsi enim funis per uncum G ducatur & Sucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, consequenter alæ in plagam ipsi oppositam diriguntur.

SCHOLION I.

930. *Prior modus nostris in oris usitatus, posteriore in Batavia utuntur. Et posterior quidem priori præstat, quia alæ construi possunt majores, consequenter Machinæ a vento agitatæ, ubi major resistentia superanda. Quodsi vero ad hanc vincendam minores sufficiunt, prior ideo antefertur, quia sumptibus longe minoribus exstruitur.*

SCHOLION II.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt Thomas SAVERY (a), AMONTONS (b), DIO-*

(a) In *Transact. Anglican.* n. 252. p. 228.

(b) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.* Anno 1699, edit. Bat. p. 154.

Dionysius PAPINUS (c), & deinceps alii (d): sed valde vereor, ne inventa ipsorum praxi parum respondeant. Haftenus cum successu eadem non usi sunt, nisi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis casibus vis motrix nimis sumtuosa.

SCHOLION GENERALE.

932. Quæ haftenus de potentiarum ad Machinas applicatione diximus, eum unice in finem proposuimus, ut in Machinis invenientis usui essent; quoniam earum structura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio &

(c) In Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam.

(d) Stephani SWITZER Introduction to a general Systeme of Hydrostatiks and Hydrauliks cap. 28. 29. p. 325. & seqq.

plus temporis requirit quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in desideratis habeantur, nec ad scopum nostrum apprime facere videtur. Neque operas manuvias hic exponere visum est, cum eadem ad Mathesin non spectent, sed ab eadem supponantur. Mathesis enim in dimentendis iis occupatur, quæ sub mensuram cadunt; manuvias vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a Theoria ad Praxin progressurus earum non sit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in Theoria pro veris habeantur, quæ non succedere in Praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc scopulum impingas, nihil assumendum est tanquam arte parabile, quod arte parari posse non jam ante experientia cognoveris, aut ex iis quæ experientia constant legitima consequentia deduxeris.

C A P U T XVII.

De Resistentia in Machinis, seu Frictione.

DEFINITIO XCIV.

933. **F**riccio est resistentia superficiei per quam inceditur.

SCHOLION.

934. Ita perspicacissimus LEIBNITIUS (a) frictionem definit, qui primus hanc materiam distincte evoluit.

DEFINITIO XCV.

935. Corpus dicitur asperum, in cuius superficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO XCVI.

936. Superinceffus radens est, si

(a) In Miscellaneis Berolinens. p. 307.

punctum idem superincedentis lineam in superficie describit per quam inceditur.

E. gr. Talis est superinceffus parallelepipedo super plano protrusi.

DEFINITIO XCVII.

937. Superinceffus volvens est, si punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis est rotæ in curru tam respectu axis, quam respectu soli.

DEFINITIO XCVIII.

938. Motus mixtus est, si volutioni

ni admiscetur motus radens elementaris seu instantaneus.

SCHOLION.

939. *Hunc motum distinctius explicat LEIBNITIUS (b); sed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA CCIII.

940. *Si superficies per quam inceditur, & superficies corporis quod per illam incedit, fuerint asperæ; frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in superficie corporis asperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 935); si tam superficies corporis incedentis, quam ea per quam inceditur, asperæ fuerint; eminentiæ vel sunt intra cavitates deprimendæ, vel prorsus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri potest sine motu, nec motus produci sine vi impressa. Vis igitur qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte, his effectibus impendenda, adeoque motui corporis resistitur (§. 20); consequenter frictio oritur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

941. Quo asperiores itaque sunt superficies, eo resistentia major.

SCHOLION I.

942. *Asperitas æstimanda est non modo ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque potest, ut eminentiæ*

(b) In *Miscellan. Berolinens.* p. 312, 313.

aliæ minori vi abradantur, vel deprimantur; aliæ autem nonnisi majori vincantur.

COROLLARIUM II.

943. Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.

SCHOLION II.

944. *Id ipsum Experientia clarissime loquitur.*

COROLLARIUM III.

945. Superficies adeo partium in Machinis, quæ se mutuo tangunt, quantum fieri potest, poliri debent.

COROLLARIUM IV.

946. Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri potest, ut omnis asperitas tollatur, microscopiis testibus, consultum est [quod & dudum in praxi receptum] ut partes se mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA CCIV.

947. *Dum pondus corporis incedentis superficiem ejus ad superficiem per quam inceditur apprimat, frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis superficiem ejus apprimat ad superficiem per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius descendunt, adeoque majori vi inde rursus attolluntur (§. 265), vel etiam deprimuntur, aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obstacula vincenda, quam si non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appressio ex pondere superincedentis augeat resistentiam superficiem,

fíciei, per quam inceditur (§. 20), hoc est, frictio augetur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

948. Crescente adeo pondere corporis incedentis aut insistentis, frictio crescit.

SCHOLIUM.

949. *Hinc Libra exiguis ponderibus onusta exigua vi ab æquilibrio dimovetur ; pluribus autem onusta, majori vix dimovetur.*

THEOREMA CCV.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam incedit fuerit obliqua ; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam inceditur obliqua ; vis qua movetur versus superficiem per quam inceditur nititur ; adeoque perinde est, ac si superficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appressio ex pondere incedentis frictionem intendit (§. 947). Ergo eadem intenditur, si linea directionis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

951. Quoniam ictus perpendicularis est ad obliquum, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 552) : sinus autem anguli majoris major est, minoris contra minor (§. 2 Trigon.) ; nisus corporis superincedentis in superficiem per quam inceditur ; consequenter frictio major est, quo propius ad perpendicularum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLIUM.

952. *Hæc denuo Experientia valde consona sunt & præcipue in dentibus rotarum observantur, ut sæpiissime hac de causa prorsus frangantur.*

COROLLARIUM II.

953. Tollitur adeo hæc frictio, si linea directionis corporis incedentis fuerit parallela superficiem per quam inceditur : tum enim nisus superincedentis in eam nullus est.

THEOREMA CCVI.

954. *Si superincessus volvens, longe minor est frictio, quam si radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata AB, & super ea incedat rota DE, cujus dentes sint ad peripheriam normales. Quodsi superincessus fuerit radens ; dens F qui regulam tangit lineam rectam in superficie regulæ describere debet (§. 936). Cum adeo ipsi resistat dens regulæ H, progredi omnino nequit, nisi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorsus abradatur. Idem ergo cum contingat, si corporis cujuscunque alterius asperi super superficie aspera incedentis superincessus radens fuerit ; frictio omnis locum habet, quæ ab asperitate superficiem oriri potest. Enimvero si rota ED super regula provolvatur ; tum dens regulæ H incessui ejus non amplius resistit, nisi quatenus ex cavitate F supra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, si corpus quodcunque asperum super aspera superficie volvitur ; frictio minor est si superincessus volvens, quam si radens extiterit. *Q. e. d.*

Tab.
IX.
Fig.
107.

COROLLARIUM I.

955. Ne igitur in Machinis frictio magnam vis motricis partem absumat; cum cura dispiciendum est, ut, quantum fieri potest, nulla pars Machinæ alteram radat, quin potius una super altera volvatur.

COROLLARIUM II.

Tab. IX. Fig. 108. 956. Hinc consultum est, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri solet) matrici concavæ, sed rotulis A, B, C, D circa axiculos versatilibus imponantur.

SCHOLION I.

957. Suasit hoc dudum Paulus CASATIUS (a), & Experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodsi metuas, ne axiculus cylindri satis tuto duobus rotulis A & B incumbat, tertiam addere licet.

SCHOLION II.

958. Hinc etiam, si Trochlea circa centrum mobilis; tractioni minus resistitur quam si eadem fixa foret. Eadem est ratio, cur rotæ Currum circa axem versatiles sint.

SCHOLION III.

959. Patet quoque ratio, cur Trachæ difficillime trahantur in plateis lapidibus stratis; facillime autem, si nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.

SCHOLION IV.

960. Ex eodem fonte Olaus ROEMERUS, cum Parisiis commoraretur, quamvis non sine subsidio Geometriæ sublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem esse debere: id quod post eum quoque ostendit Philippus DE LA HIRE (b); sed, quod dolendum, hæcenus in praxin recepta non est.

(a) *Mechanicorum* Lib. 2. c. 1. p. 130.

(b) *Mémoires de Mathématique & de Physique*, p. 51. & seqq.

COROLLARIUM III.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum versatiles volvuntur, dum in superficie corporis alterius incedunt; earum ope superincessus radens in volventem transmutari potest, quotiescunque datur.

SCHOLION V.

962. Ita in Machinis, quæ serrarum reciprocatione ligna secant, rectanguli lignei, cui serræ inseruntur, latera istiusmodi rotulis instrui deberent. Minuta enim frictione, plures serræ una secare possent. Similiter brachia pistillorum attollendorum CD rotulis instruere juvat, ut super pinnulis curvis EF axis B sine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam assignat Cl. DE LA HIRE (c).

Tab. X. Fig. 109.

COROLLARIUM IV.

963. Et quia axes curvati superincessum plane tollunt (§. 884); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.

Tab. VII. Fig. 85. 86.

SCHOLION VI.

964. Equidem nec hic cessat frictio in E & G. Enimvero ea perexigua est, si compareretur cum frictione, quæ ex superincessu rotarum oriri solet.

SCHOLION VII.

965. Equidem AMONTONS regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam requisitam (d): sed cum omnem frictionem a sola appressione ex pondere superincedentis derivet; ex antecedentibus satis apparet, quod proposito satisfacere nequeat.

CAPUT

(c) Loc. cit. p. 72. & seqq.

(d) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, A. 1699, p. 260. & seqq. edit. Bat.

C A P U T XVIII.

De Machinis Compositis.

DEFINITIO XCIX.

966. **M**achina composita est, quæ ex pluribus simplicibus tanquam partibus constat.

SCHOLION.

967. *Machinarum compositarum nullus est numerus. Construuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in usum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a Machinis perfici possunt, ad quæ idem semper motus, vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua saxi molaris opus est: unde hæc opera Machinis demandatur. Similiter ad contusionem granorum ex quibus oleum exprimitur, pistillorum elevatione continuo iteranda opus est: hinc a Machinis contusio ista perficitur. Ut arbor prostrata in asseres dissecetur, continua ferrarum reciprocatione opus est. Quare denuo Machinarum vires ad hunc usum transferuntur. Nostrum equidem non est, Theatrum quoddam Machinarum in præsentia aperire; sed ut compositionis earundem quandam ideam animo comprehendant Tyrones, unum saltem alterumque exemplum in medium asseremus; additis regulis quibusdam generalibus, quibus de Machinis inveniendis solliciti juvantur.*

PROBLEMA CLIV.

968. *Dato opere perficiendo, Machinam componere.*

RESOLUTIO.

I. Ante omnia opus est, ut operis perficiendi notionem distinctam, & quantum licet, adæquatam habeamus:

ad quam quomodo perveniamus, ex Commentatione de Methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi distinctius explicavi (a). Scilicet singula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione distinguí possunt, tum sigillatim expendenda, tum inter se conferenda.

2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus sit ad id præstandum, quod requiritur: qui est effectus a Machina producendus.
3. Ex eadem quoque constabit quantitas virium ad resistantiam in motu superandam requisitarum: ubi
4. Inprimis consideranda est frictio ex superinceffu mobilis oriunda, & de remediis mechanicis Capite superiori expositis deliberandum.
5. Antequam vero consilium ineatur, quibusnam Machinis simplicibus combinatis motus desideratus produci queat; de potentia Machinam agitatura cogitandum est, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque Machinæ structura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad Machinam applicanda: externa ejus structura statim constabit ex Capite decimo quarto.

6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expensa, vi Capitis undecimi non difficulter determinan-

H h 2

tur

(a) In *Philos. ration. seu Logica* §. 678.

tur Machinæ simplices in composita combinandæ.

Tab.X. E. gr. Sit construenda Machina, qua onus
Fig. ingens O in altum attolli possit, & quæ
110. commode de loco in locum transferri
queat. Cum onus attollendum sit corpus
grave; statim apparet lineam directionis
esse ad horizontem perpendicularem. Ta-
lis ergo construenda est Machina, quæ
pondus sursum trahat secundum lineam
directionis ad horizontem perpendicula-
rem. Quoniam vero pondus oneris non
determinatur, sed saltem ingens supponi-
tur; Machinam construere sufficit, qua ho-
mo pondus aliquod viribus suis longe su-
perius elevare possit, tempore tamen non
nimis longo. Et quia Machina compen-
diosa esse debet, ut commode huc illucque
transferri possit; moveri optime poterit
versando, adeoque axe incurvato ABC in-
struenda (§. 875). Enimvero ut pondus in-
gens moveri possit, axis curvatus solus non
sufficit, sed cum rota dentata GF axi ho-
rizontali GH infixa combinandus. Denique
ut funis pondus sursum trahens circa cy-
lindrum inferiore loco constitutum circum-
volvi queat, supra trochleis I & K ad axem
GH adducendus. Constat ergo Machina
ex axe GH cum rota stellata GF, & axe
dentato LC, atque incurvato CBA duabus-
que trochleis I & K. Trochleæ ad virium
incrementum nil conferunt, sed sola rota
FG & axis incurvatus CBA. Est nimirum
seposita frictione potentia sustentans ad
pondus, in ratione composita radii axis
dentati LC ad BC, & radii axis GH ad se-
midiametrum rotæ F (§. 812).

PROBLEMA CLV.

969. *Machinam construere, qua in-
gens admodum pondus ad altitudinem
mediocrem attolli potest.*

RESOLUTIO.

Tab.X. 1. Erigatur vectis AB, cujus centrum
Fig. C, & in D infigatur uncus, cui onus
111. attollendum G alligari possit.
n. 1.

2. Alteri vectis extremo B affigatur an- Tab.X.
nulus E, qui cochleæ fœminæ F seu Fig.
matrici afferruminetur. 111.

3. Matrici inseratur cochlea HI, quæ
Ergatæ IL circa axem suum in L
mobili firmiter insistat. n. 1.

Quodsi enim mediantibus scythalis M,
N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI
circumagitur; matrix EF descendit &
vectem AB deprimit, consequenter
pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pon-
dus admodum ingens attolli possit, pa-
tet ex Theor. 178 (§. 765) & Theor.
198 (§. 847). Est nimirum potentia
ad pondus in ratione composita AC ad
CB, si AB fuerit horizontalis, & di-
stantiæ duarum helicum in cochlea ad
peripheriam scythala descriptam. Sit ex-
gr. distantia helicum $3'''$, longitudo scy-
thalæ $3'$, erit peripheria, quæ eadem de-
scribitur $942'''$, adeoque potentia in N
est ad resistantiam in E ut 3 ad 942,
hoc est, ut 1 ad 314. Sit jam AC:CB
= 1:3; erit ergo resistantia in E
 $\frac{1}{3}$ ponderis G, consequenter potentia ad
scythalam N applicata $\frac{1}{942}$ ponderis.
Quodsi singulis scythalis singulæ poten-
tiæ applicentur; erit una earundem
 $\frac{1}{3768}$ ponderis.

COROLLARIUM.

970. Si cochlea cum Ergata remota fu-
nis ET alligetur in B, pondus G simili-
ter cum virium compendio, attolletur,
quamvis multo minore (§. 765).

SCHOLION.

971. *Machina posteriore utuntur ad one-
ra ex Navi una in alteram contiguam trans-
ponenda.*

PROBLE-

PROBLEMA CLVI.

972. *Molam acuminariam construere, hoc est, Machinam qua instrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.*

RESOLUTIO.

Tab. X. 1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculum F instructo infigantur ad acuendum.

Fig. III. n. 2.

2. Axi alteri EG infigantur duo orbes lignei H & I, super quorum primo H arena politura inchoatur, super altero vero I smyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio superinducti, super quibus smyridis pulvere subtiliori politura perficitur.

3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena instructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere possit.

4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota stellata N, quæ communem cum rota molari PQ, ex. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverso aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus instruitur, ut motus cotium sit satis celer.

5. Denique cum cotes continuo madidæ esse debeant; ad rotam molarem applicanda sunt duo haustra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z, in cotes delabentem.

SCHOLIUM.

973. *Solent quoque molæ unice ad poliendum construui, tumque orbes axi GE infixi*

aptantur ad primarium DC, ipsi vero GE, alii minores inseruntur.

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas sufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris infigere licet.

PROBLEMA CLVII.

975. *Molam frumentariam ab aqua agitandam construere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur rota molaris sive di-Tab. X. recta, sive retrograda, prout casus Fig. tulerit, nunc major, nunc minor, 112. prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit ex. gr. rota retrograda AB 18 pedum, eaque 33 palmulis instructa.

2. Eiusdem axi infigatur rota DE, cuius diameter illius subdupla, vel etiam major, pro diversa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in nostro casu numero 48, in plano gerat.

3. Per curriculum FI, 6, 7, 8, immo 9 bacillis instruendum, pro diversa celeritate, qua rota molaris movetur, virga transeat ferrea, cuius capiti pyramidem fere truncatam figura sua referenti incumbat meta (seu lapis molaris superior), catinum (seu lapidem inferiorem) fixum 4 fere digitis circumcirca superans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli possit.

4. Ex scala suspendatur infundibulum p q, mediante Axe in Peritrochio s t, pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

Hh 3

5. Ba-

Tab.X. 5. Bacillus propendeat in foramen me-
Fig. tæ annulo ferreo cum unco M mu-
112. nitum, quo illum propellens infun-
dibulum agitet, ut frumentum in
lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere infistat capsa H
pyramidem truncatam referens &
tam superius, quam inferius aperta,
cui frumentum indatur.

7. Lapides cingantur cista cylindrica,
spatio inter eam & metam nonnisi
duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope conta-
ctum metæ atque catini foramine
pertundatur, ut per id frumentum
contritum in facculum tremulum ex
peculiari linteo (nostrates *Beuteltuch*
appellant) confectum devolvatur, &
farina furfure separetur.

9. Sacci, cujus latera loris affuta, ex-
tremis vero P & Q annuli ferrei in-
futi sunt, longitudo in tres partes
æquales dividatur & in fine partis
tertiæ affuantur annuli coriacei *a* & *b*,
qui infigantur bacillis ad cylindrum
cd circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forci-
pula *ef*, intra quam ope clavi lignei
firmetur regula *hf* alteri *ik*, cylin-
drulo *lm* circa axem suum versatili
infixæ, in *i* incumbens.

11. Curriculo FI sub angulo obliquo
infigantur tres bacilli æqualiter a se
invicem distantes, qui regulam *ki*
impellentes alteram *hf* protrudunt
& sic faccum attollunt, mox iterum
relapsurum, regula *ik* in situm pri-
stinum recidente.

12. Quodsi aquæ impetus tantus fue-
rit, ut molam duplicem circumagere
possit; axi rotæ molaris infigitur ro-
ta stellata LM, quæ duas rotas radia-
tas NO ab utroque latere adjacentes
impellit, quarum saltem unam ab uno
latere in schemate exprimere libuit:
reliqua omnia sunt ut ante. Ratio
diametri rotæ LM ad diametrum ro-
tæ molaris AB sit ut 1 ad 2, ad diame-
trum vero radiatæ ut 3 ad 2: quam-
vis eidem stricte inhærendum non sit,
si aliæ circumstantiæ aliam sua-
deant.

SCHOLIION I.

976. Rotarum dimensiones dentiumque
numeri variant, pro varietate impetus aquæ
in rotam molarem impingentis, quæ partim
ab ejus sectione, partim a declivitate per
quam ad illam delabitur, pendet. Constat
vero ex superioribus (§. 792), rotas fieri
debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis;
minores vero, ubi hæc major. BOECKLERUS
(a) diametrum rotæ vel solo impetu fluminis
sine declivitate in præcipitium mutata, vel
ab exigua copia aquæ per declivem delapsa agi-
tanda fieri præcipit 48 pedum, numerum
palmularum 86; diametrum rotæ stellatæ LM
18 pedum, numerum dentium 180, numerum
bacillorum in rota DE 60. CASATUS (b) Tab.
annotat in Pado communiter longitudinem ro-
tæ molaris AB esse cubitorum 10, diametrum
totam cubitorum 6, inferiorem rotam DE XI.
diametrum habere cubitorum $5\frac{1}{2}$, dentes 108 Fig.
plano infixos, & curriculum FI in fusos 9 distin-
gui; lapidem molarem in crassitudine nume-
rare uncias 6 aut 7, in diametro cubitos $2\frac{1}{2}$.
Franciscus Philippus FLORINUS (c) 113.
rotæ retro.

(a) In der Haus- und Feld-Schule part. 3. Class. 6.
p. 500. & 501.

(b) Mechan. lib. 5. c. 7. p. 560.

(c) Im klugen Haus-Vater lib. 2. c. 42. f. 308. & seq.

Tab. retrogradæ ab aqua rivuli 4 vel 5 pedum de-
 XI. clivitatis agitandæ diametrum constituit 18
 Fig. pedum, numerum palmularum 30 vel 36, la-
 113. titudinem palmularum 10 vel 14 digitorum,
 altitudinem unius pedis. Rotæ dentatæ DE
 dentes assignat 72, curriculo bacillos 6, 8
 vel 9, prout rota externa vel tardius, vel
 celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum
 alluente, rotarum retrogradarum molam du-
 plicem circumagentium altitudo non excedit
 16 pedes.

COROLLARIUM.

977. Quodsi situs rotæ verticalis LM
 mutetur in horizontalem & dentes in plano
 infigantur; rotæ vero molari substituitur
 vectis veluti in Ergata, reliquis omnibus
 manentibus ut ante: Molendinum habe-
 bimus manuarium, a duobus hominibus
 in loco superiore deambulantibus com-
 mode agitandum. Est vero longitudo
 vectis ex una parte 8 pedum, ex altera to-
 tidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter
 $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2
 digitorum, numerus dentium in priore
 72, in posteriore 40, numerus bacillorum
 in curriculo 6.

SCHOLION II.

978. Multis adhuc modis aliis molæ ma-
 nuariae construi possunt. Eminent vero inter
 eas quoddam genus, quod vi exigua moveri
 potest, superincessu rotarum penitus sublato:
 Id igitur ut describatur, e re nostra judi-
 camus.

PROBLEMA CLVIII.

979. Molam manuariam construere.

RESOLUTIO.

Tab. 1. Construantur duæ rotæ AB & CD,
 XI. quarum diameter 5 vel 6 pedum, &
 Fig. inferior ad conservandum impetum
 114. plumbo infuso oneretur.
 2. Per centrum utriusque defigatur
 axis incurvatus HG per vectes IK &

IL convertendus, ut supra docui-
 mus (§. 884).

3. In rotæ superioris AB ambitu cana-
 liculus excavatur, ut funis ceratus
 commodè circumduci queat: qui
 idem
 4. circumducendus circa peripheriam
 alterius rotulæ minoris MN infixi
 virgæ ferreæ PQ, cui eidem
 5. infigatur crux ex brachiis ferreis
 constans RSTV, quibus singulis affi-
 xum est pondus plumbeum, ad im-
 petum conservandum.
 6. Reliqua fiant, ut in Problemate
 præcedente (§. 975).

SCHOLION.

980. Axiculi rotarum ferrei sustentaculo
 orichalceo incumbere debent, quod & affri-
 ctum minuit, & ad durabilitatem conducit.
 In omni autem Molarum genere, sustentaculum
 virgæ ferreæ cui lapis molaris incumbit ita
 construendum, ut ad arbitrium attolli ac de-
 primi possit, prout usus postulaverit. Major
 enim lapidum distantia requiritur, si grana
 integra conterenda, quam si jam contrita in
 farinam convertenda.

PROBLEMA CLIX.

981. Molam jumentariam construere. Tab.

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN,
 cujus diameter 14 digitorum, cum
 temone GH quatuor virgis ferreis ad
 rotam firmando. Immo temo gemi-
 nari potest.
 2. Circa eundem cylindrum construa-
 tur rota stellata IK, cujus diameter
 $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transversis
 (quale IL) quorum latitudo 7, crassi-
 ties 2 digitorum, connectenda, & ad-
 huc

Fig. 82.

Tab. VII. Fig. 82. huc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & crassities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe sicco parati ita infigendi, ut axes eorundem distent $4\frac{1}{2}$ digitis.
4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fusorum seu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.
5. Reliqua fiant ut in Probl. 157 (§. 975).

Aliter.

Tab. XI. Fig. 113. Quodsi rota adeo ingens non commoda visa fuerit, construere licet minorem, cujus diameter nonnisi 7 pedum, $1\frac{1}{2}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut superius (§. 975) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{2}$ digitorum, numerus bacillorum 16. Cum eadem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens, & curriculum FE 6 fusis instructum circumagens. In rota priore crassities dentis 2, in posteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

PROBLEMA CLX.

982. *Molam allatam construere.*

RESOLUTIO.

Structuram externam docuimus supra (§. 929). Interna constat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis quæ ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota dentata est 72, vel 80; numerus fusorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala est pedum 30 vel 32.

PROBLEMA CLXI.

983. *Molam oleariam construere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita construenda, ut Tab. XI. Fig. 115. tum materiam contundere, tum ex contusa atque tosta oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præstetur,

1. Axi rotæ molaris infigatur rota stellata AB, quæ circumagat
2. rotam radiatam AE axi EF insertam, cui hinc inde pinnulæ G infiguntur pistilla HI attollentes.
3. Pistillorum bases, itemque fundi vasorum K in trunco LM excavatorum, lamina ferrea obducantur, ut semina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, pistillis proprio pondere relabentibus.
4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum basis inferior sit perforata, ut oleum expressum inde in vasa subjecta distillare possit. Intra ea reponitur materia contusa & in aheno super igne tosta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemisphærium cavum, in altera convexum, comprehensa. A parte postica intruditur cuneus acie sua prominens in H & ab antica infigitur alius N.
5. Ut cuneus alter N vi adigi, sicque oleum exprimi possit, malleus P cum vecte PQ cylindro RS circa axem suum mobili affigatur, mediante ligno transverso TV ad cuneum dirigendus.

6. Ad

Tab. 6. Ad eundem cylindrum RS, in op-
XI. posito latere, aptetur forceps *ab*, in-
Fig. tra quem continetur contus *bd* cum
115. pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro
EF infixa deprimitur & malleum P
attollit, proprio pondere cum impe-
tu in cuneum N mox relabentem.

COROLLARIUM I.

984. Quoniam rota radiata AE cum
stellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus
EF celerius circumagatur; si aquæ suffi-
ciens copia atque declivitas, vel numerus
pistillorum exiguus fuerit: ipsi cylindro
EF rota molaris ab aqua agitanda infigi
potest. Et tales sunt molæ metallicæ,
quæ malleis ferreis 57 librarum pistillis
12 pedum affixis materiam metallicam
crudam comminuunt.

COROLLARIUM II.

985. Si vis aquæ sufficiens adfuerit,
duo cylindri pinnulis suis pistilla elevan-
tes a rota stellata circumagi solent.

COROLLARIUM III.

986. Et quia perinde est, quæcunque
materia contundatur; eadem manet stru-
ctura si mola construatur, ad materiam
pulveris pyrii contundendam. Sint ex. gr.
pistilla 16 in duas series distributa: rotæ
molaris ab aqua convertendæ altitudo erit
18 pedum, numerus palmularum 48, qua-
rum latitudo 2 pedum, altitudo unius;
diameter rotæ AB 7' 3", numerus dentium
60; longitudo cylindri EF 15' 10", dia-
meter 14"; diameter rotæ radiatæ 3' 2",
numerus fusorum 24; integra pistilli alti-
tudo 9' 2", crassities & latitudo 4". Sed
si rota externa calcando movetur (§. 886),
diameter ejus esse potest 16 pedum, rotæ
stellatæ AB 5 $\frac{1}{2}$, numerus dentium 60, nu-
merus fusorum in rota radiata 20; longi-
tudo cylindri EF 16 pedum, numerus
pistillorum 9.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

SCHOLION I.

987. Structura molarum chartariarum ea-
dem est, quam in Corollario primo (§. 984)
exposuimus, nisi quod tudiculæ AB, ferro ob-
ductæ in B, velti homodromo DC circa bacu-
lum EF mobilem ad angulos rectos insigantur,
a pinnulis axi rotæ molaris infixis in C im-
pellendo, & per canalem; vel ope antliæ, vel
ope haustorum ad rotam molarem applica-
torum, aqua continuo in linamenta contun-
denda deduci debeat.

SCHOLION II.

988. Cum structura molæ oleariæ prorsus
convenit structura trituratoria, quæ anno
1700. Erzæ in ditione Electorali Bruns-
wicensi inventa & cum insigni fructu ad fru-
menta straminibus ejicienda adhibetur, nisi
quod peculiari artificio opus sit ad flagella
dextre applicanda & rota verticalis adda-
tur. Describitur in Miscellaneis Berolinen-
sibus (a).

PROBLEMA CLXII.

989. Machinam construere, quæ ma-
teriam pulveris pyrii sine pistillis con-
terat.

RESOLUTIO.

1. Rota dentata AB communem axem
cum aquaria habens impellat radia-
tam CD, ad cujus axem
2. aptentur duo cylindri plumbei la-
mina orichalcea obducti, aut (quod
melius judicatur) marmorei DE quo-
rum diameter 6, 7, vel 8 pedum,
crassities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacti, vel
in vase cylindrico orichalceo, si
plumbei fuerint, vel super saxo
marmoreo ad profunditatem duo-
rum digitorum excavato, si marmo-
rei fuerint, incedant.

1 i

SCHO-

(a) pag. 325.

Tab.
XI.
Fig.
116.

Tab.
XI.
Fig.
117.

SCHOLION I.

990. Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina construitur, quia ex hac materia per frictionem nulla scintillula elicuntur, unde non sine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere solet.

SCHOLION II.

991. Caterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.

PROBLEMA CLXIII.

992. Molam ferrariam construere.

RESOLUTIO.

Tab. XII. Fig. 118. In molis ferrariis duplex motus considerandus, quorum altero ferra reciprocatur, altero vero lignum ad ferram continuo promovetur. Ad motum ferrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota stellata AB, cujus diameter sine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. incedat super rota radiata CD 12 vel 8 (pro diversa vi aquarum) bacillis instructa, & communem axem habente cum rota verticillari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.
3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum ferra HL, intra duas pilas ita constricta, ut non nisi sursum protrudi ac deorsum trahi possit.
4. Ad motum ligni efficiendum construendus est currus *abcd*, cujus longitudo longitudini ligni secandi proportionata, e. gr. 18 pedibus

major, latus vero alterum dentibus instructum. Tab. XII. Fig. 118.

5. Ut ergo lignum, uncis ferreis ad currum firmatum, ad ferram continuo promoveatur, axi *gh* infigatur baculus *ik*, cujus alterum extremum *k* inditum est annulo ad tendiculam IK firmato, & prope alterum extremum forceps *m* contineat furcam *ml* usque ad dentes rotæ ferratæ *ln* extensam, cujus diameter duorum pedum.
6. Porro axi rotæ ferratæ, ferreæ infigenda est alia radiata *pq* 6 bacillis instructa, qua circumagitur rota stellata *rs*, dentes 36 & axem communem cum alia radiata *tv* habens, quæ 6 bacillis instructa currum propellit.

SCHOLION.

993. Dantur & adhuc alii modi Currum propellendi, quos repræsentat BOEKLERUS (a). Nos eum descripsimus, quo ordinarie utuntur. Caterum idem BOEKLERUS (b) molam ferrariam manuariam accurate delineat.

PROBLEMA CLXIV.

994. Horologium oscillatorium Hugenianum construere. Tab. XII. Fig. 119.

RESOLUTIO.

1. Fiant laminæ AA & BB semipedali longitudine, pollices duos & semis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inferantur.
2. Rota infima CC 80 dentibus incidatur in convexo, & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD, ex quo pondera suspendantur.

3. Rota

(a) In *Theatro Machinarum* f. 60. & seqq.

(b) In *der Haus- und Feld-Schule* Tom. I. class. 6. p. 512. & 513.

- ab. 3. Rota CC impellat tympanum E
II. dentium octo, & una rotam stella-
Fig. tam F dentium 48.
19.
4. Rota F circumagat tympanum G
dentium 8, & una rotam coronariam
H dentes 48 in plano habentem.
5. Hæc agitet tympanum I dentium
24, & rotam ferratam K dentium 15.
- ab. 6. Supra eam collocetur axis pinnatus
II. LL eique affigatur clavula S, ima
Fig. sui parte reflexa, ac foramine oblon-
20. go penduli intra duas laminas Cy-
cloidicas duplici filo suspensi virgam
ferream, cum appenso pondere
plumbeo X, complexa.
- ab. 7. A lamina AA quarta digiti parte di-
II. flet alia YY, in qua describantur
Fig. circuli horarii ex centro axis rotæ
9. infimæ CC. Interior in 12 horas, exte-
rior in 60 scrupula prima dividatur.
8. Axi rotæ C aptetur rota *bb* tubu-
lo ultra laminam YY continuato co-
hærens, ita ut una cum axe circum-
agatur, sine eodem tamen converti
possit, ubi e re fuerit.
9. In tubuli prædicti extremo *e* appli-
cetur Index horæ spatio circuitum
absoluturus, atque ita minuta hora-
ria indicaturus.
10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem
dentium, cujus axi cohæreat tympa-
num sex dentium *d*: quod tandem
11. Convertat rotam dentium 72 In-
dicem horarium minutario brevio-
rem circumferentem.
12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll*, & in
eo circulus in 60 partes æquales di-
visus describatur, qui per incisum in
lamina YY foramen minuta secunda
monstret.

13. Longitudinem penduli, ut jam su-
pra notatum est, HUGENIUS (*a*) in-
ventor experimentis factis deprehen-
dit esse partium trium, quarum una
est ad pedem Parisinum ut 864 ad
881 (§. 470).
14. Pondus perpendiculi X trilibre esse
debet; & ne occurſu aëris motus im-
pediatur, optima ejus forma est len-
ticularis. Ponderis *b*, quo horologium
moveretur, magnitudo certo definiri
nequit, sed per experientiam deter-
minanda. HUGENIUS pondere 6 li-
brarum usus est, diametro orbiculi
D unius digiti existente, longitudine
autem penduli ea, quam diximus.
15. Ceterum ne motus horologii in-
terrumpatur, dum pondus sursum
trahitur, peculiari hoc artificio sus-
pendendum, quod a laudato HUGE-
NIO repertum. Funis scilicet in se re-
diens orbiculum D amplectatur, & in-
de descendens altera sui parte troch-
leam *c* subeat, cui pondus *b* appen-
sum. Hinc super orbiculum D extrin-
secus horologio affixum ascendit, ite-
rumque ad trochleam alteram F des-
cendit, cui pondus G appensum ma-
jus *b* retinens, ne aliter quam orbi-
culo D revoluta descendat. Hic au-
tem ferratis dentibus ita aptatur, ut
tracto fune E volvatur, in partem ve-
ro contrariam revolvi nequeat.

Tab.
XII.
Fig.
119.

Tab.
XII.
Fig.
120.

SCHOLIUM.

995. *Horologia hæc oscillatoria Hugenia-
na adeo accurate construi possunt, ut tem-
pus æquale accuratius dimetiantur quam*
I i 2 *motus*

(*) In Horologio oscillatorio f. 7.

motus Solis diurnus inæqualis, ceu in Chronologicis ostendetur. Unde in Astronomia, ubi accurata temporis mensura requiritur, ingens eorum est usus. Sane Vir Cl. Philippus DE LA HIRE (a) testatur, se sapius expertum esse, quod intra octiduum a medio Solis motu vel minuto secundo non aberrent.

SCHOLION II.

996. Cum pleraque Machinæ ex ligno construuntur, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum constructionem edocere.

PROBLEMA CLXV.

Tab. 997. Rotas dentatas & radiatas
XII. ligneas construere.

Fig. RESOLUTIO.

121. 1. Orbes rotarum, quibus dentes in-
n. l. 2. figuntur, ex diversis partibus componuntur. Si dentes in plano infiguntur, aliæ partes sunt segmenta circuli A, aliæ segmenta annulorum circularium B. Posteriores ita superimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B, & contra juncturæ C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transversis FF firmantur. Quod si dentes in convexo infigendi, partes in utroque plano sunt segmenta annularia B.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum existunt, in tot partes æquales divisa, quot dentes rota habere debet; intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, quales 7 tribuuntur denti, 9

(a) In Epistola Tabulis Astronomicis, præmissa.

vero interstitio inter binos relinquuntur, quarum 8 cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes æquales, quarum 3 spissitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ spissitudini seu diametro bacilli tribuuntur.

3. Idem intervallum dividitur in 3 partes æquales, & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{3}{4}$ faciunt.

4. Anguli dentium secundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati refecantur; ut superincessus super bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes infiguntur, esse debent quadrata, & axiculi ferrei in centris rotarum exacte constituendi, eo meliores quo minores, quia minorum minor est frictio: eadem de causa imponendi concavo orichalceo, aut saltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, nisi bacilli exigui fuerint longitudinis, & si numerus bacillorum exiguus & resistentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri consuevit.

SCHOLION I.

998. Distantia dentium in rotis, quarum usus in Molendinis est, intra spatium 4 & 5 digitorum fere continetur.

SCHOLION II.

999. Rotæ horologiorum metallica accuratam imprimis exigunt divisionem; ad quam absolvendam peculiaribus instrumentis opus est a LEUPOLDO (b) descriptis.

(b) In Theatro Machinarum generali c. 5. §. 93. 94.

Fig. Mechan. Tab. I.

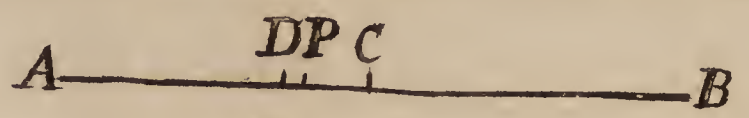
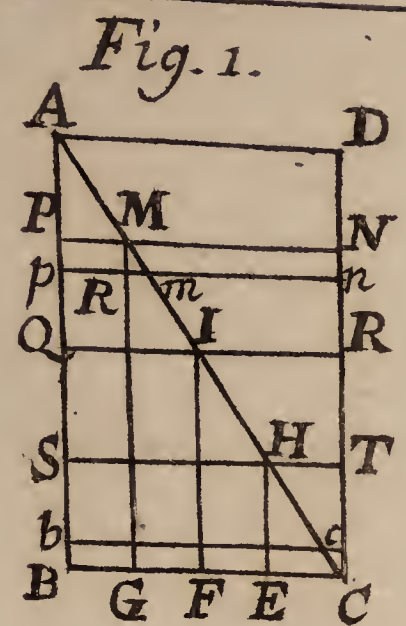


Fig. 2.

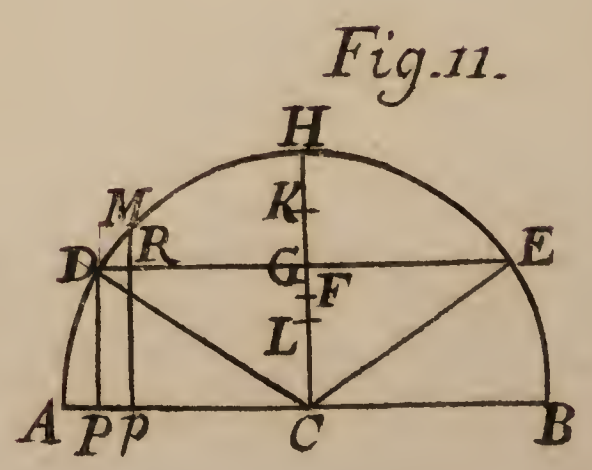
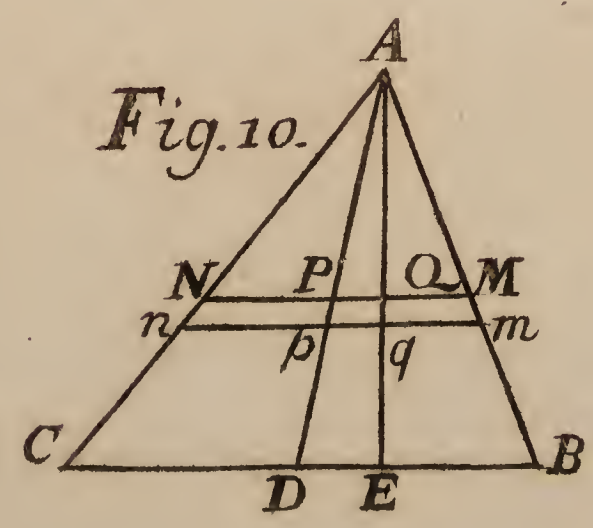
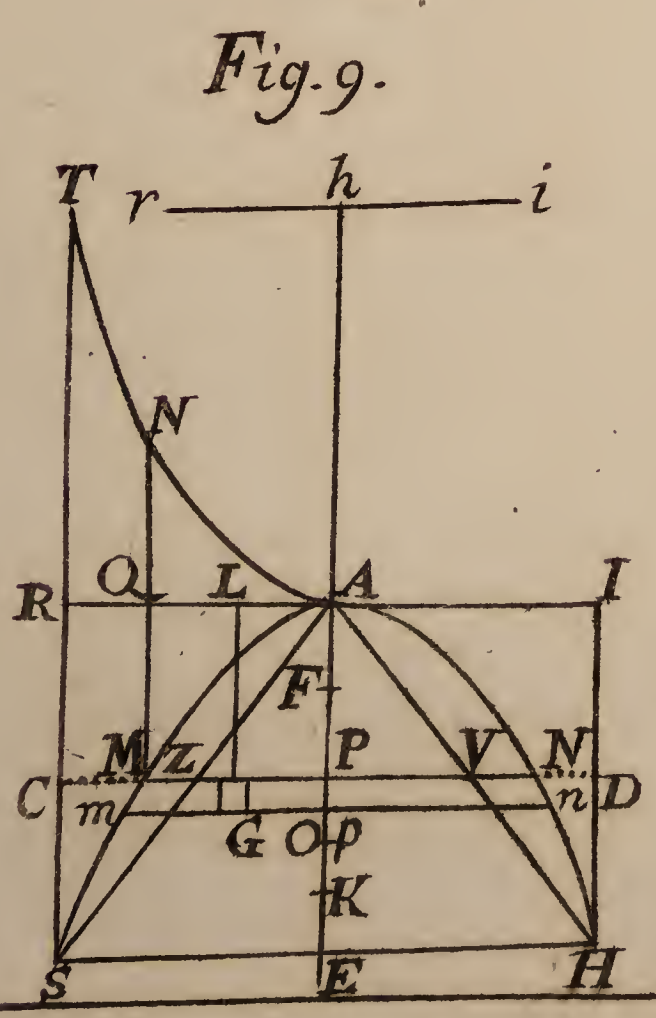
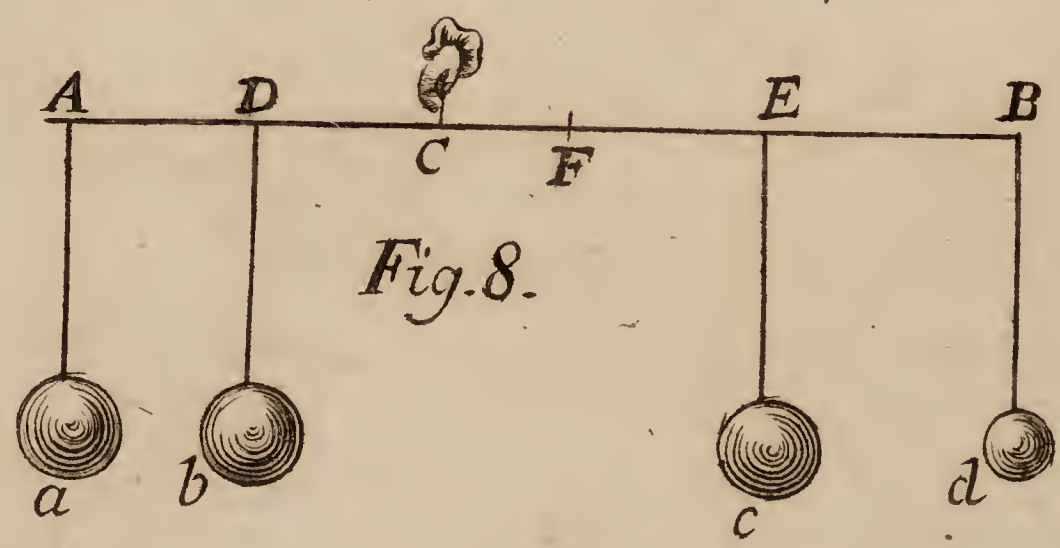
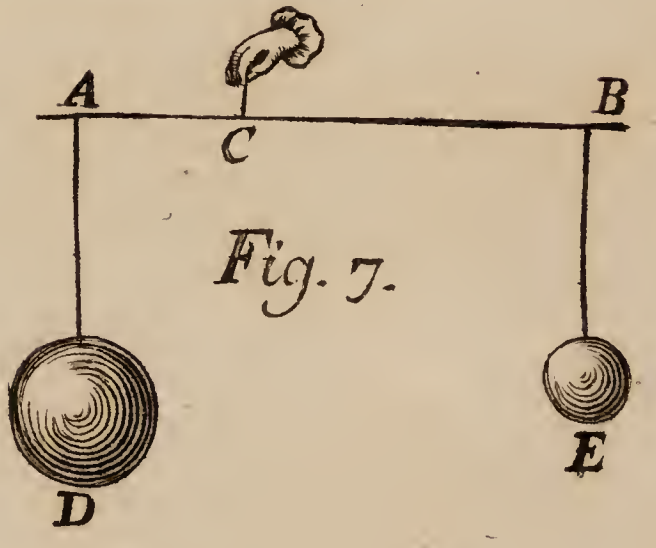
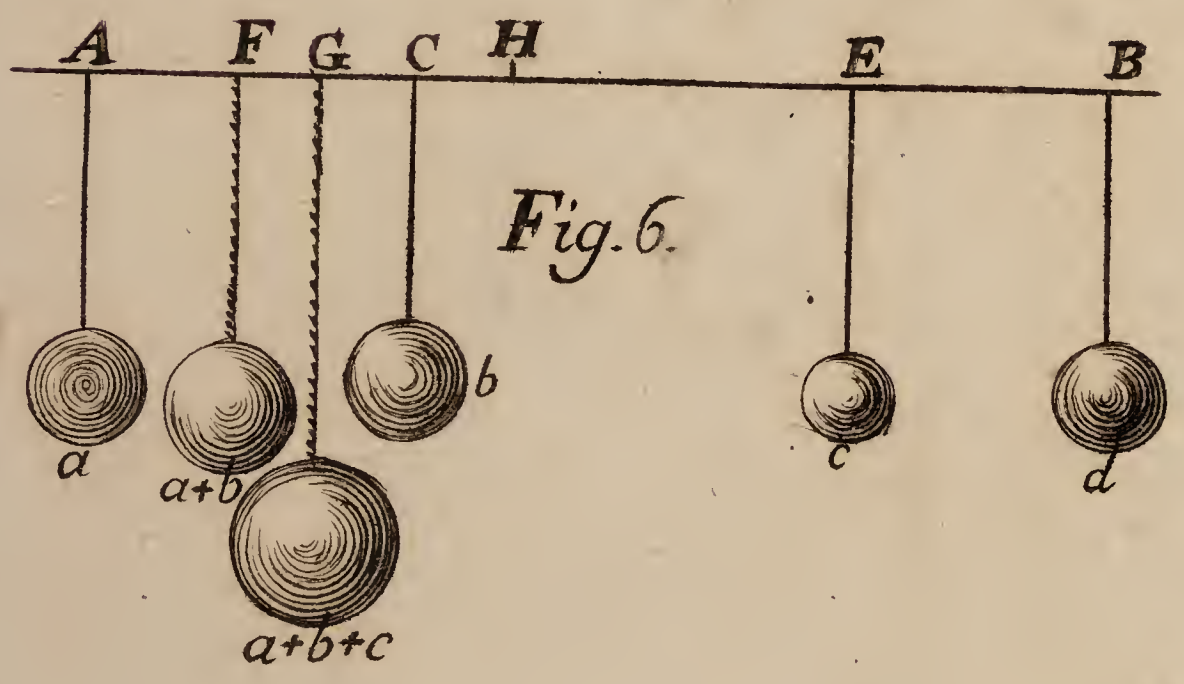
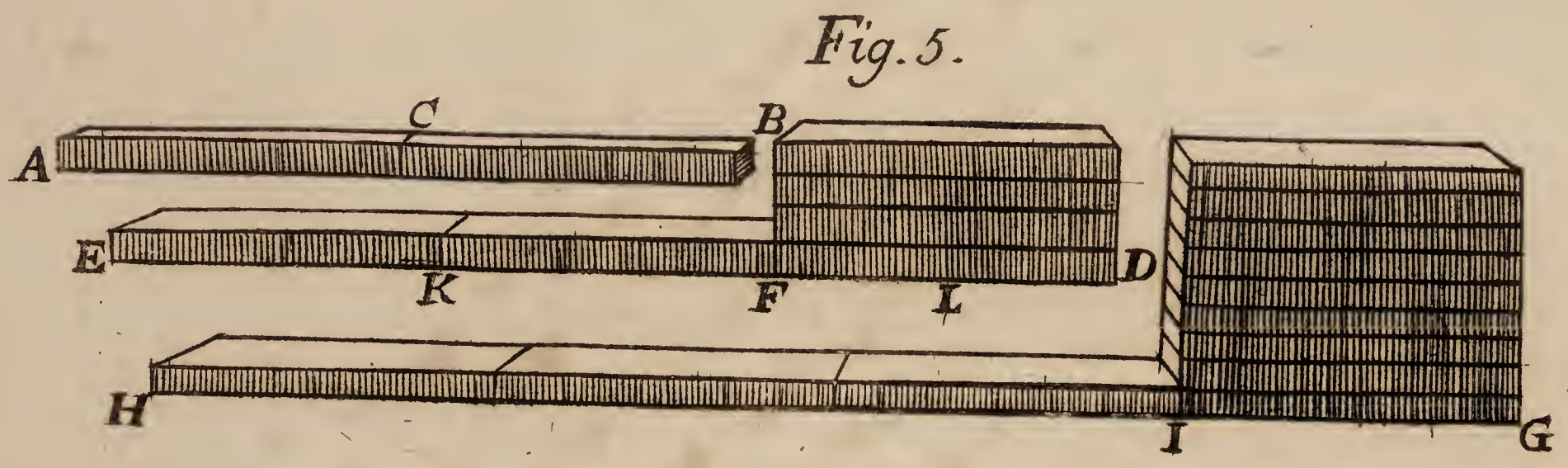
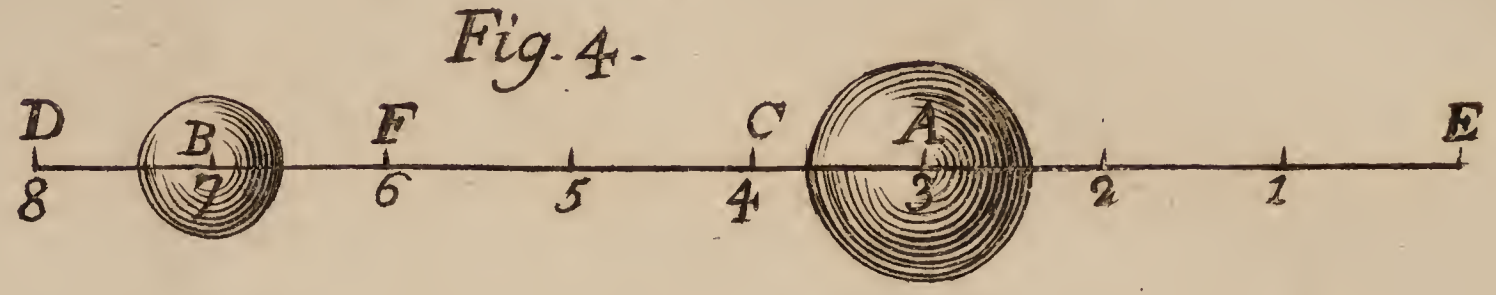
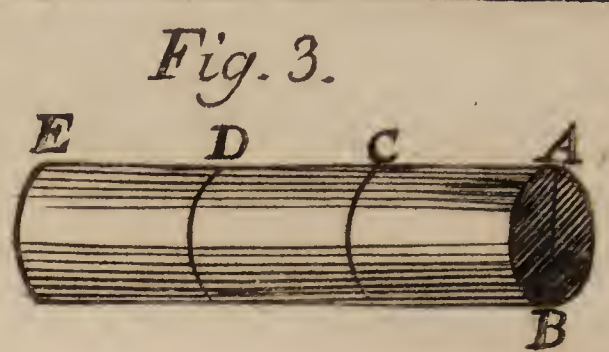


Fig. Mechan. Tab. II.

Fig. 12.

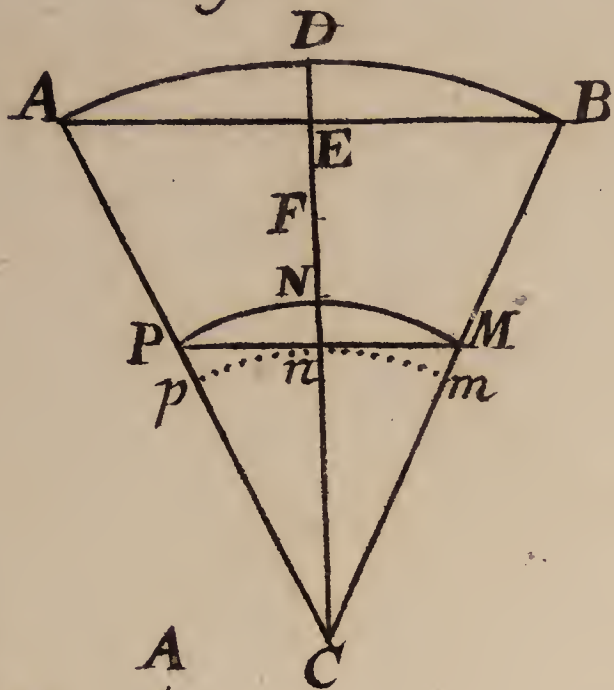


Fig. 13.

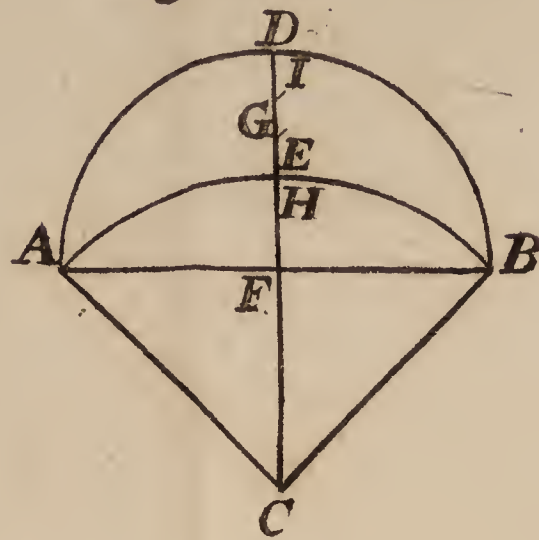


Fig. 14.

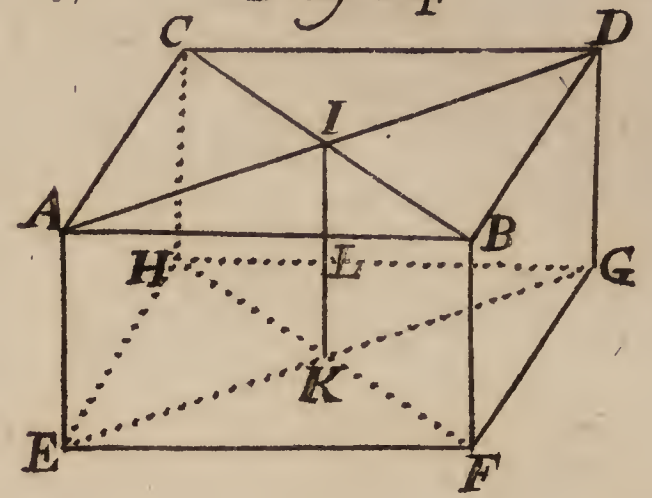


Fig. 16.

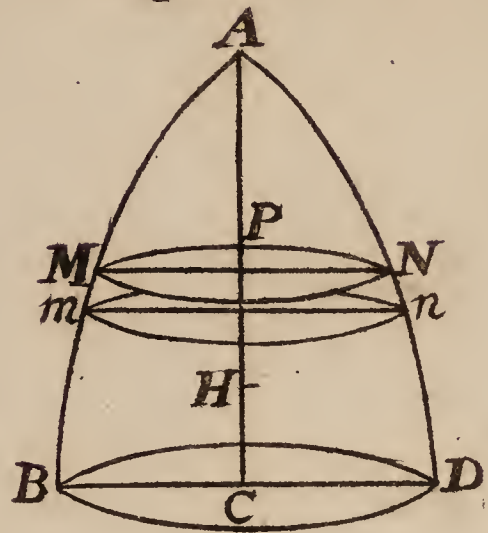


Fig. 17.

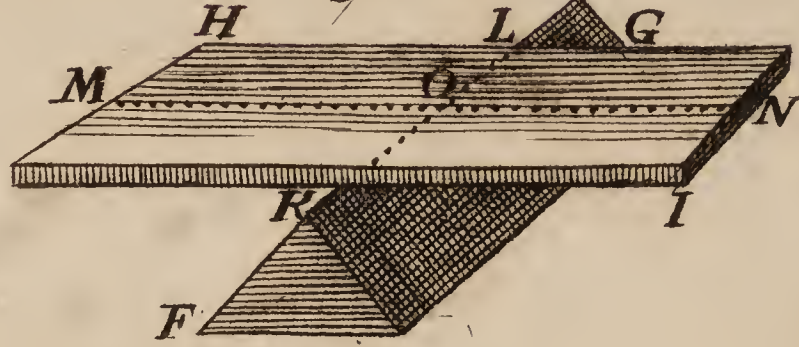


Fig. 15.

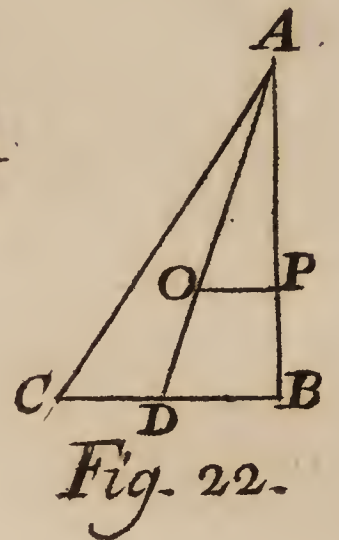
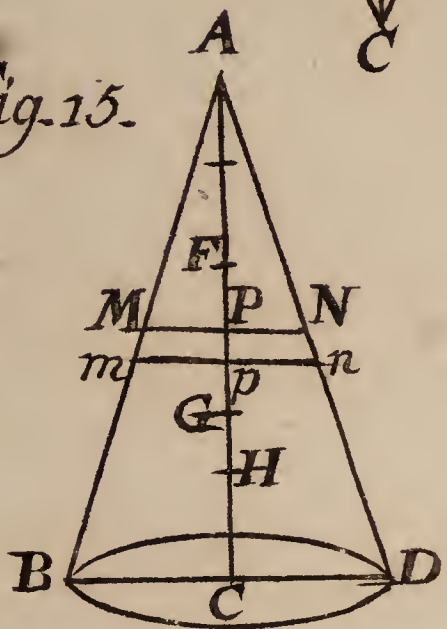


Fig. 25.

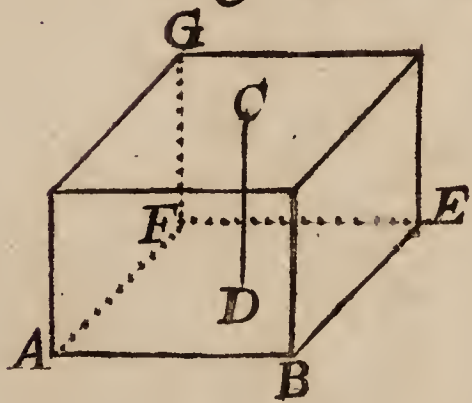


Fig. 18.

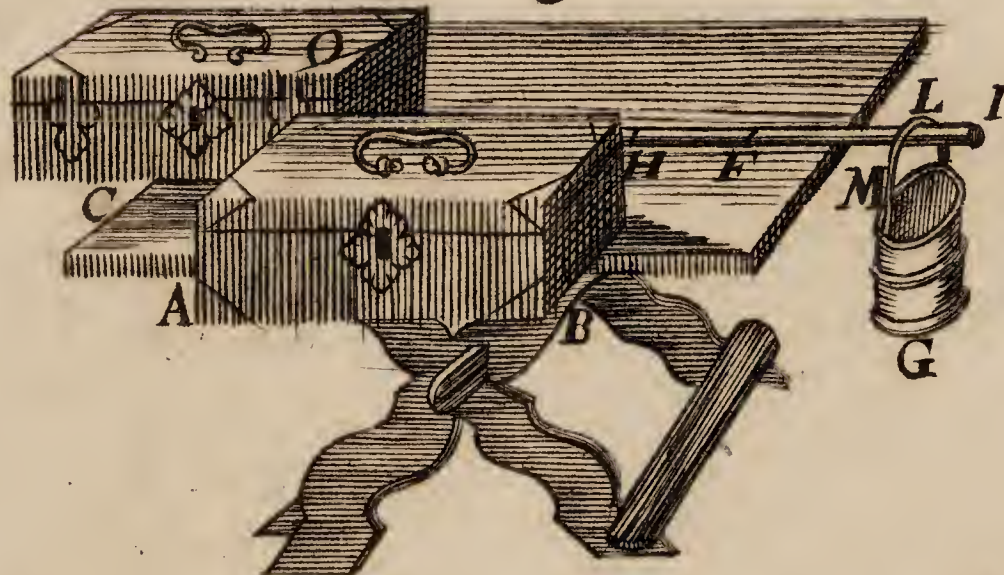


Fig. 23.

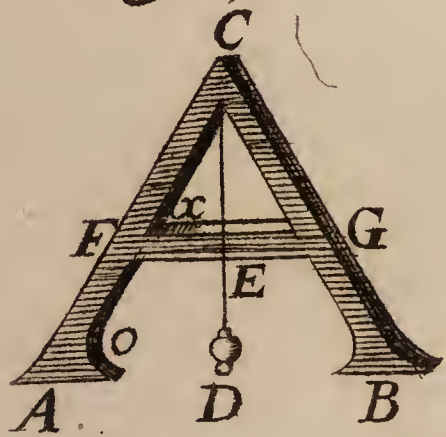


Fig. 19.

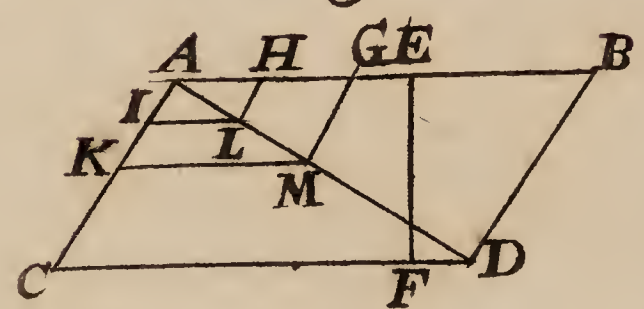


Fig. 24.

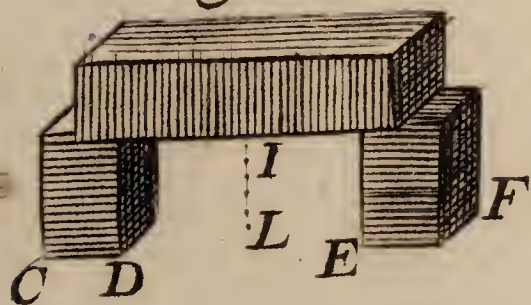


Fig. 20.

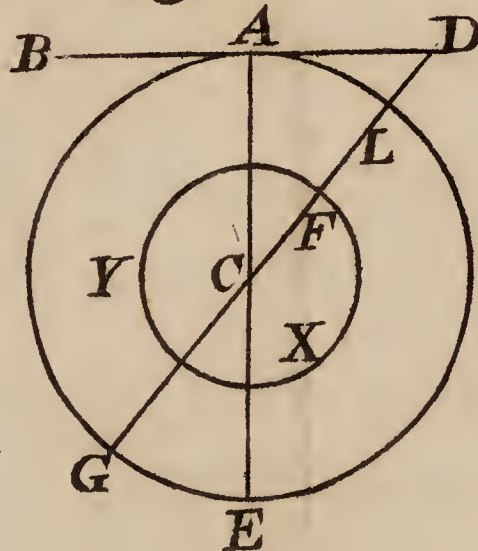


Fig. 27.



Fig. 21.

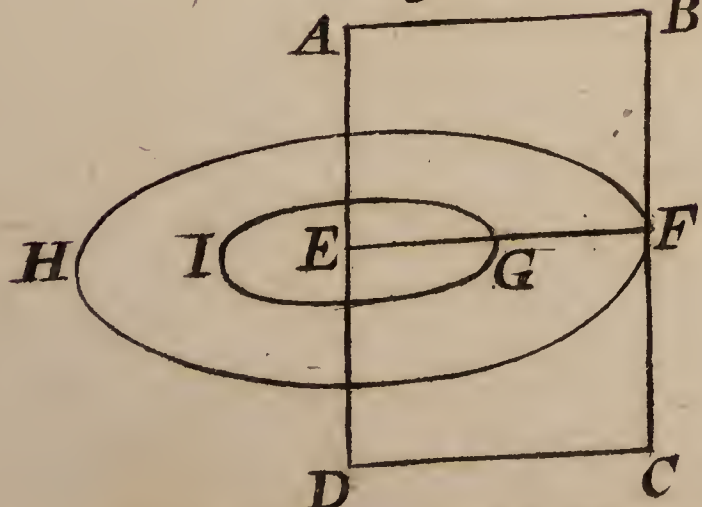


Fig. 29.

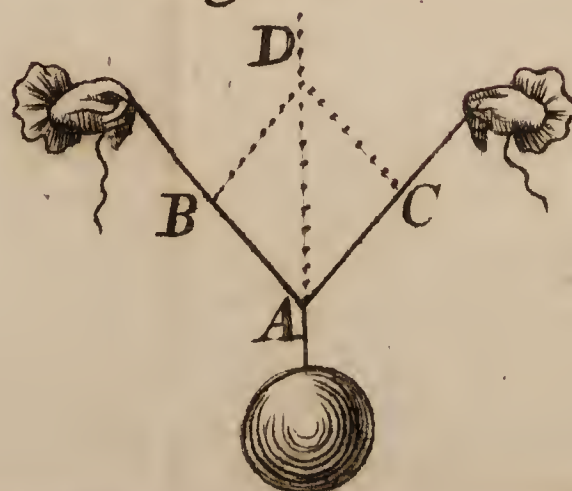


Fig. 26.



Fig. Mechan. Tab. III.

Fig. 28.

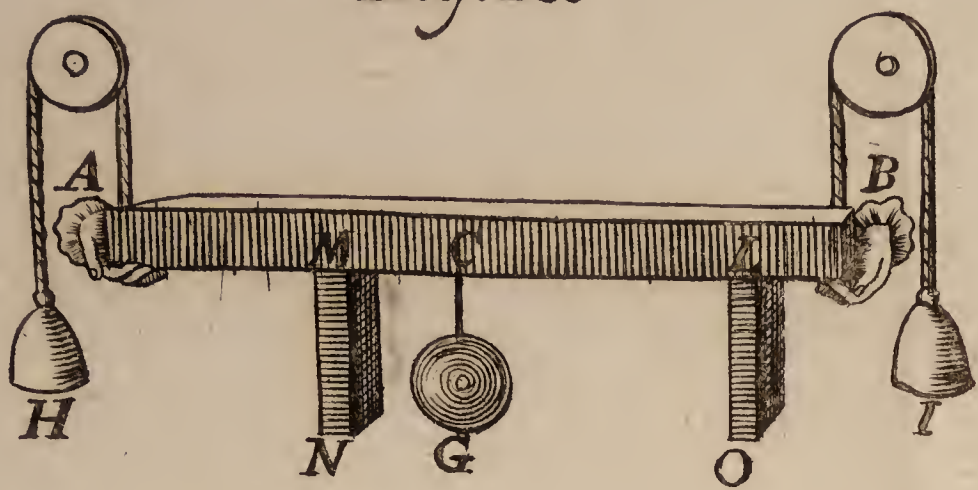


Fig. 30.

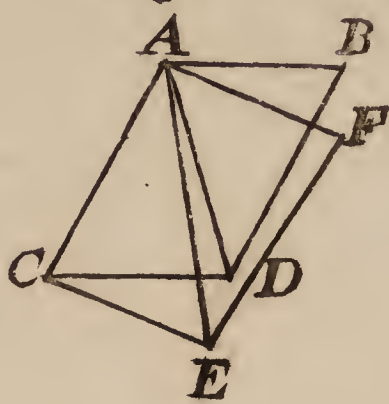


Fig. 32.

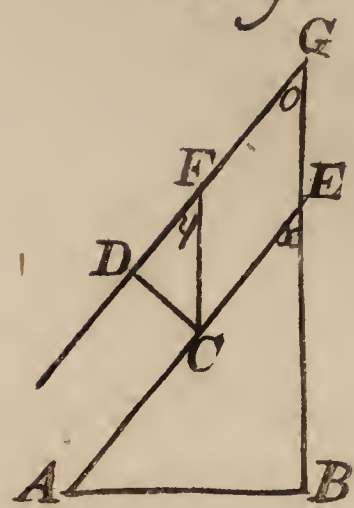


Fig. 33.

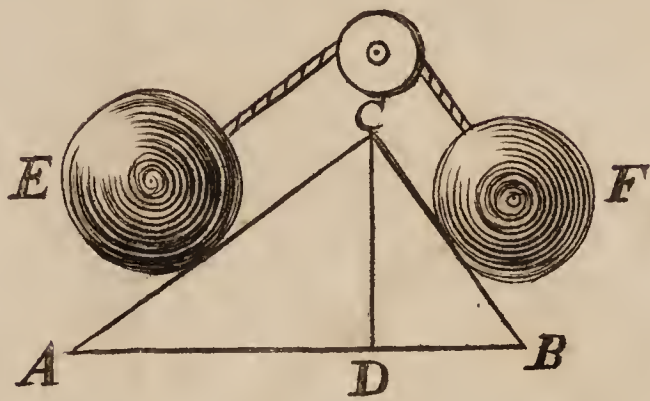


Fig. 34.

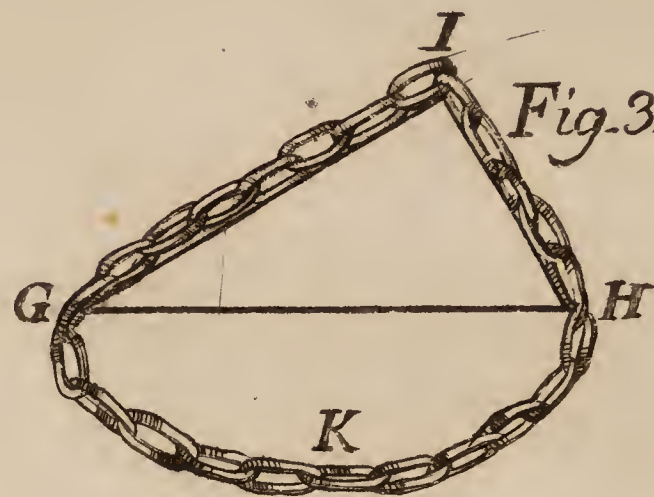


Fig. 31.

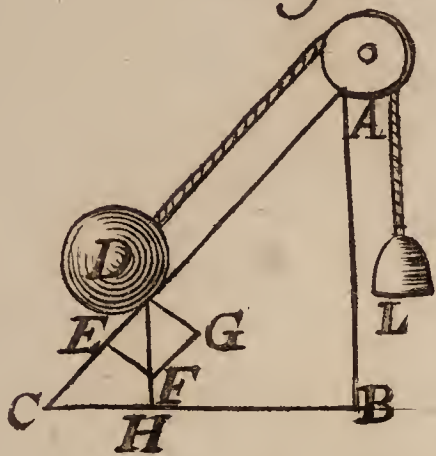


Fig. 35.

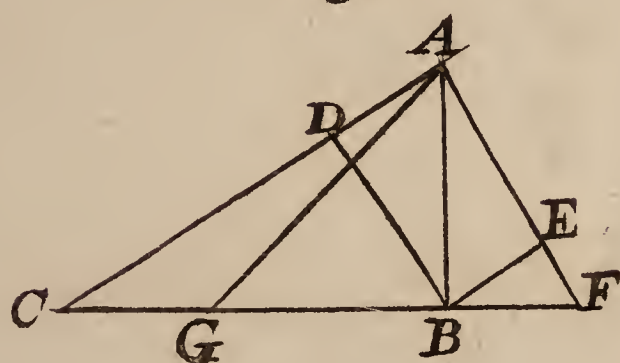


Fig. 36.

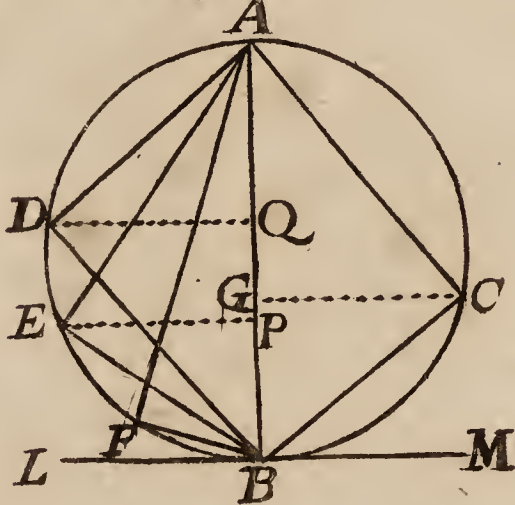


Fig. 38.

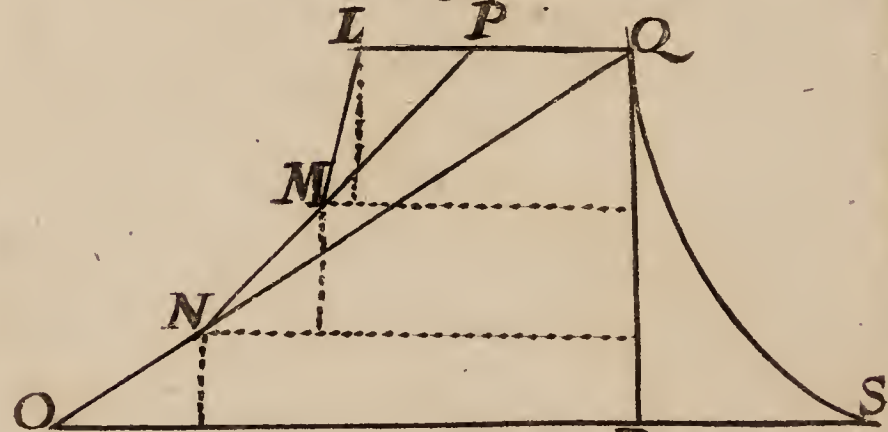


Fig. 37.

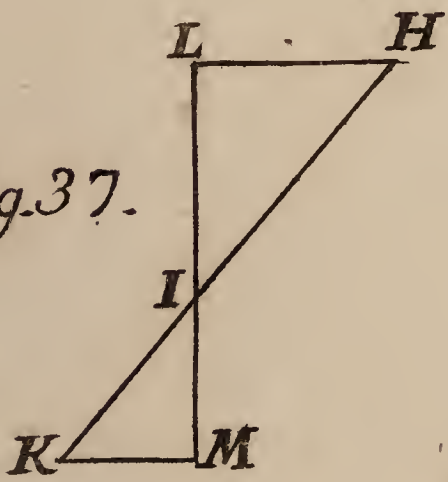


Fig. 40.

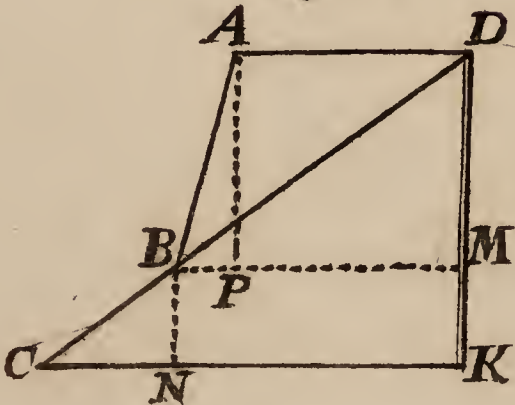


Fig. 40.

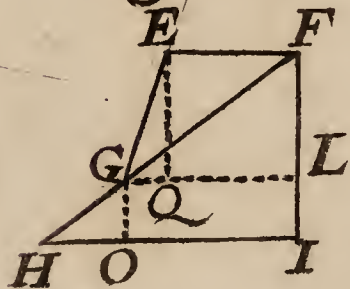


Fig. 41.

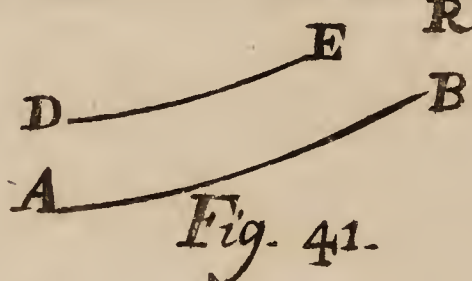


Fig. 39.

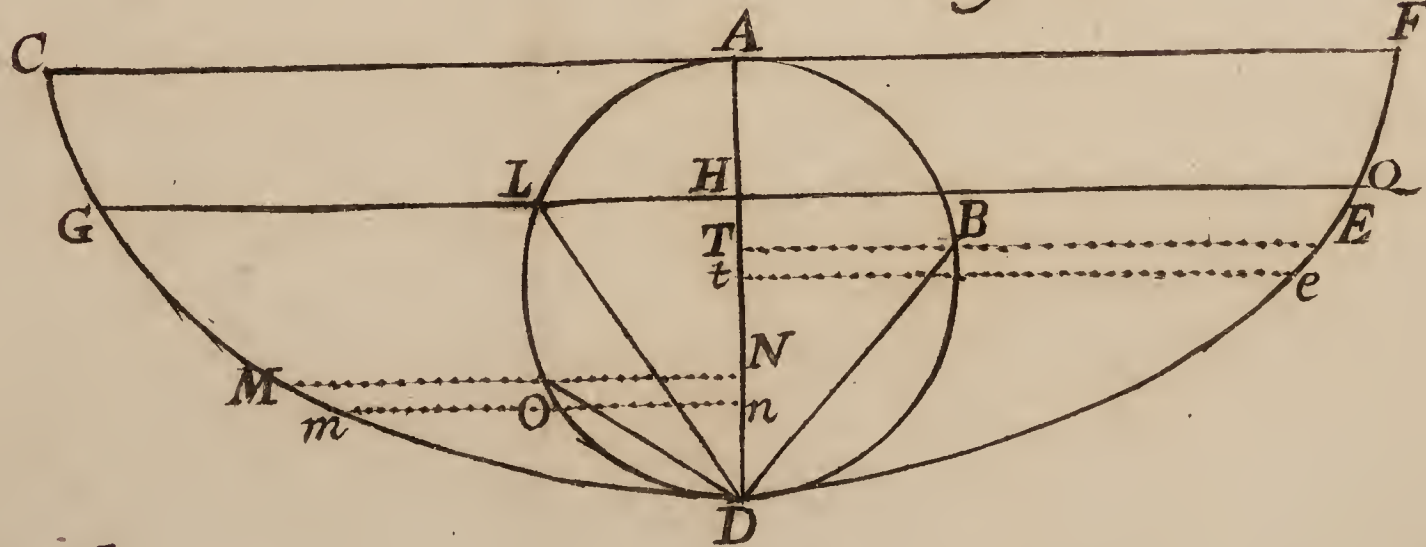


Fig. 42.

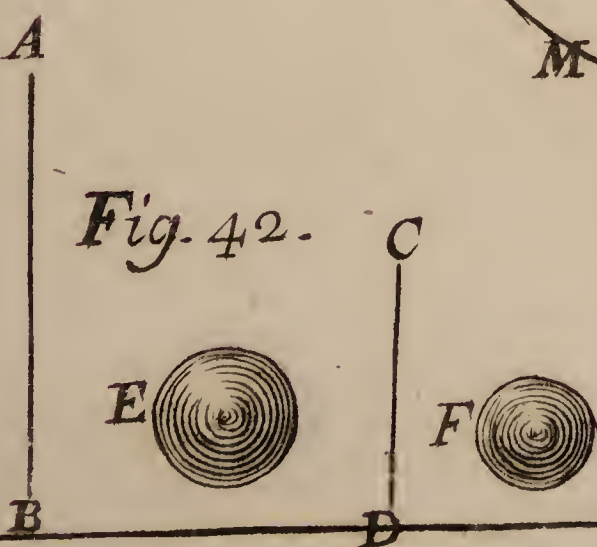


Fig. 47.

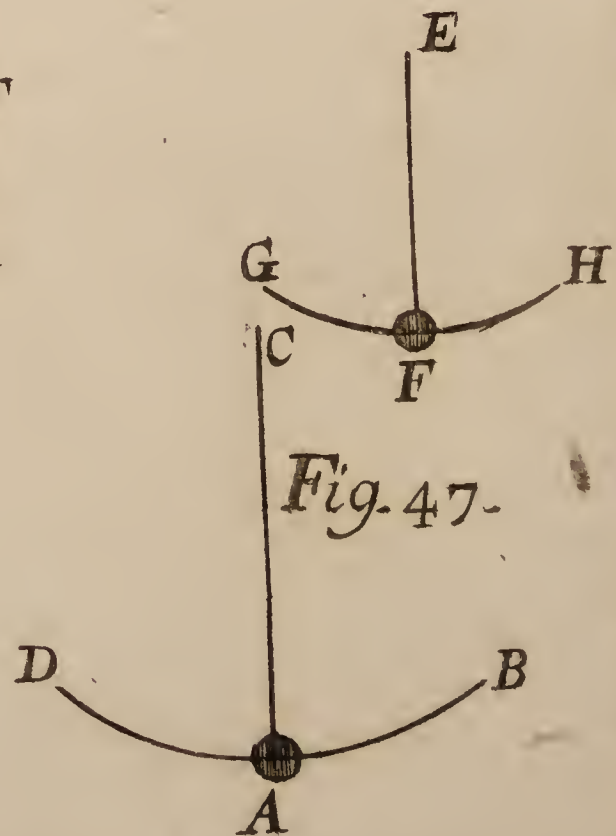


Fig. Mechan. Tab. IV.

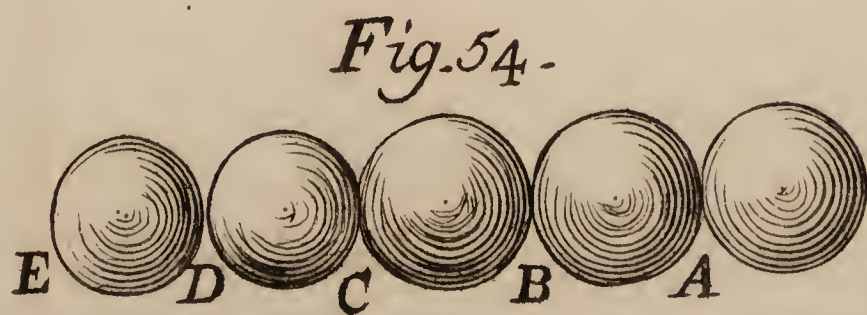
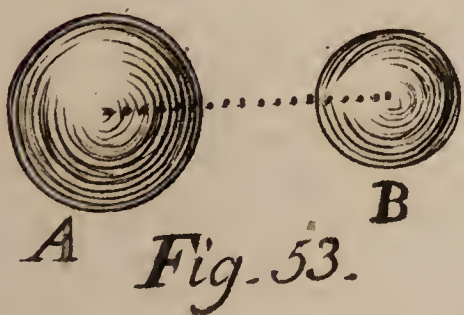
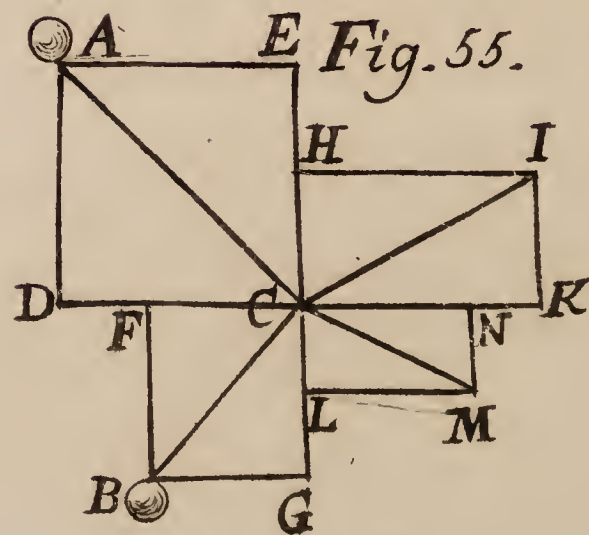
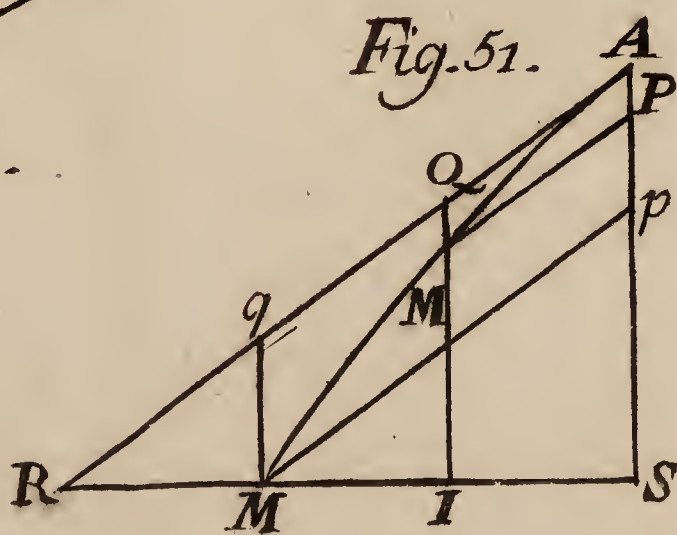
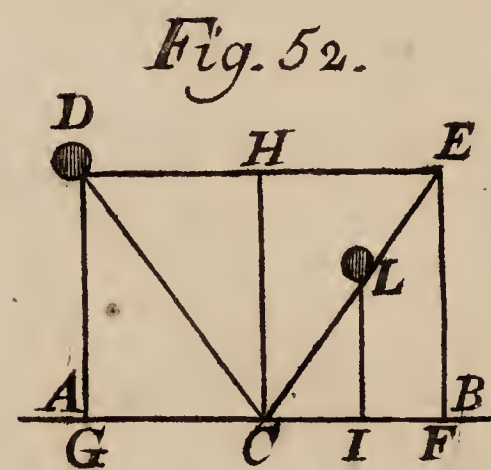
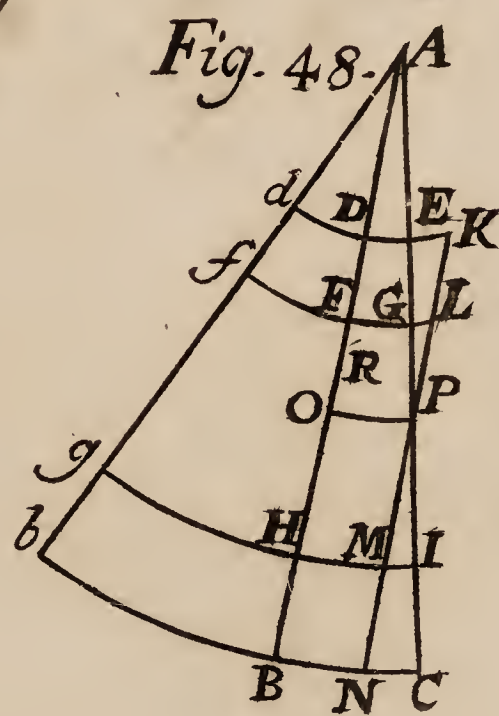
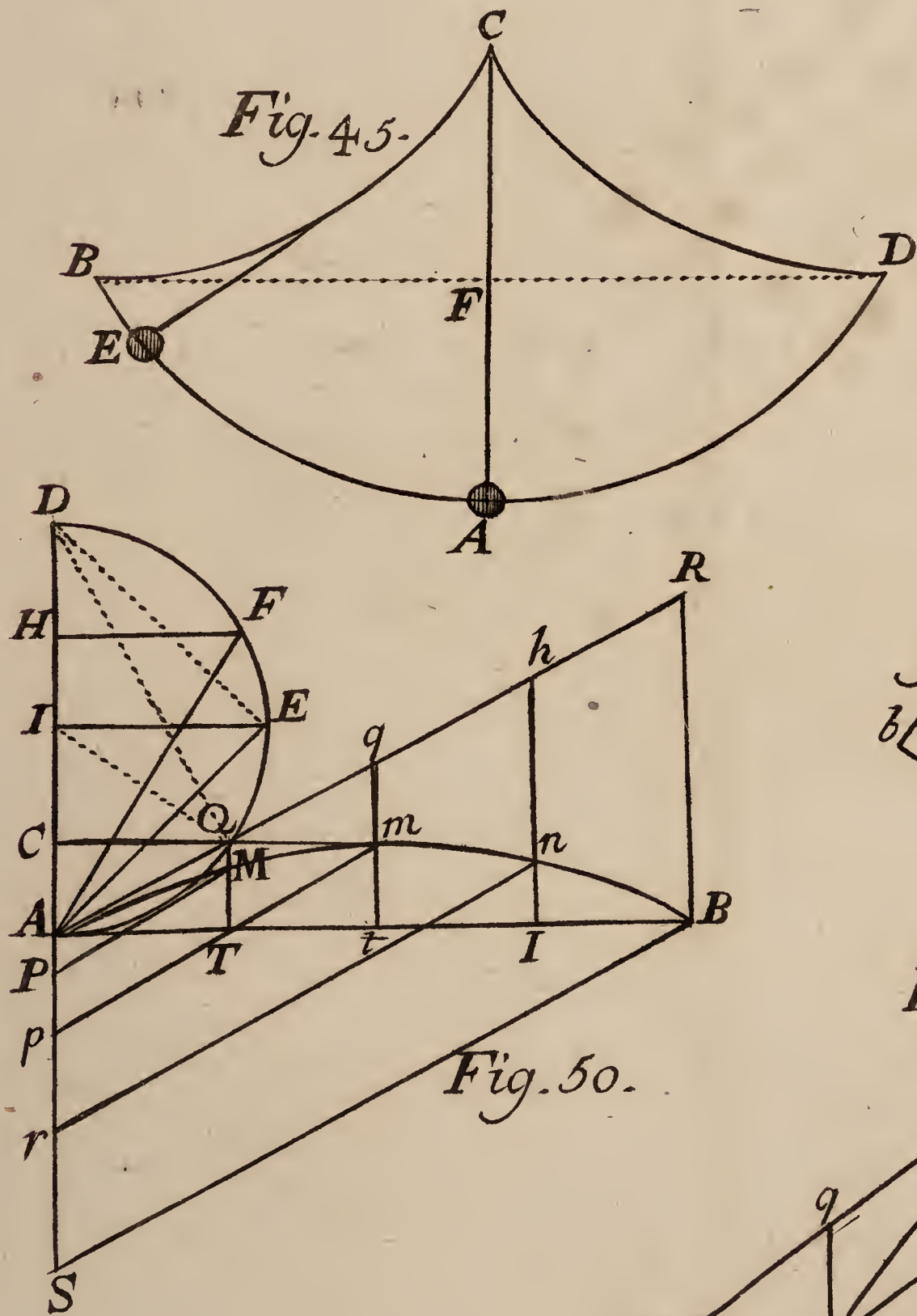
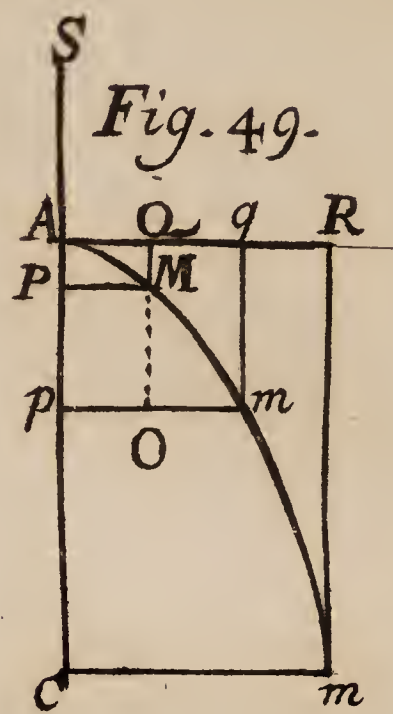
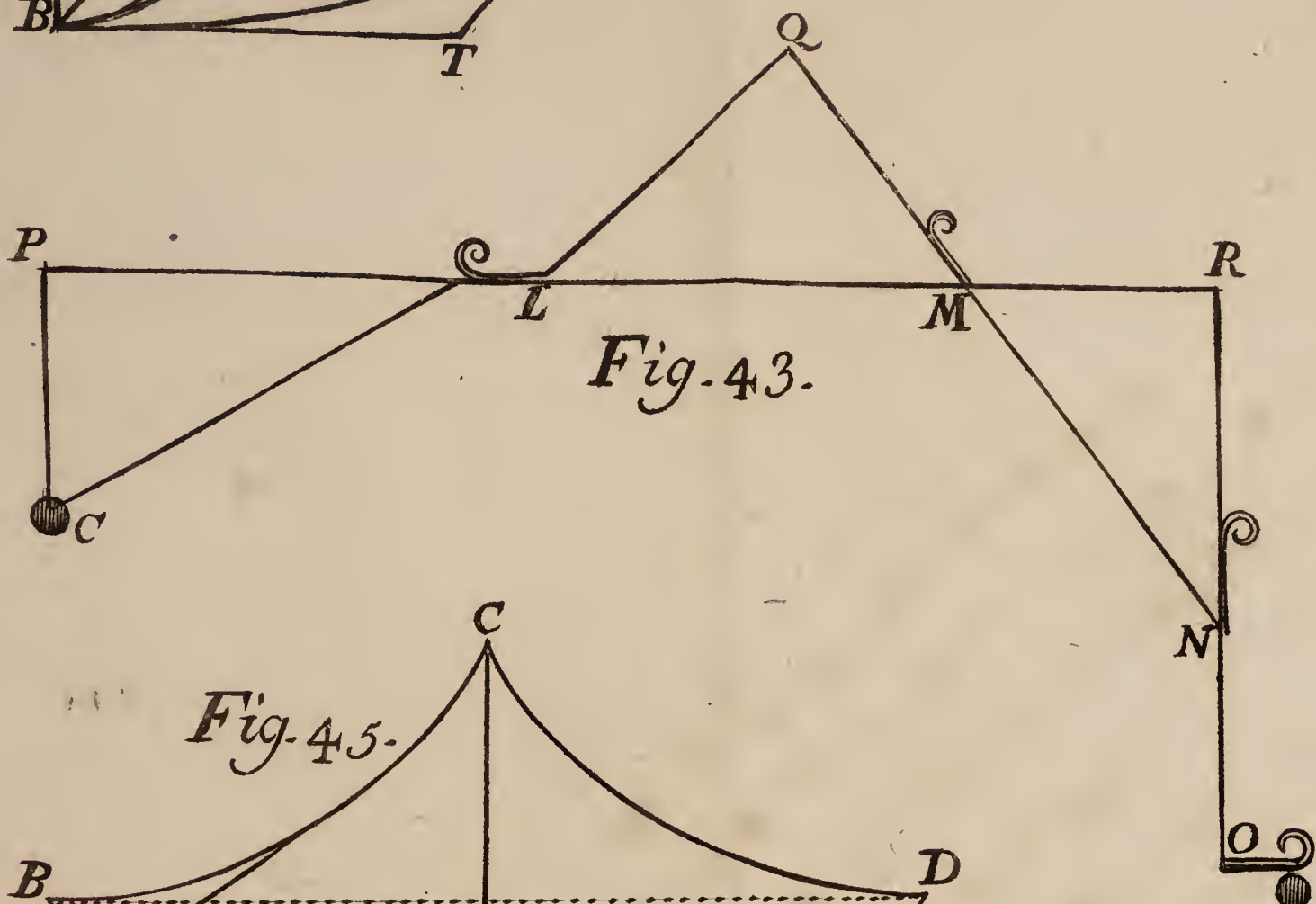
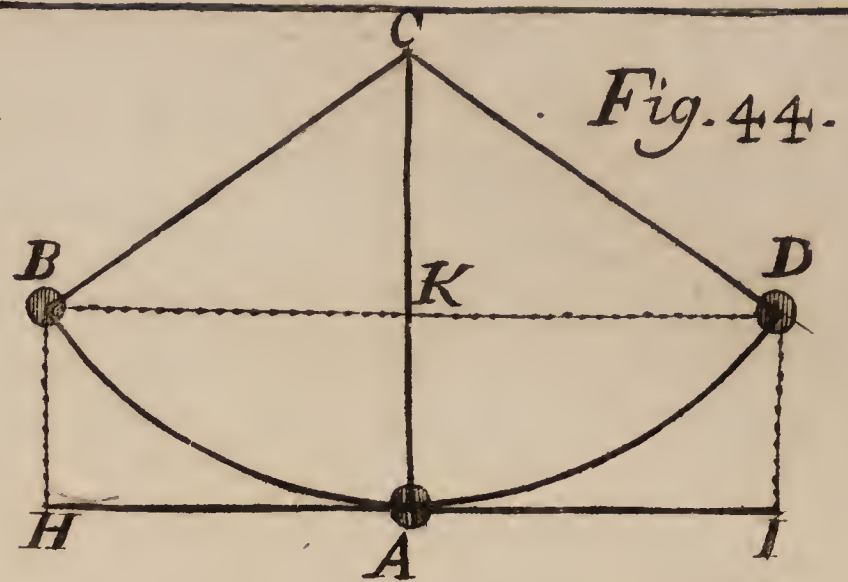
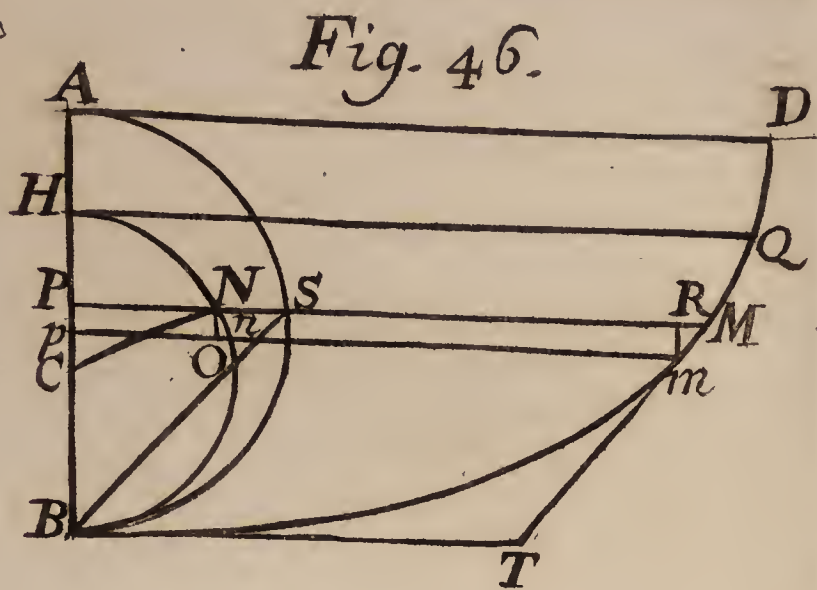


Fig. 56.

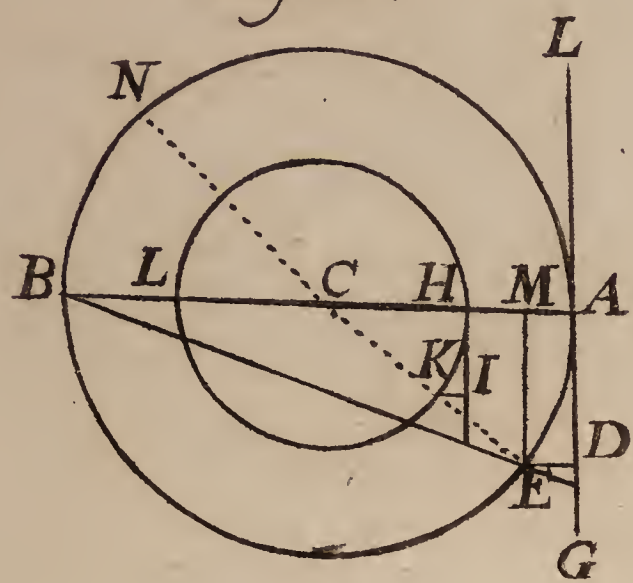


Fig. 57.

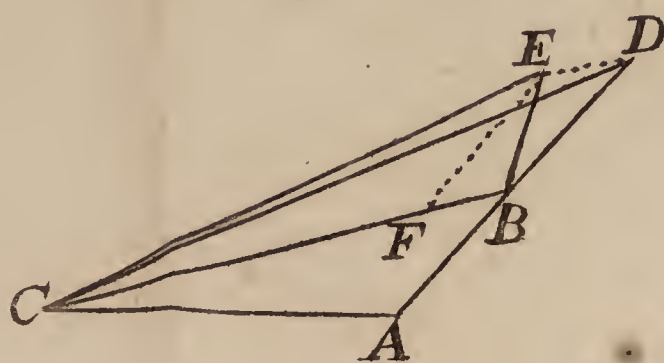


Fig. 59.

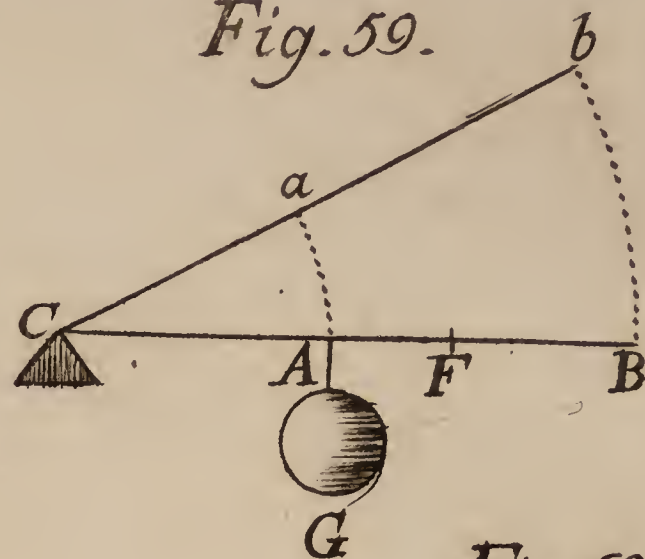


Fig. 63.

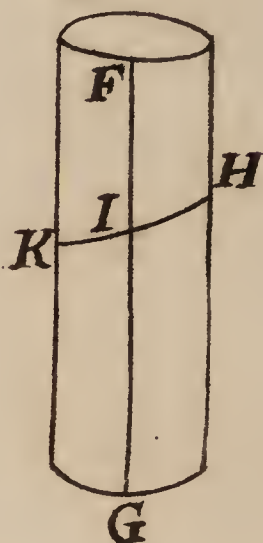


Fig. 58.

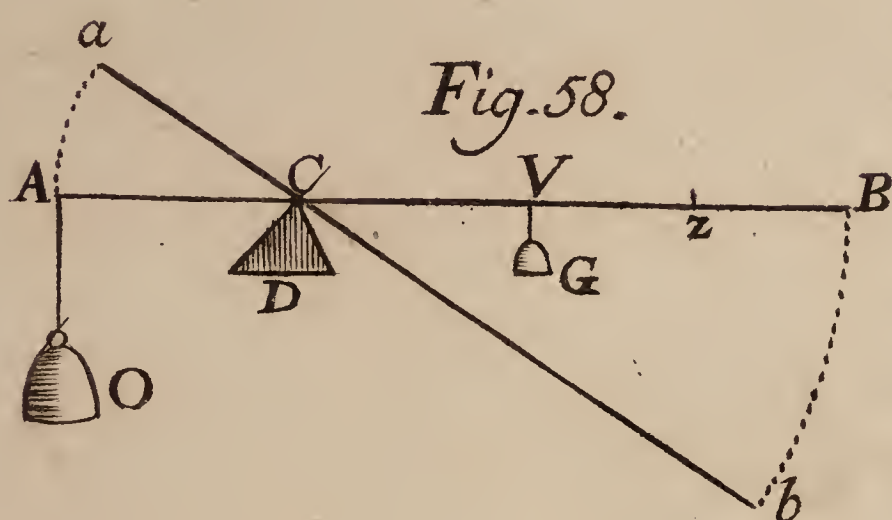


Fig. 65.

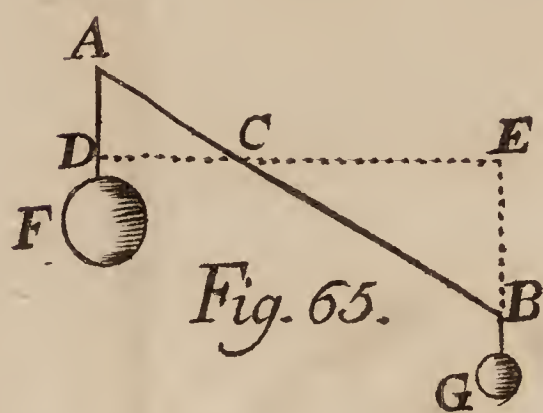


Fig. 62.

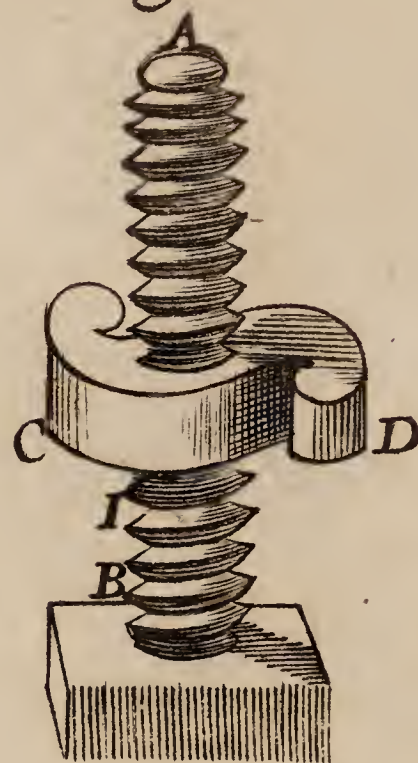


Fig. 61.

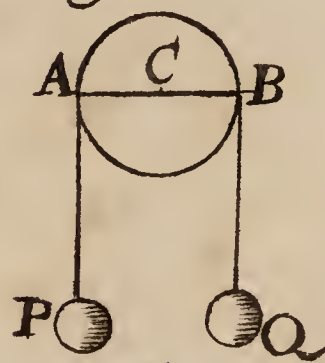


Fig. 64.

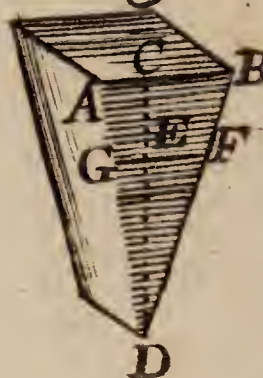


Fig. 60.

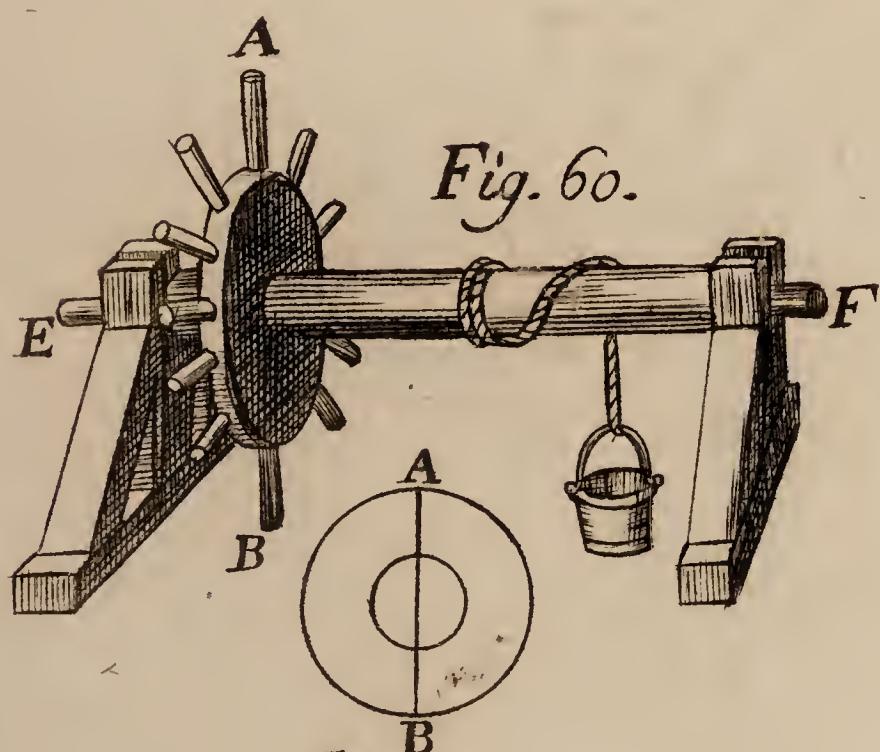


Fig. 70.

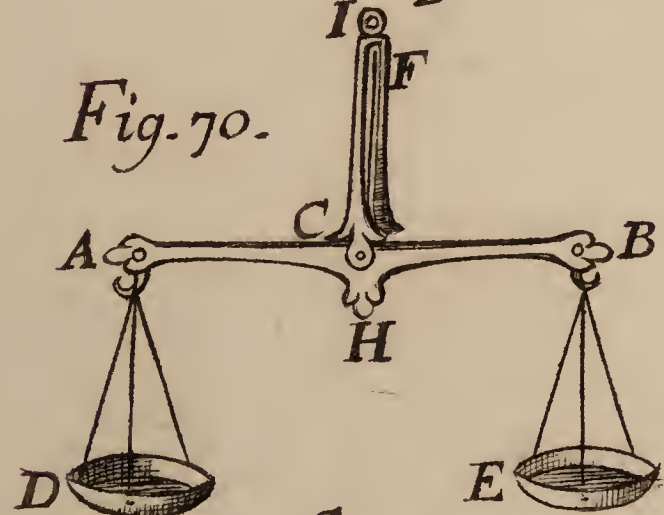


Fig. 66.

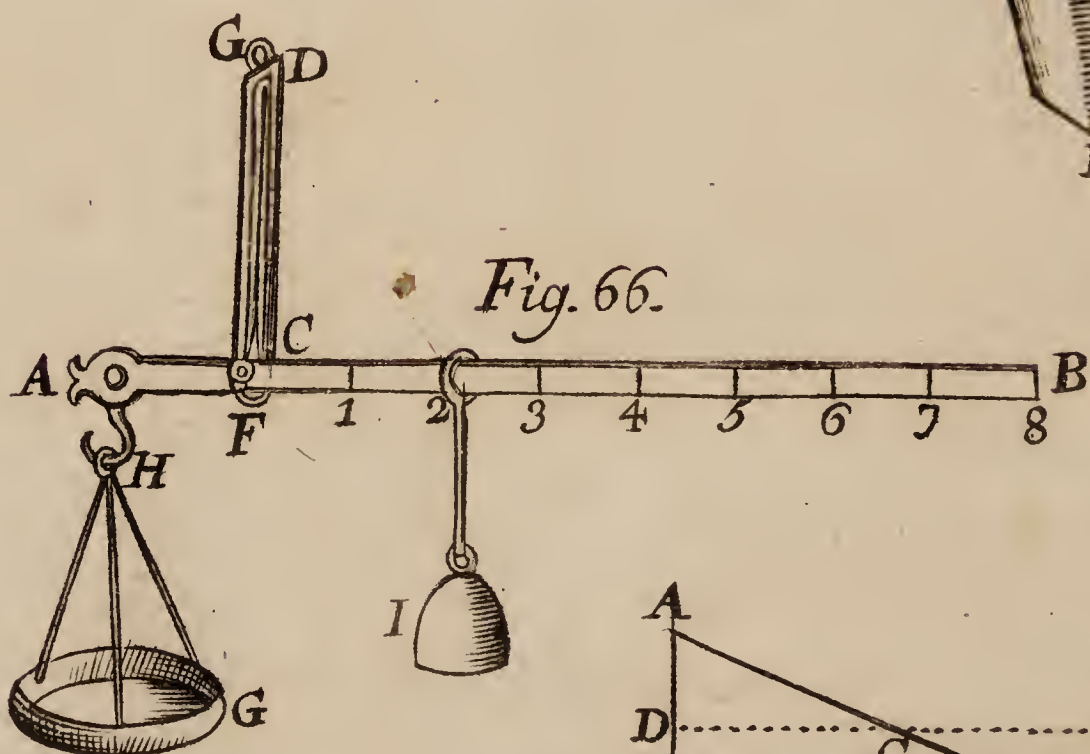


Fig. 69.

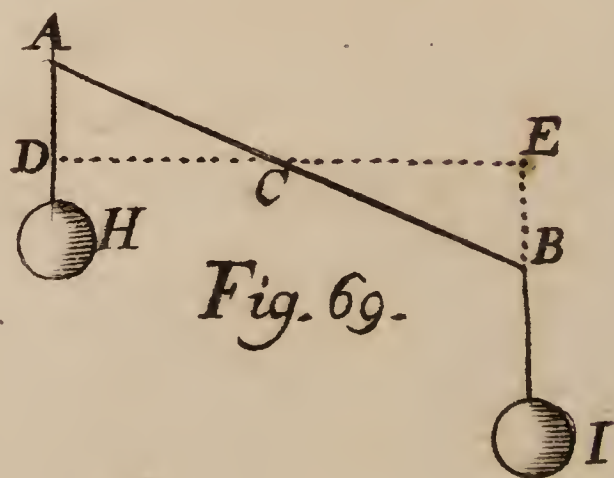


Fig. 67.

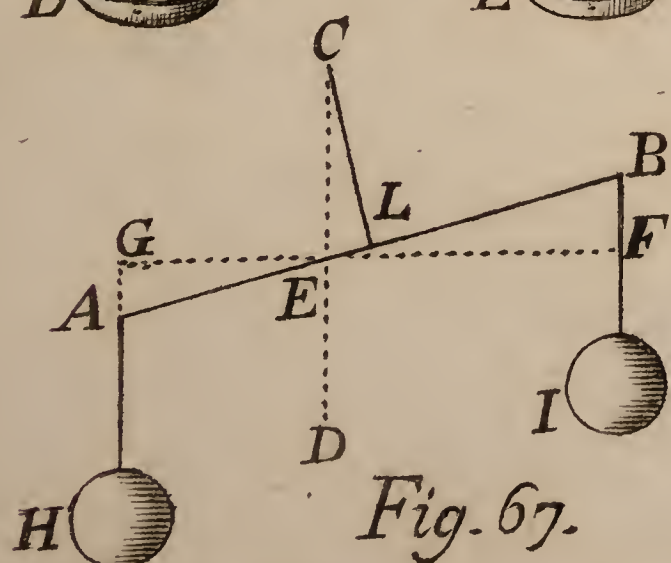


Fig. 68.

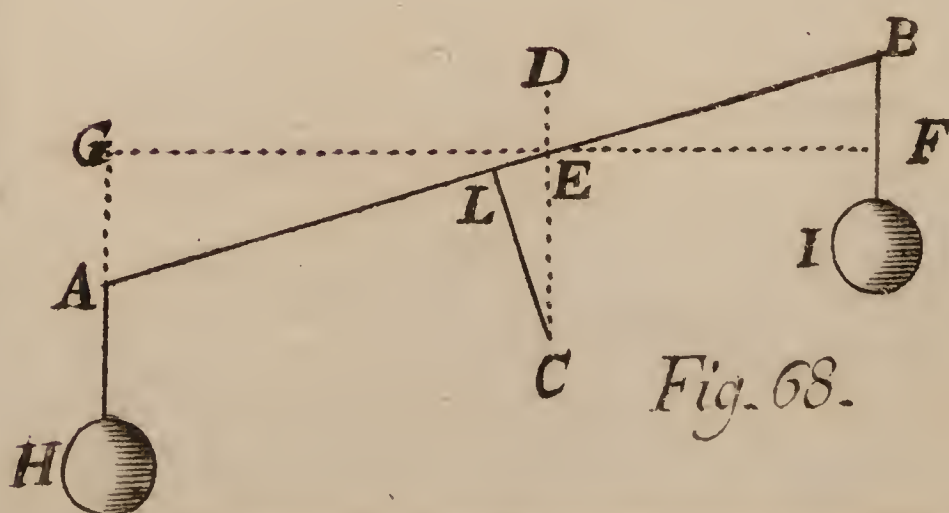


Fig. Mechan. Tab. VI.

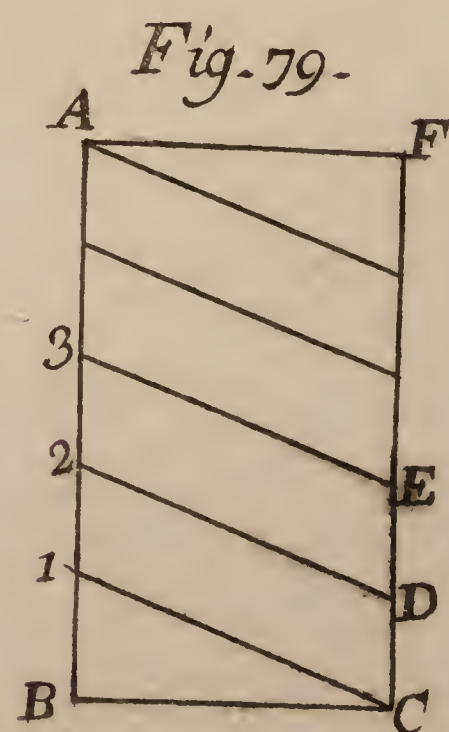
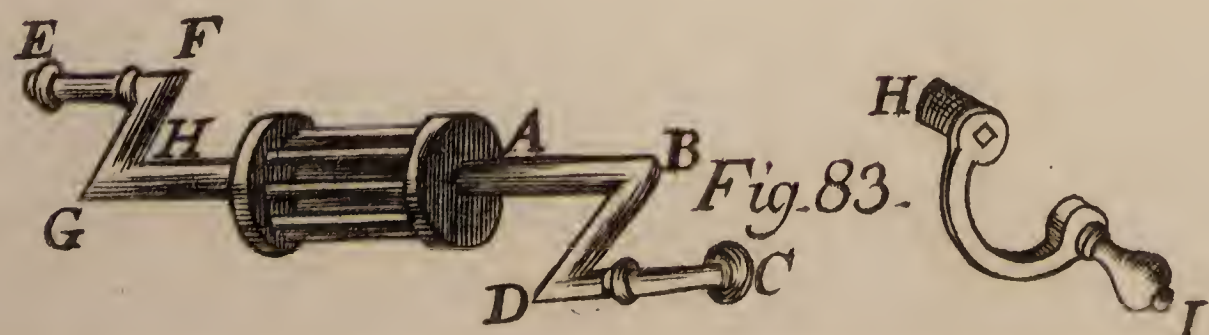
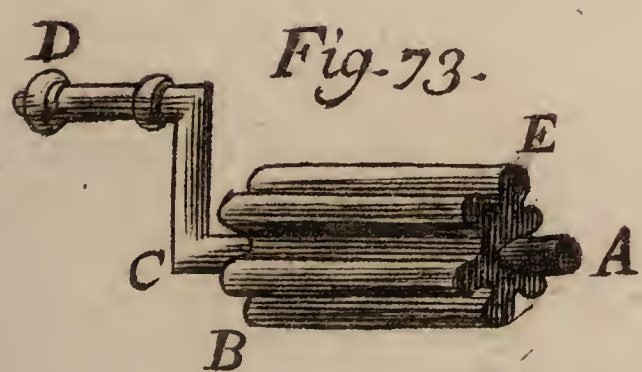
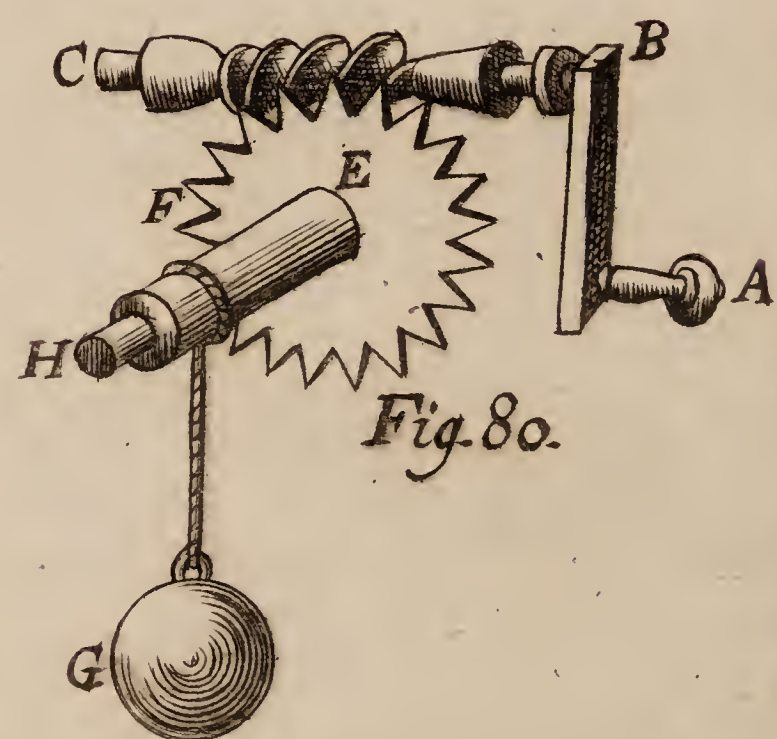
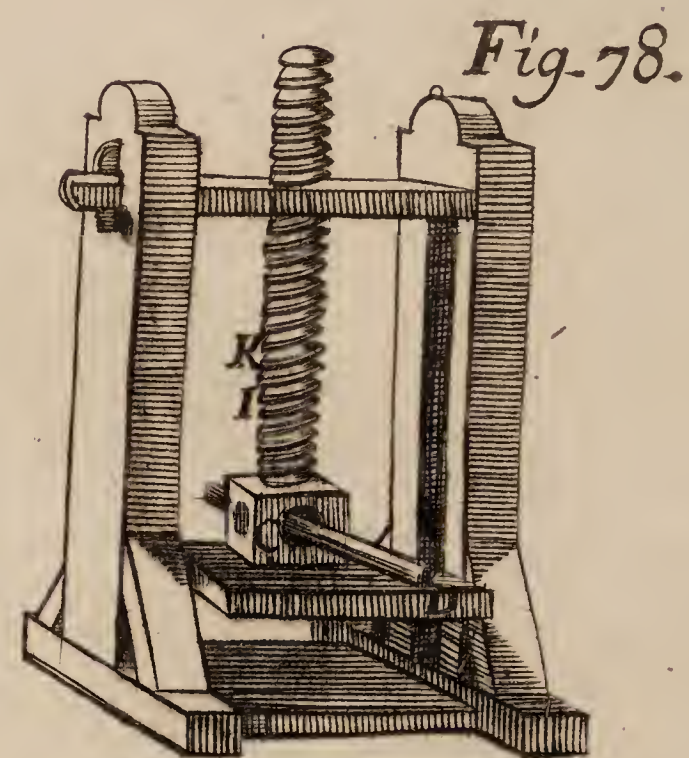
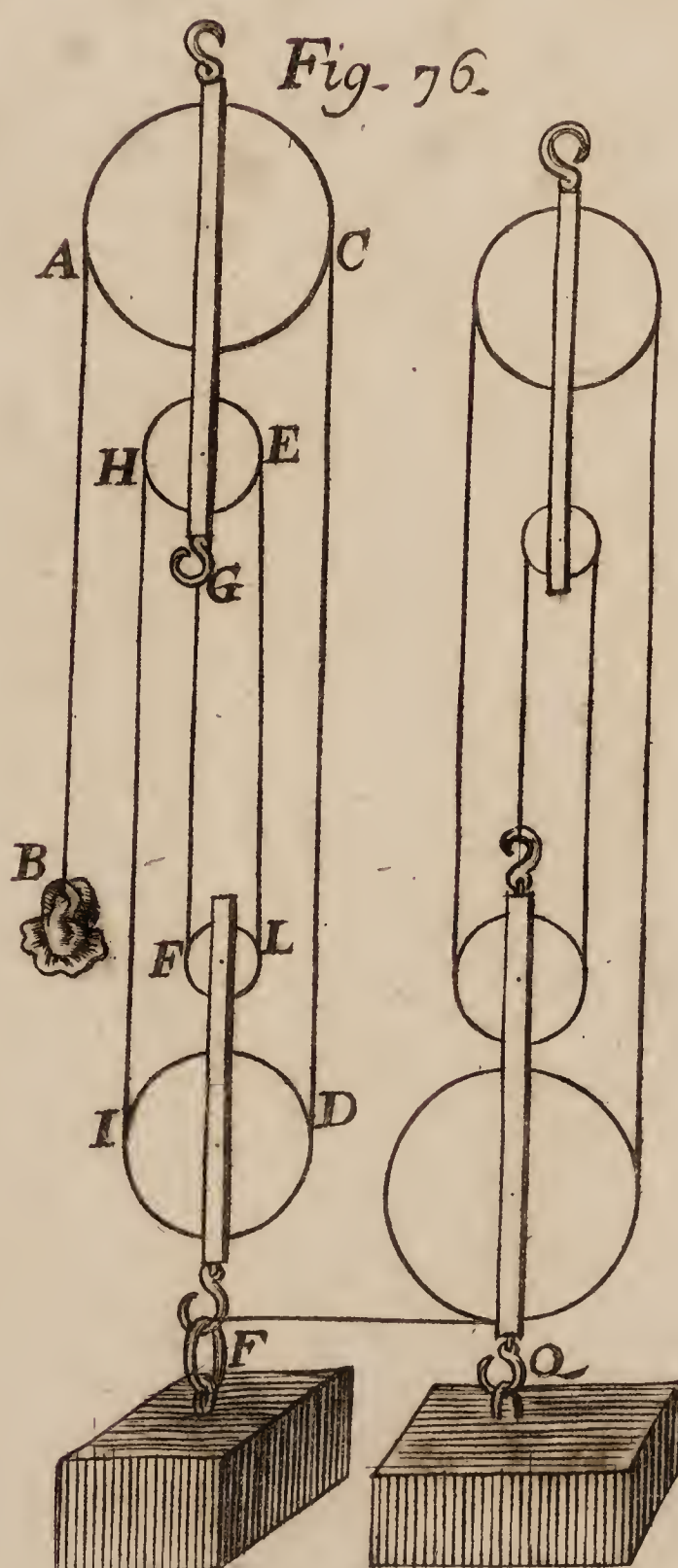
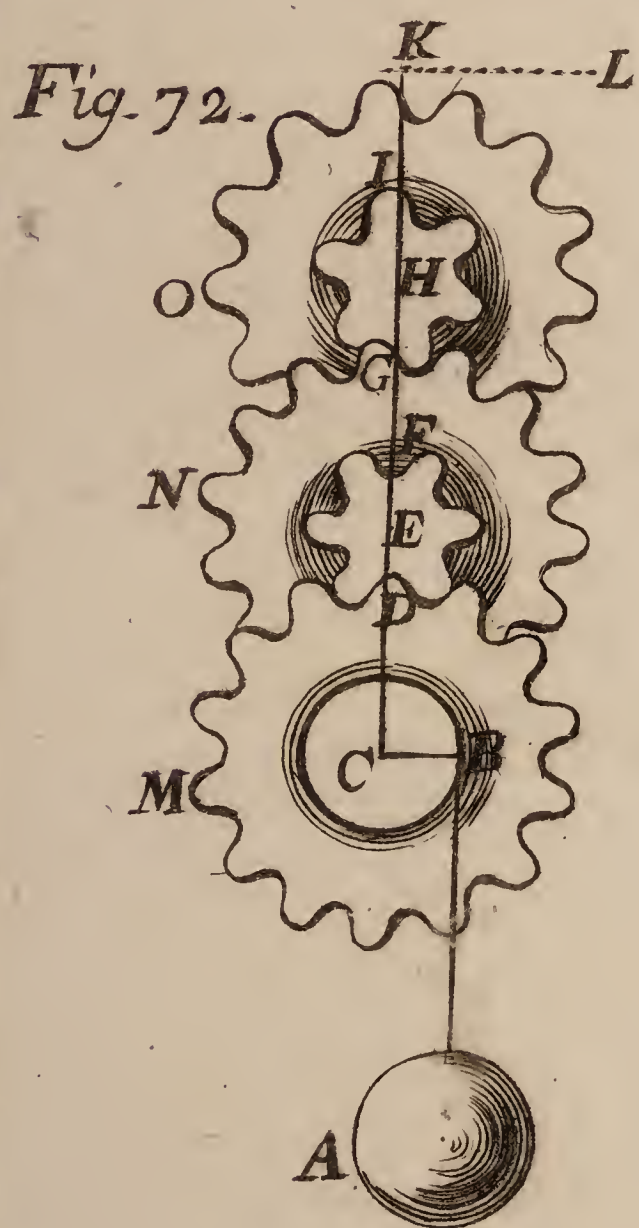
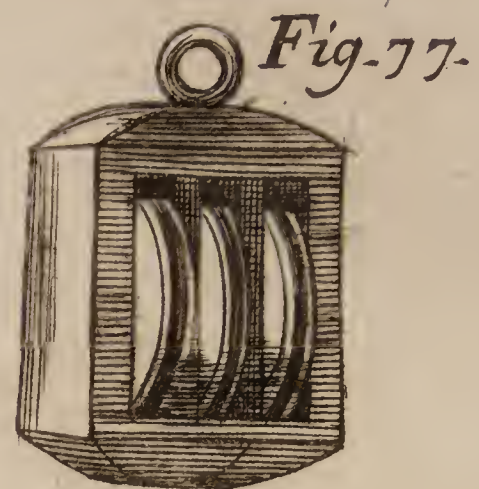
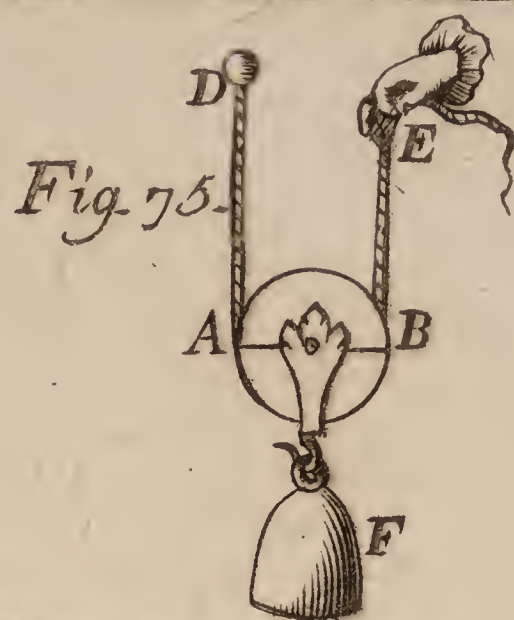
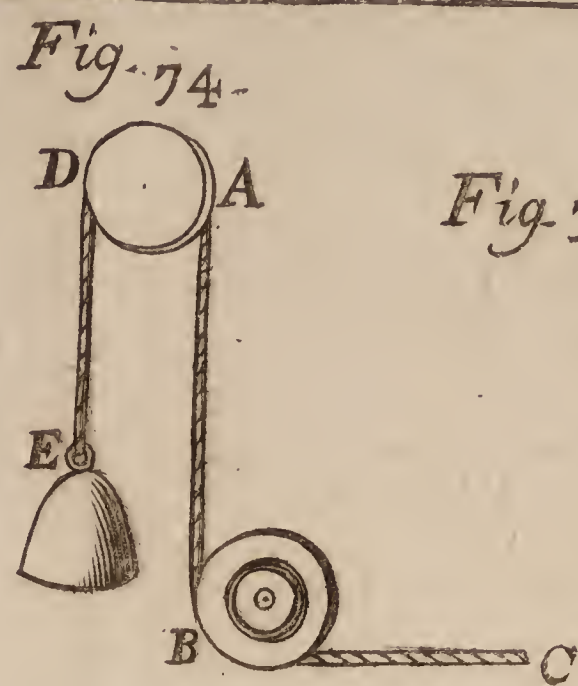
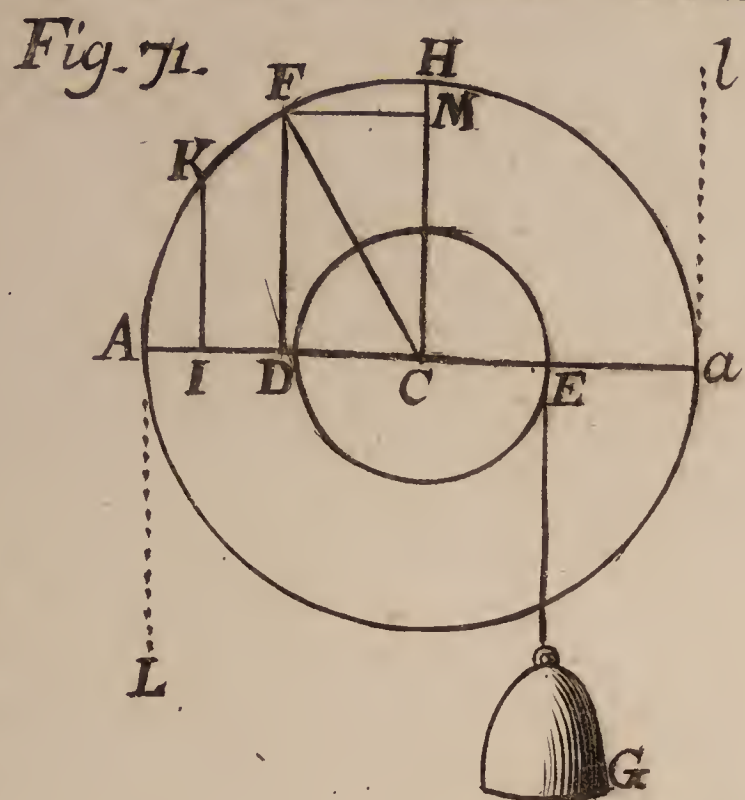


Fig:81.

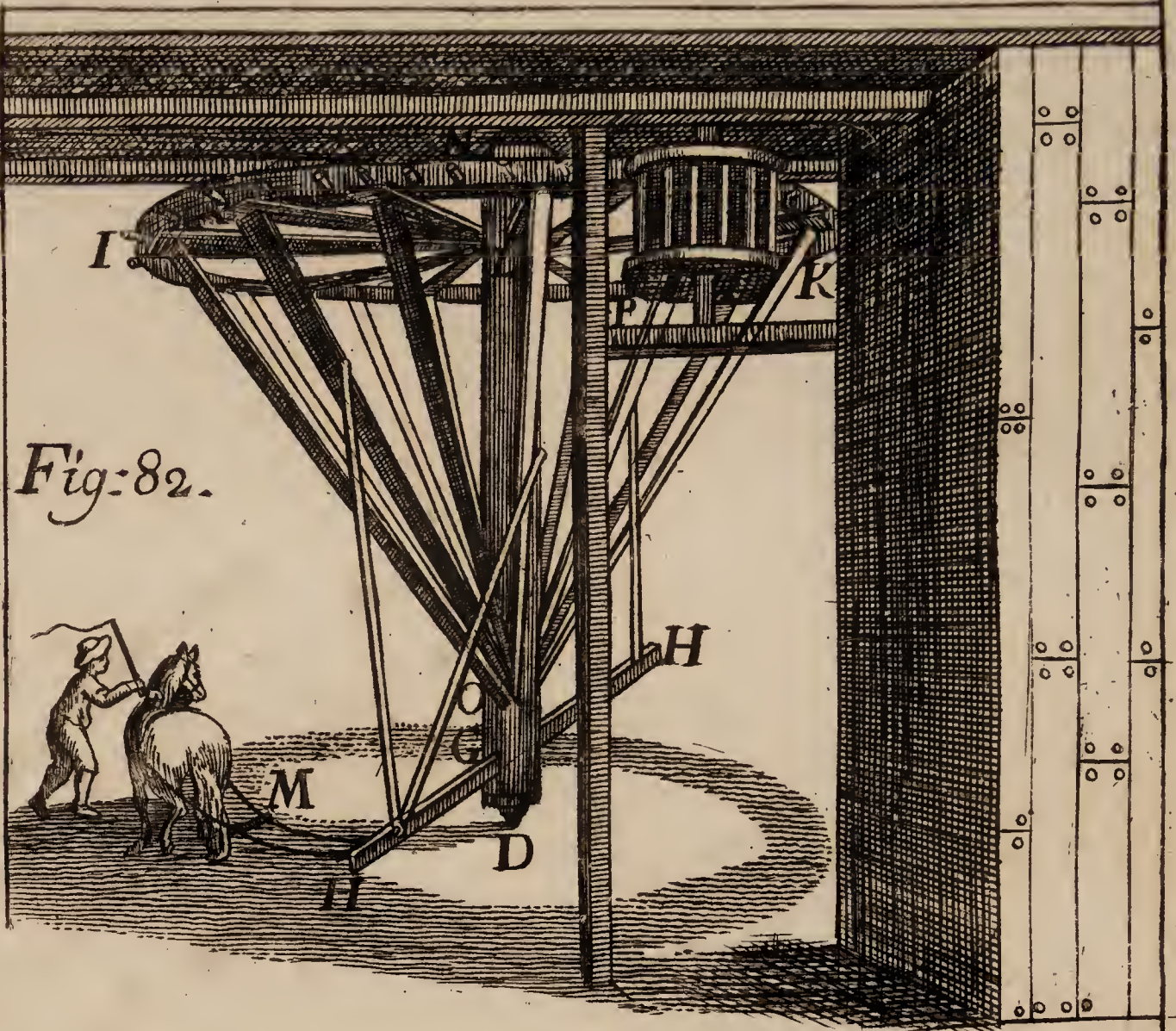
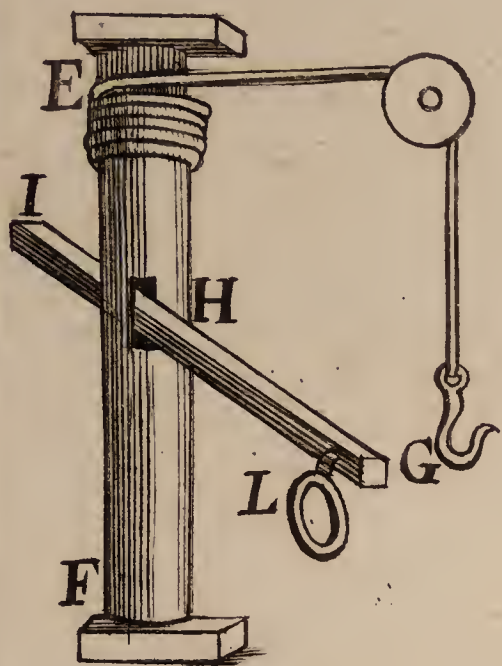


Fig:85.

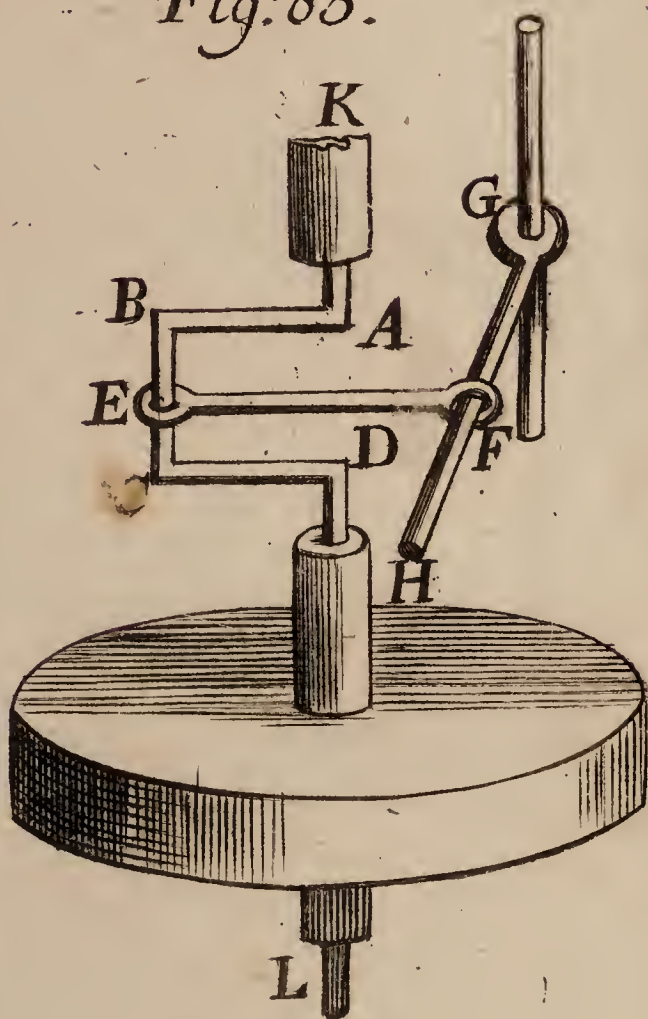


Fig: 86.

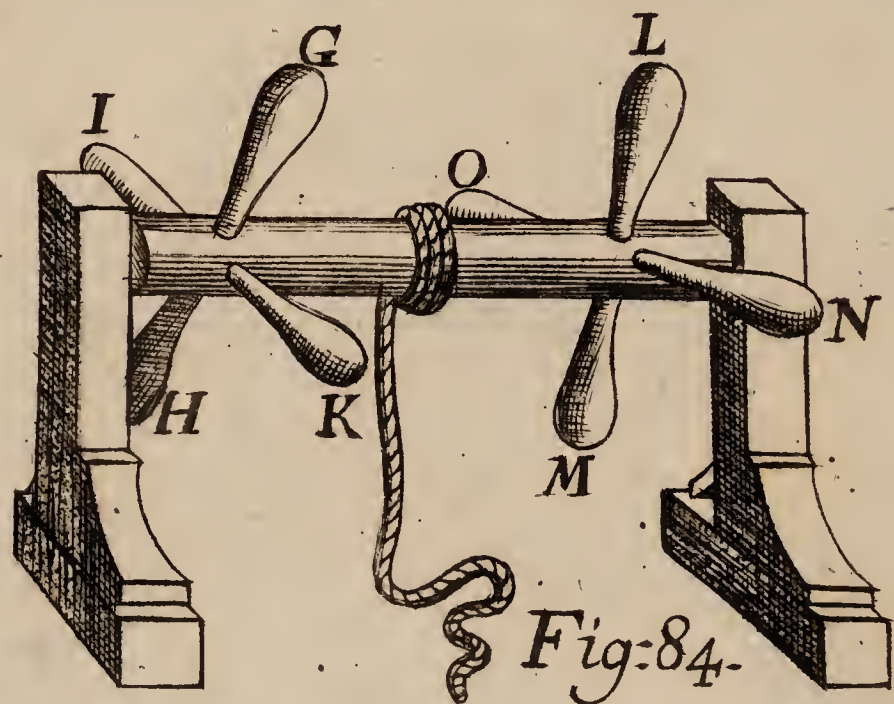
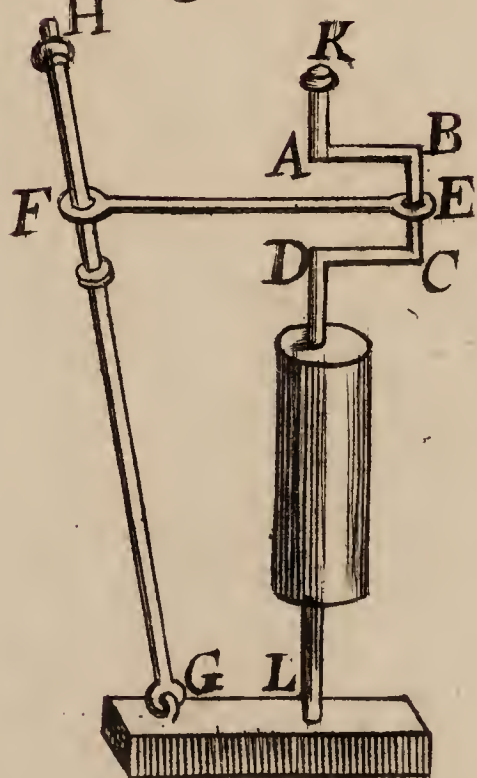


Fig:87.

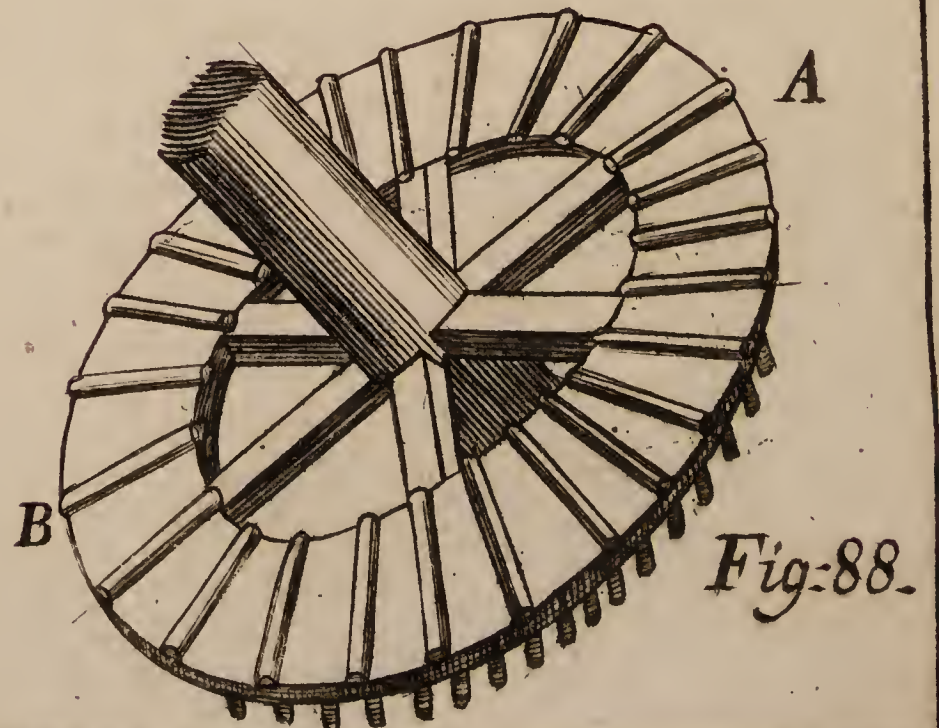
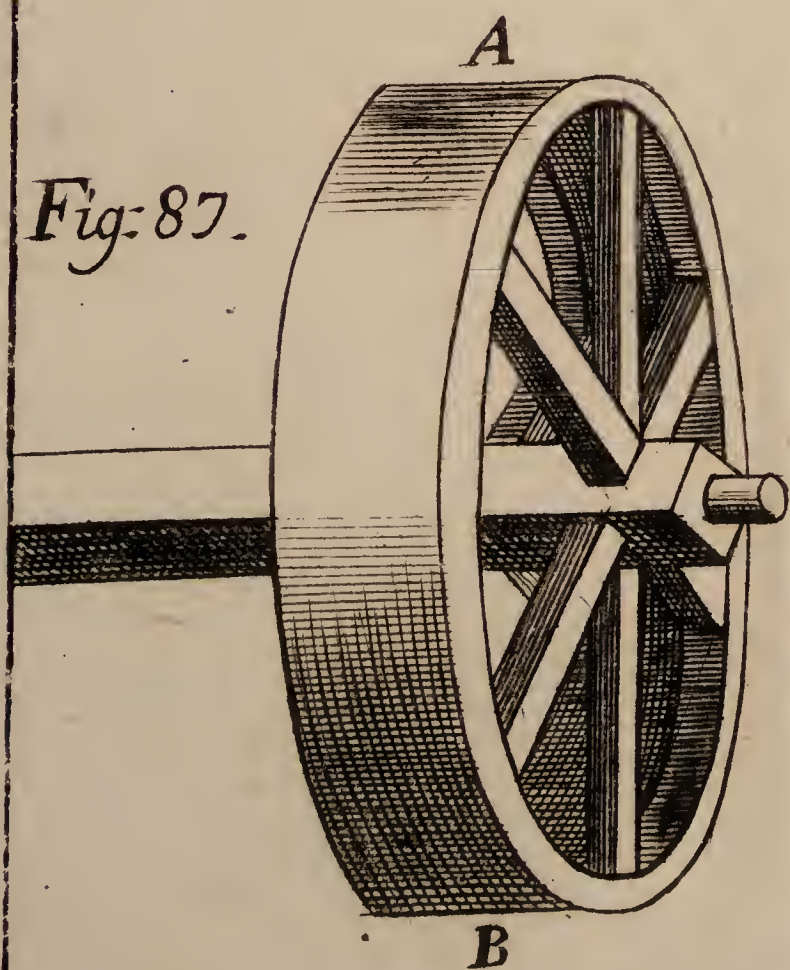


Fig: Mech: Tab: VIII.

Fig: 89.

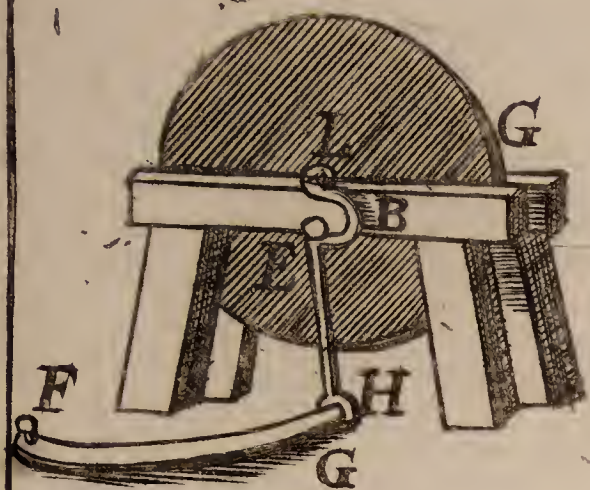


Fig: 90.

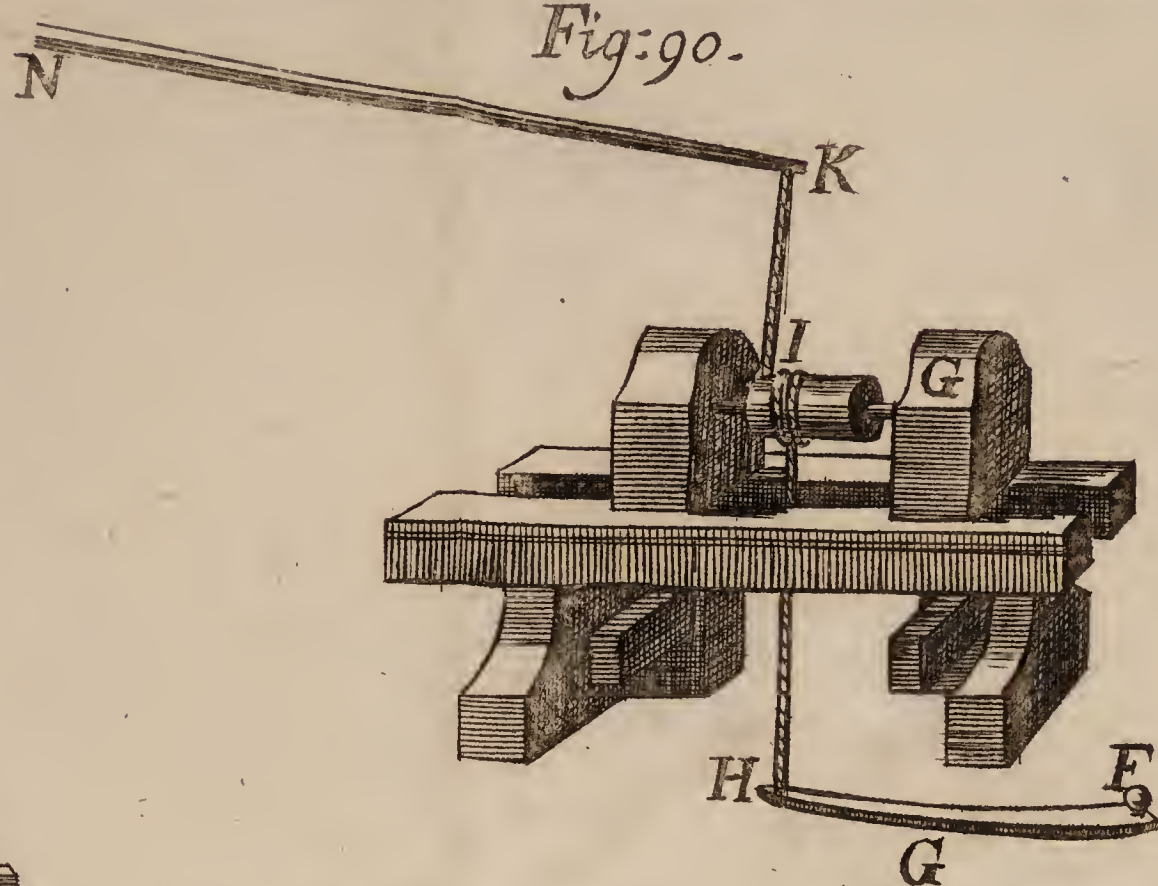


Fig: 92.

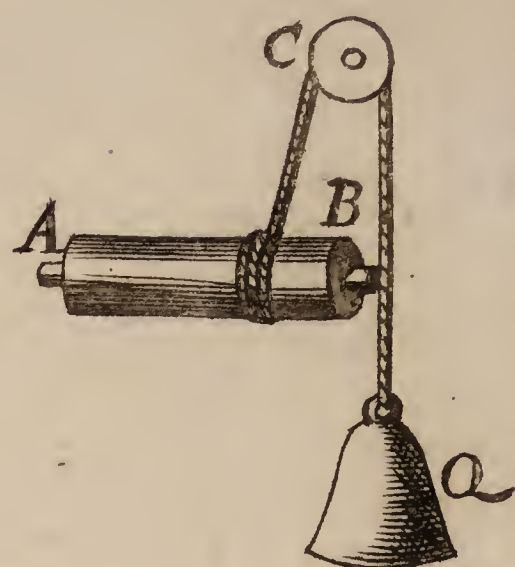


Fig: 91.

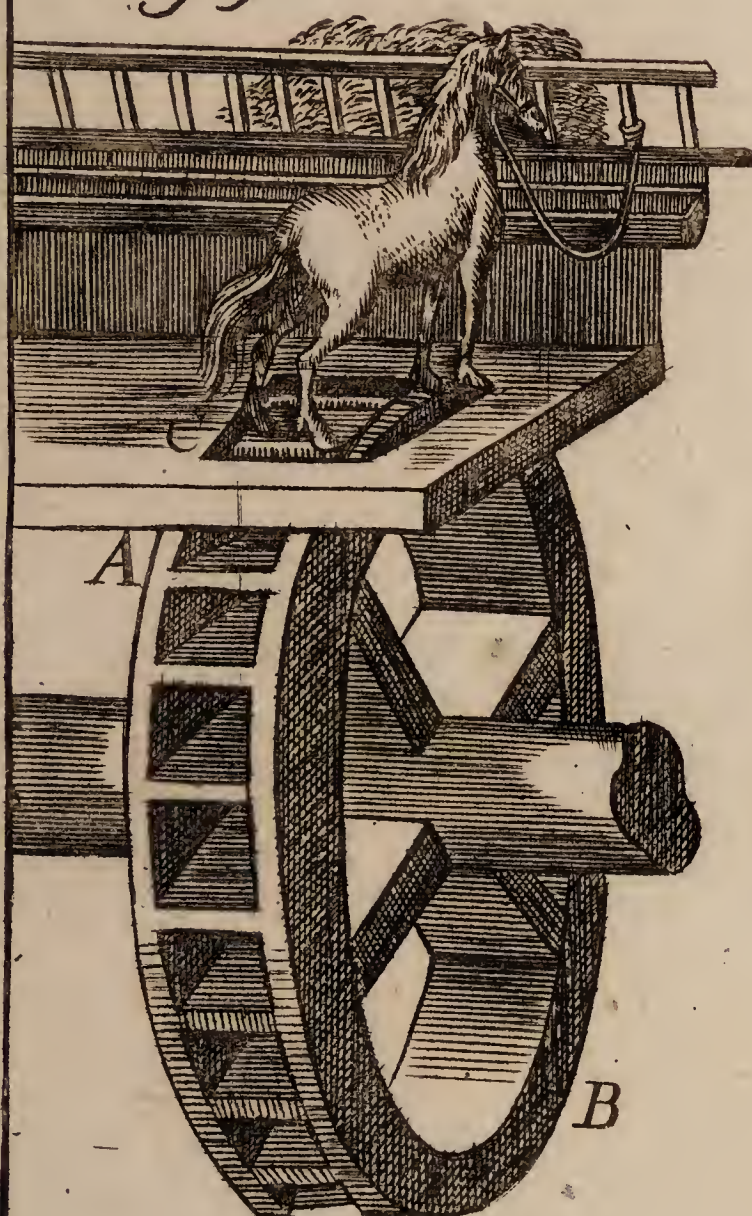


Fig: 93.

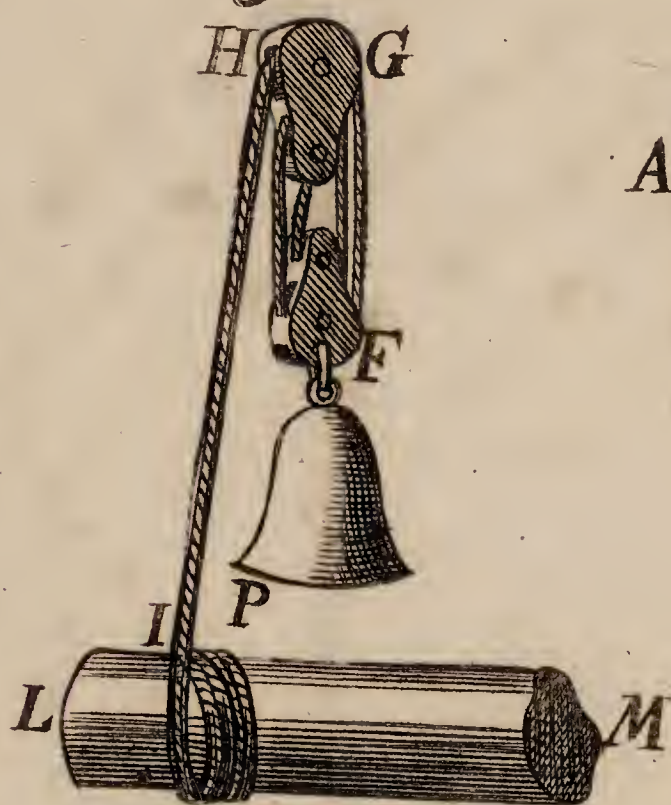


Fig: 96.

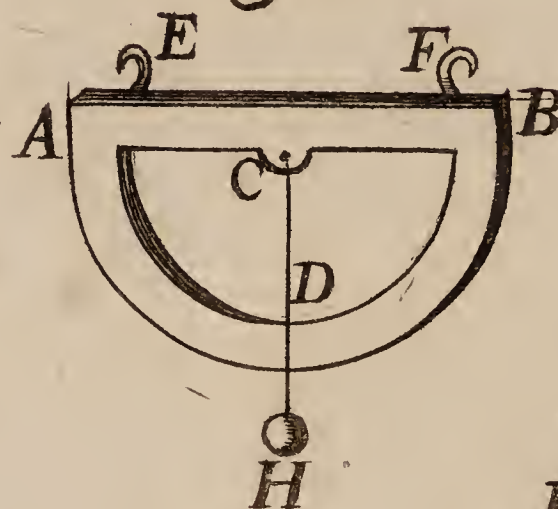


Fig: 94.

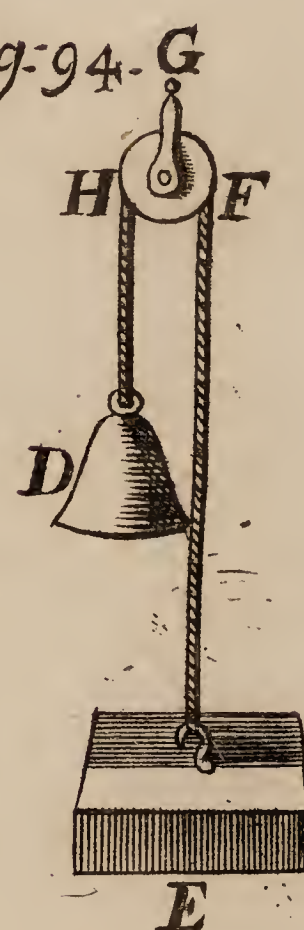


Fig: 97. N° 1.

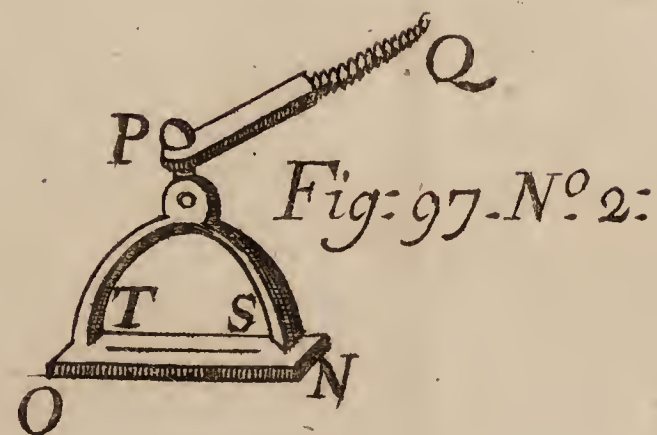
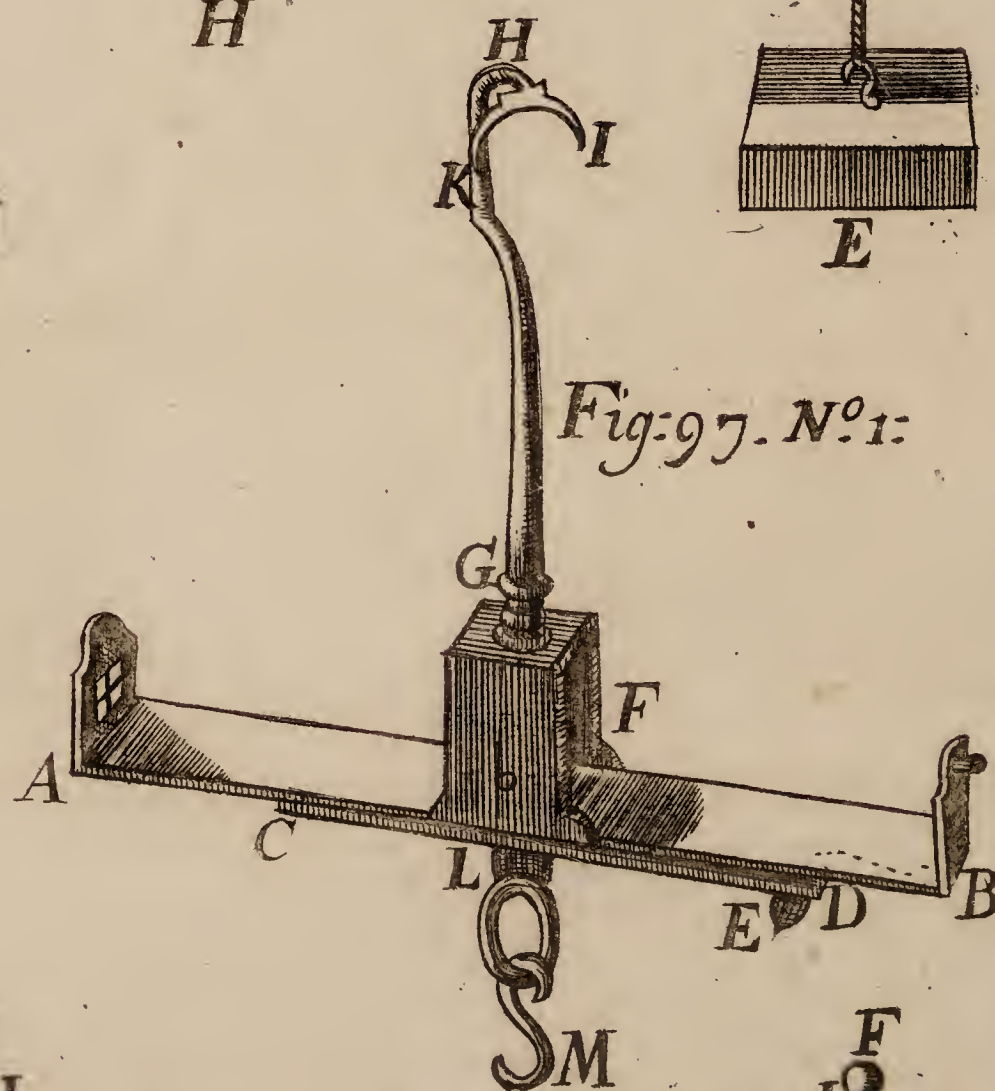


Fig: 95.

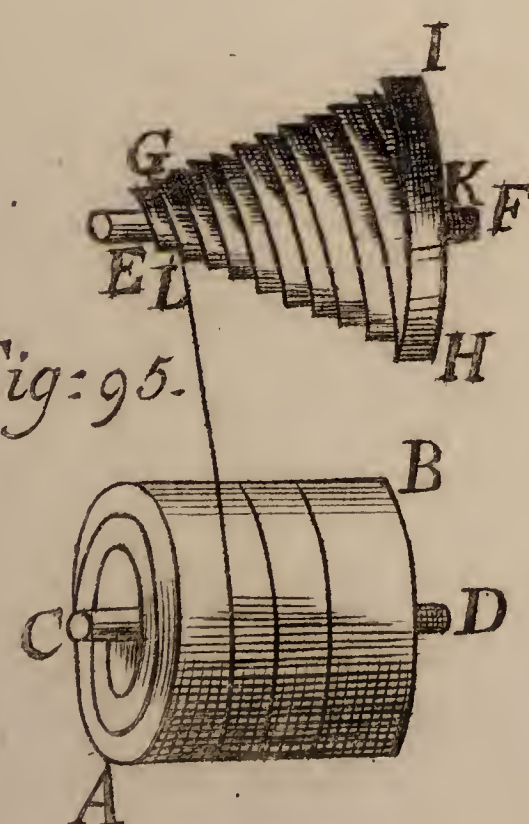


Fig: 98.

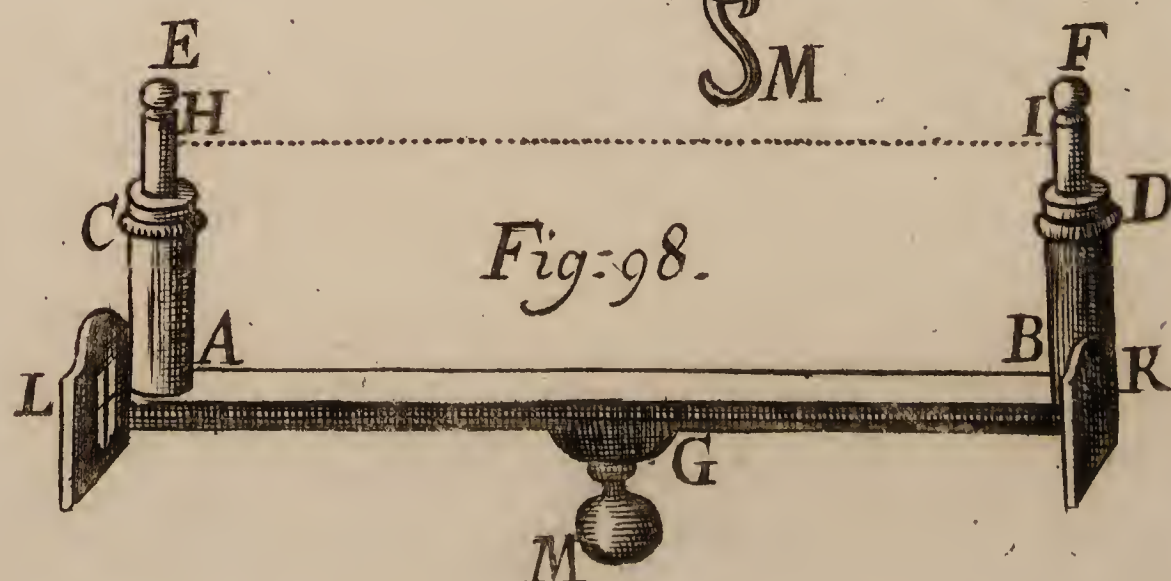
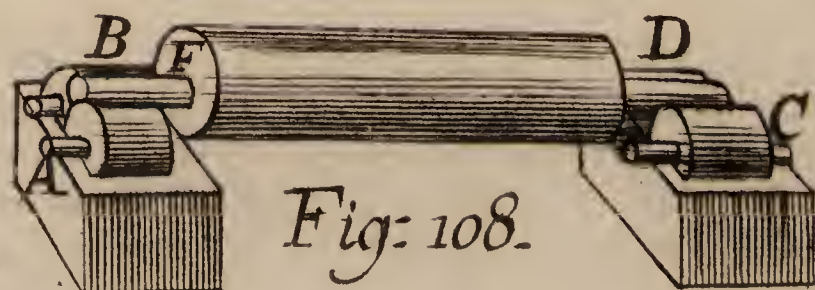
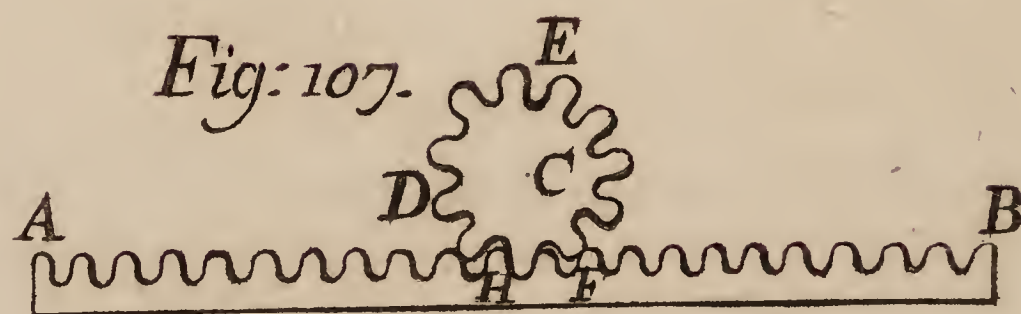
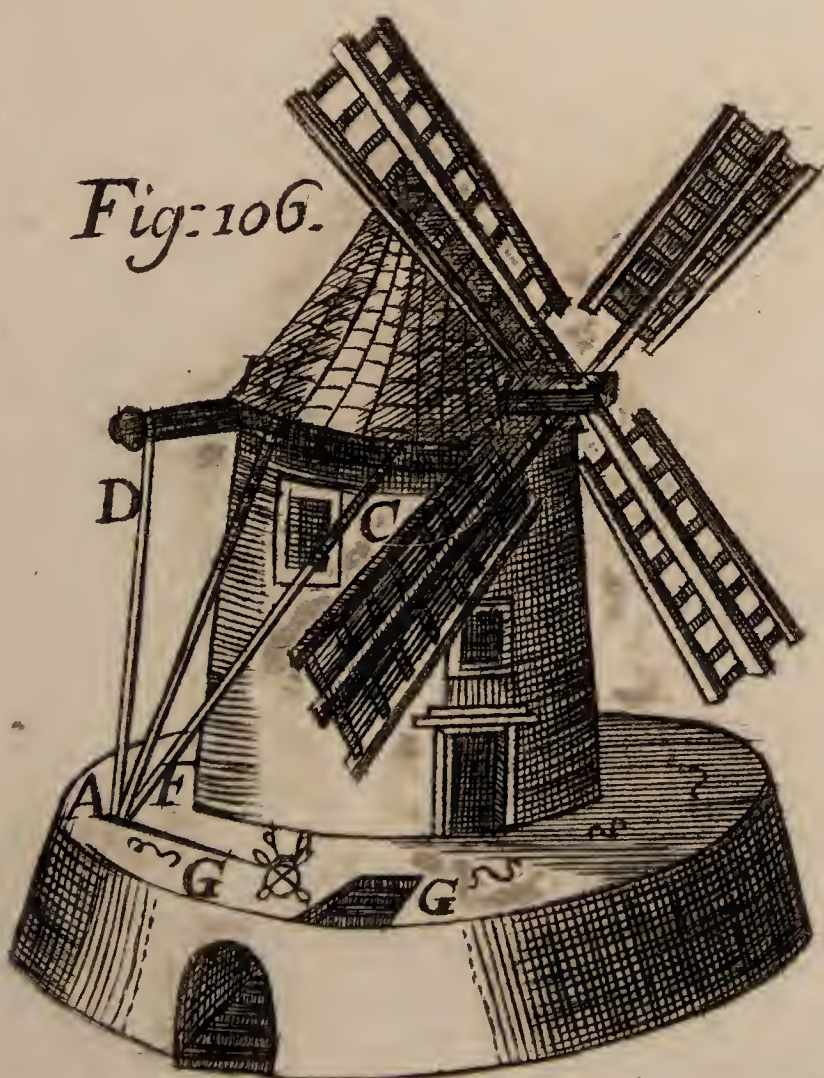
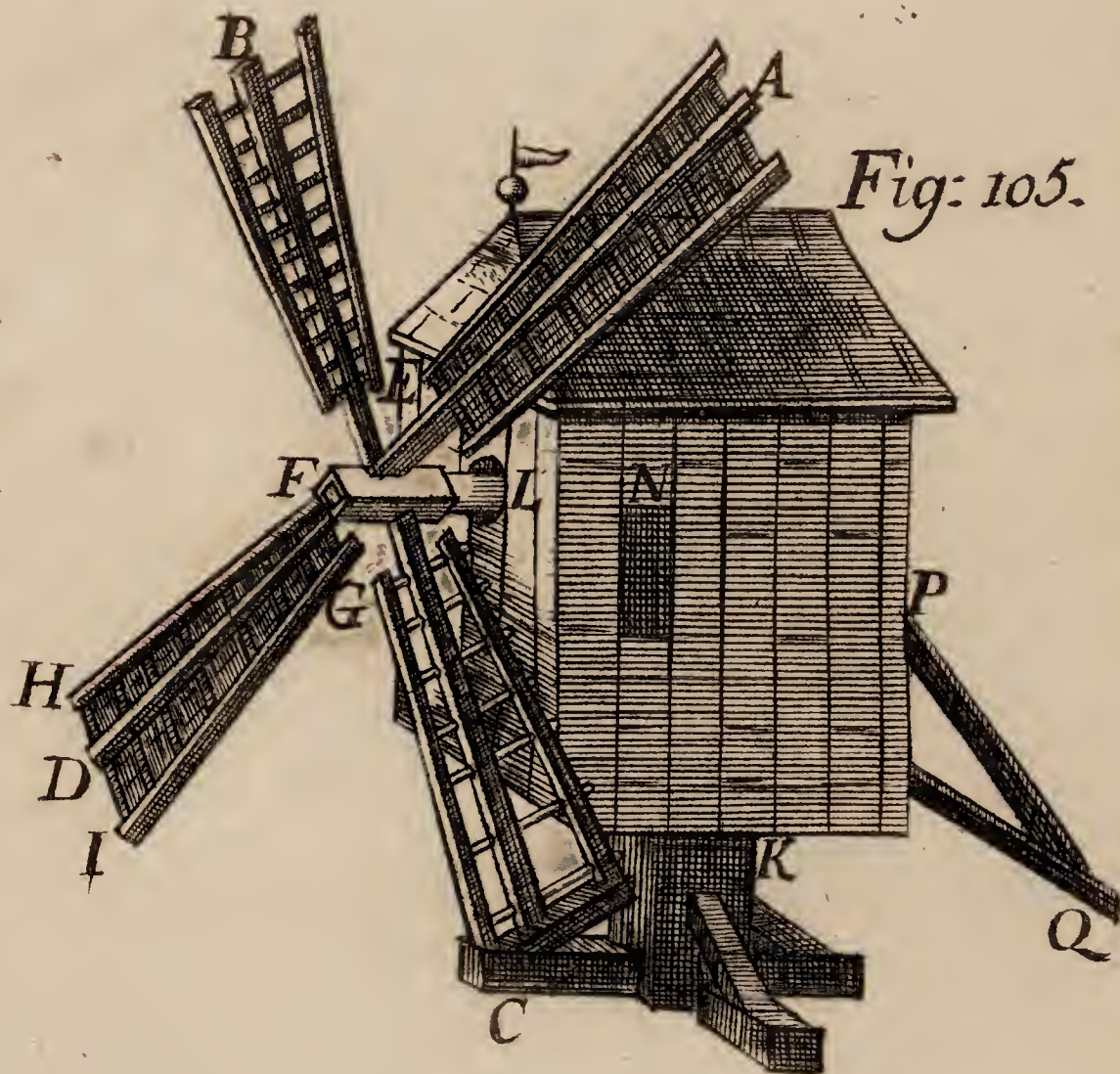
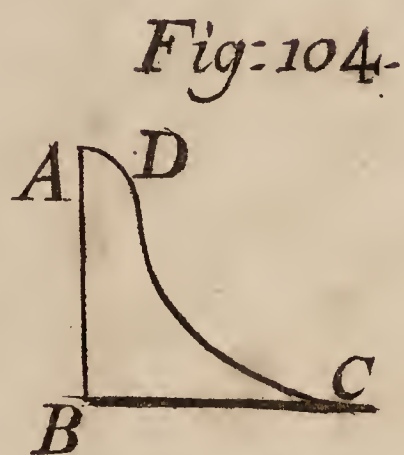
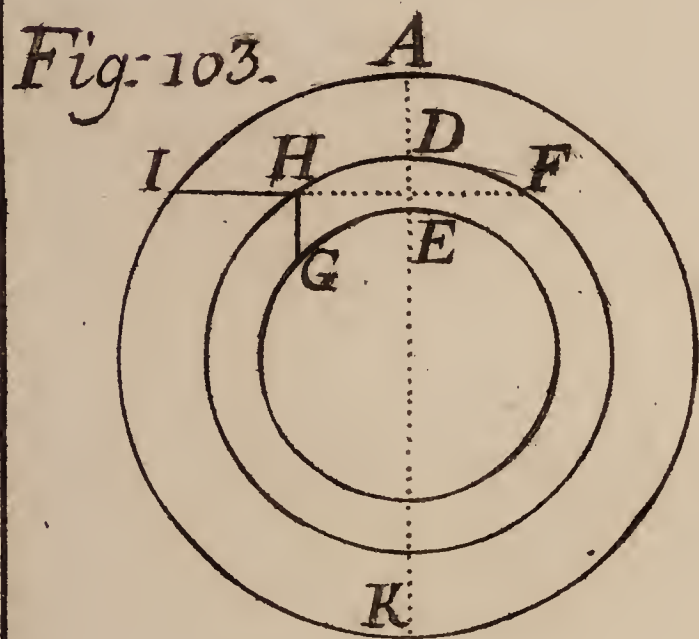
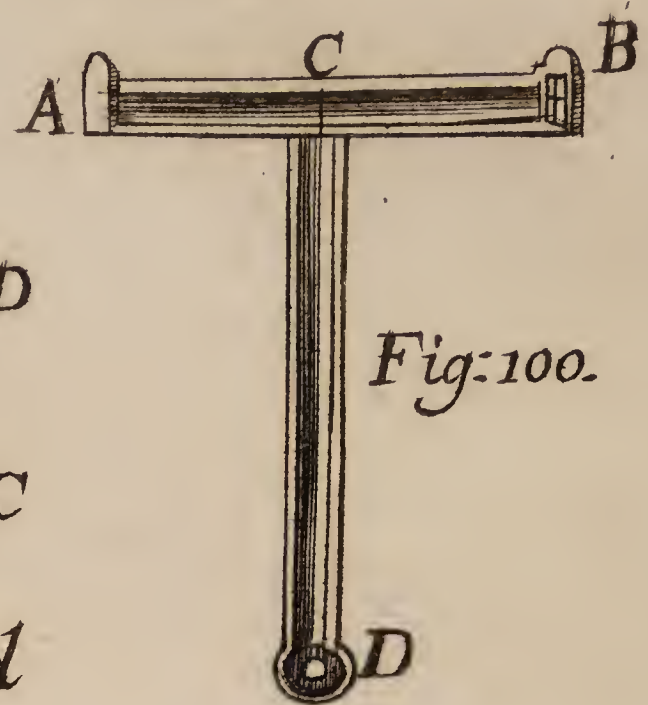
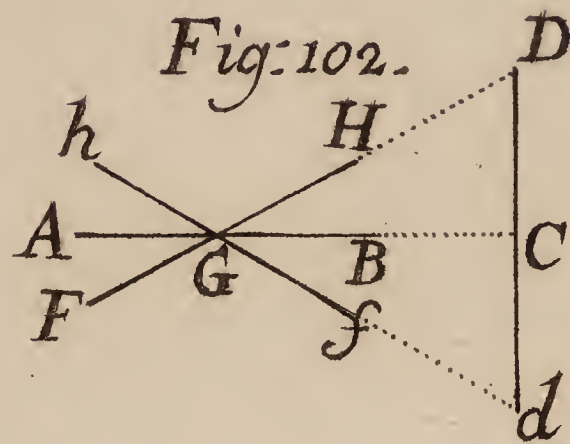
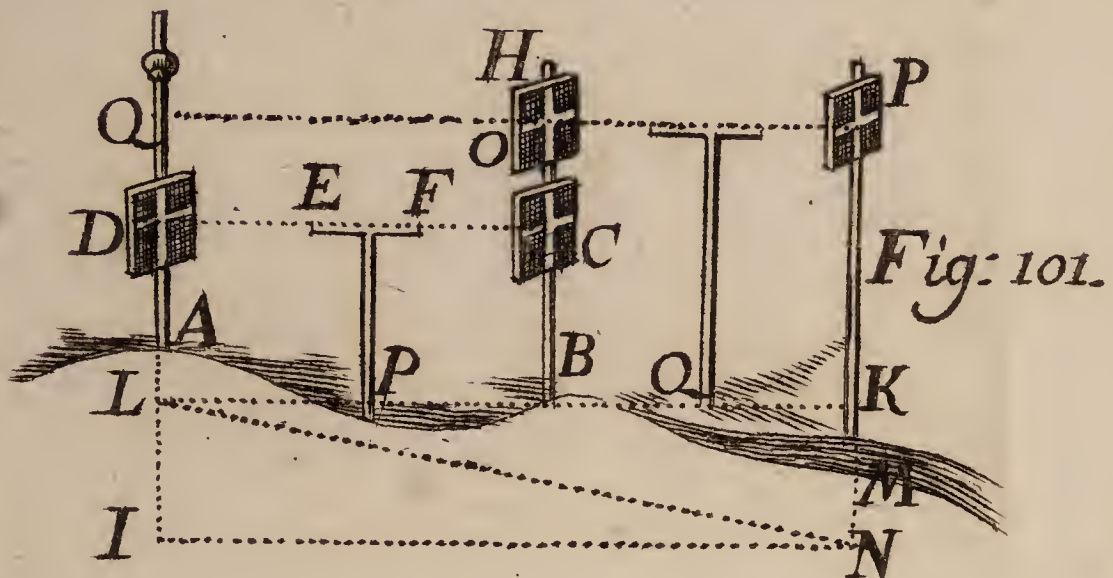
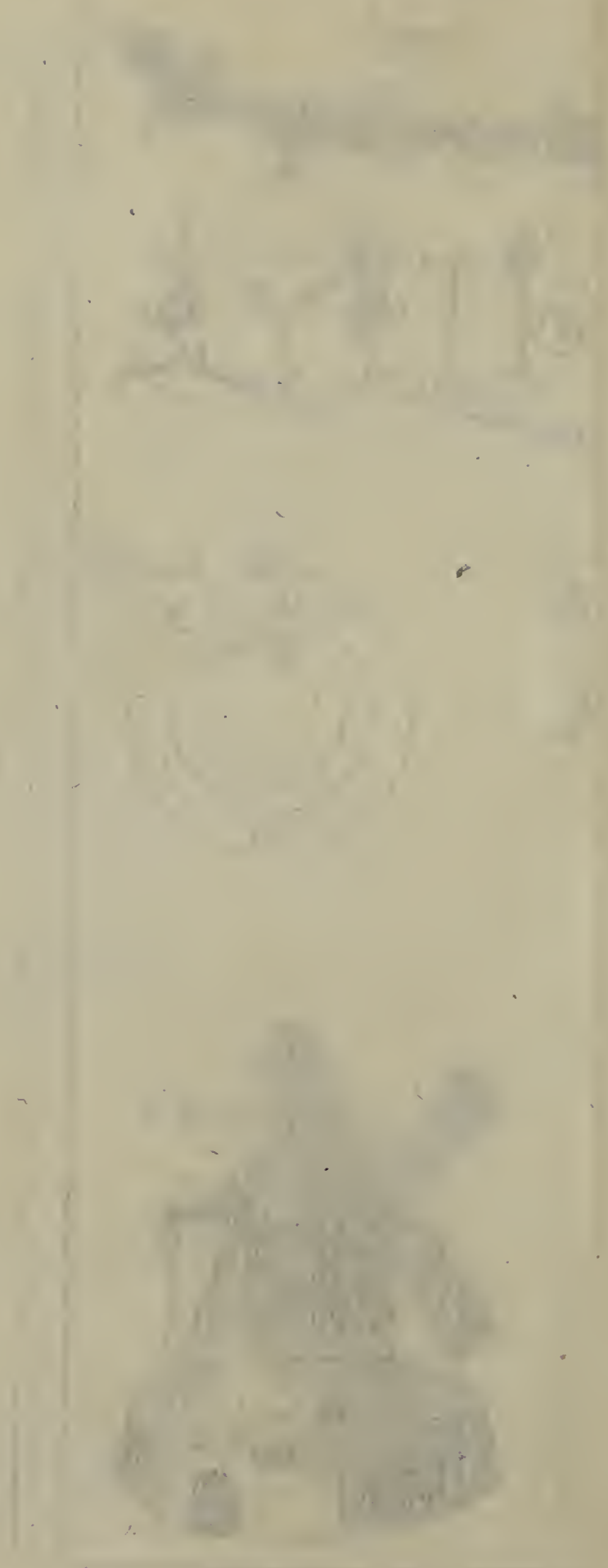
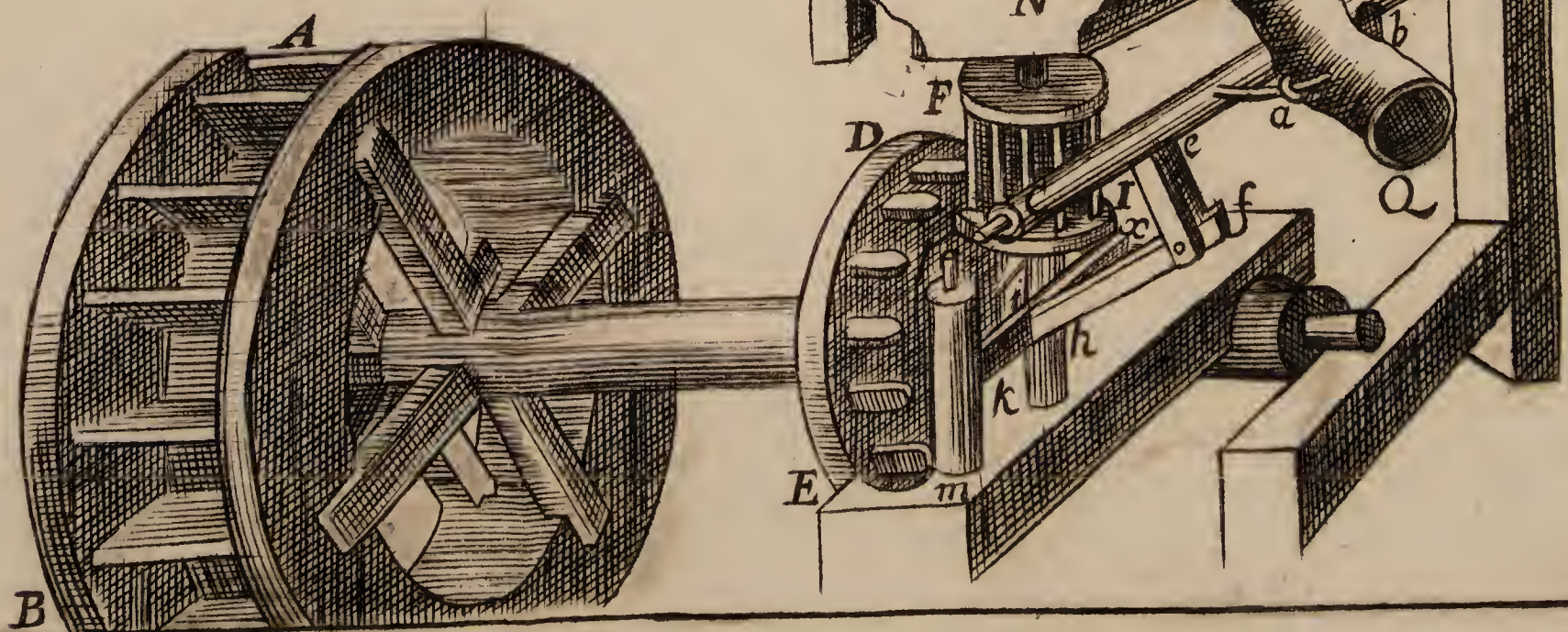
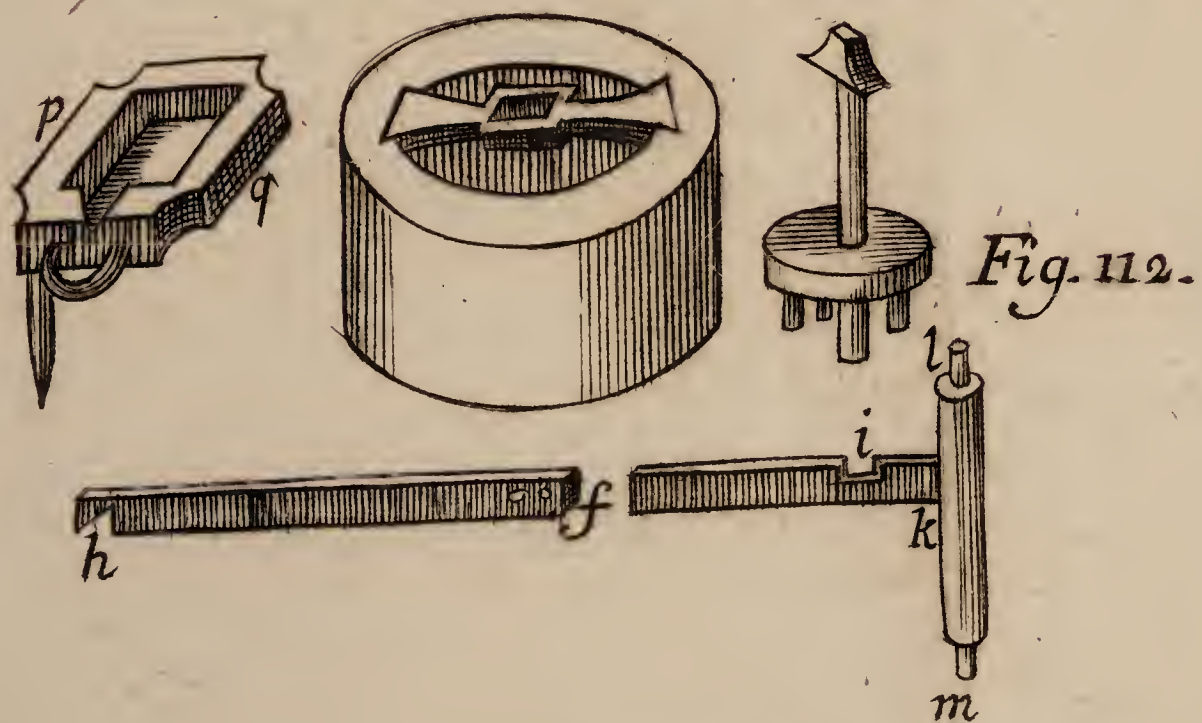
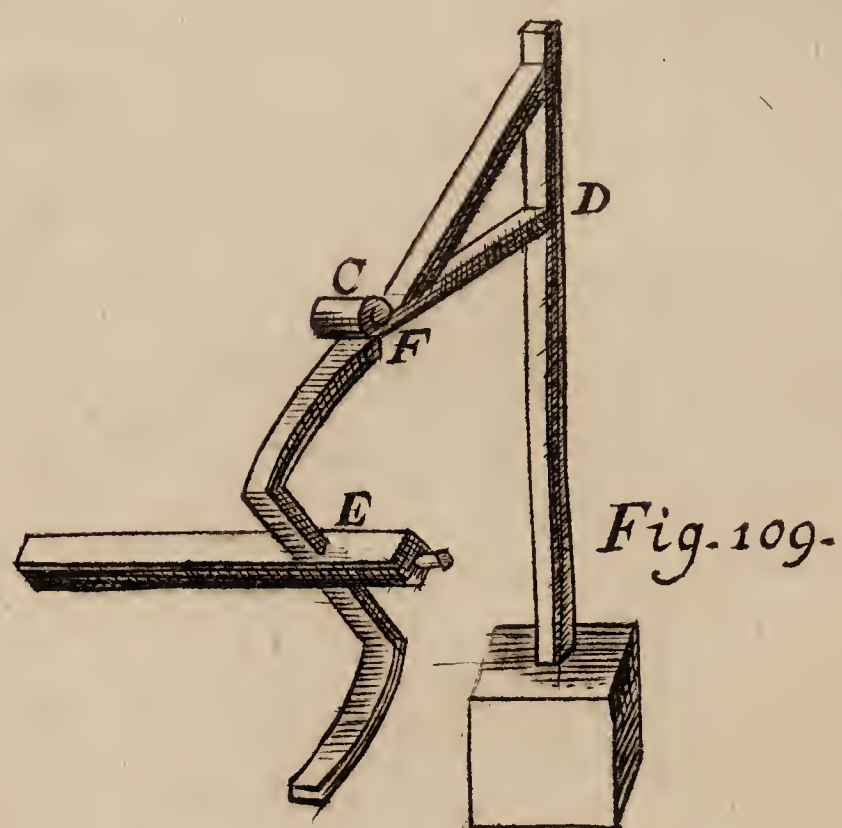
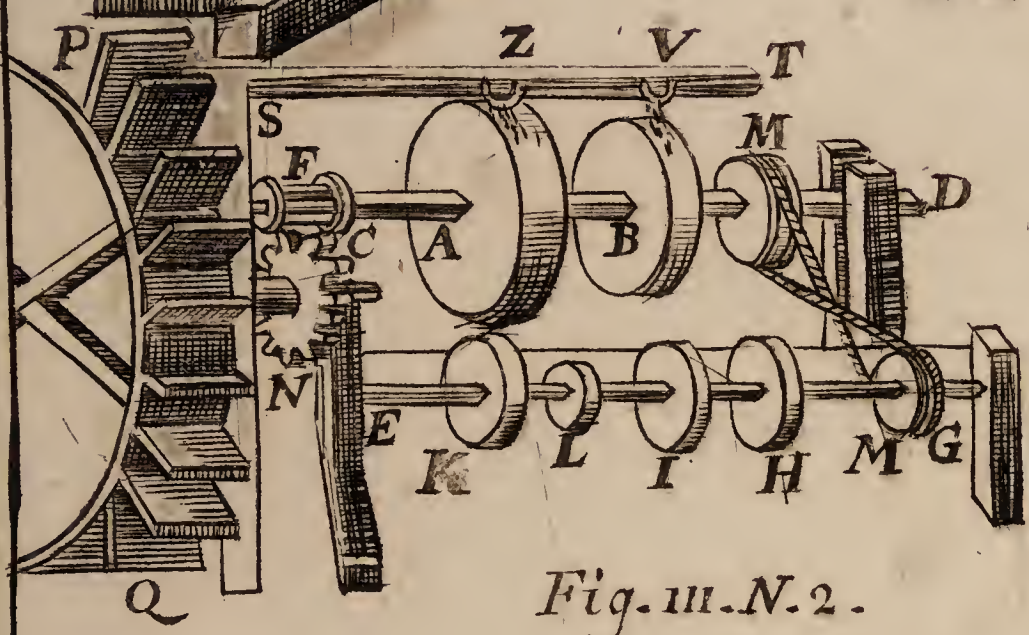
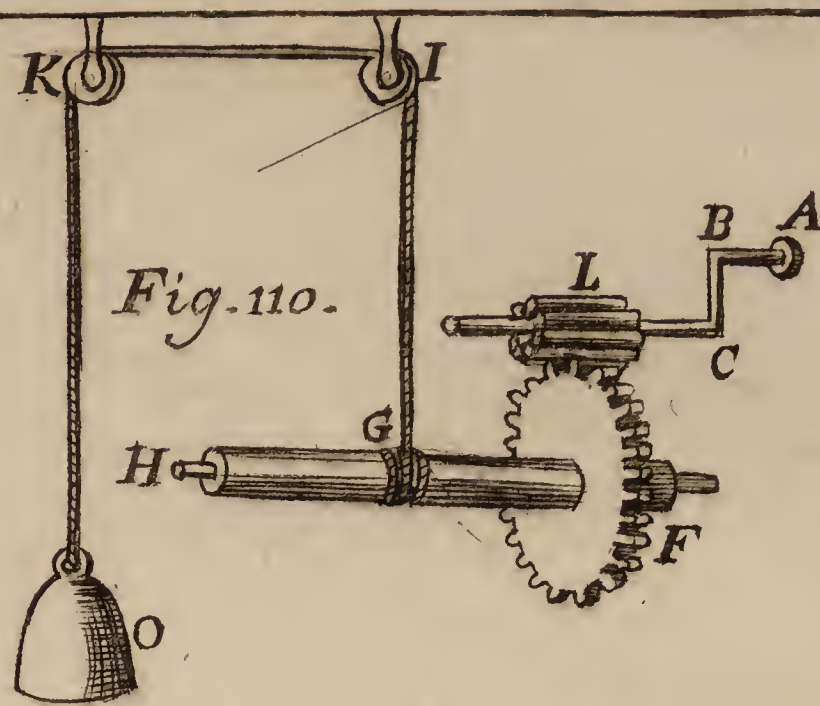
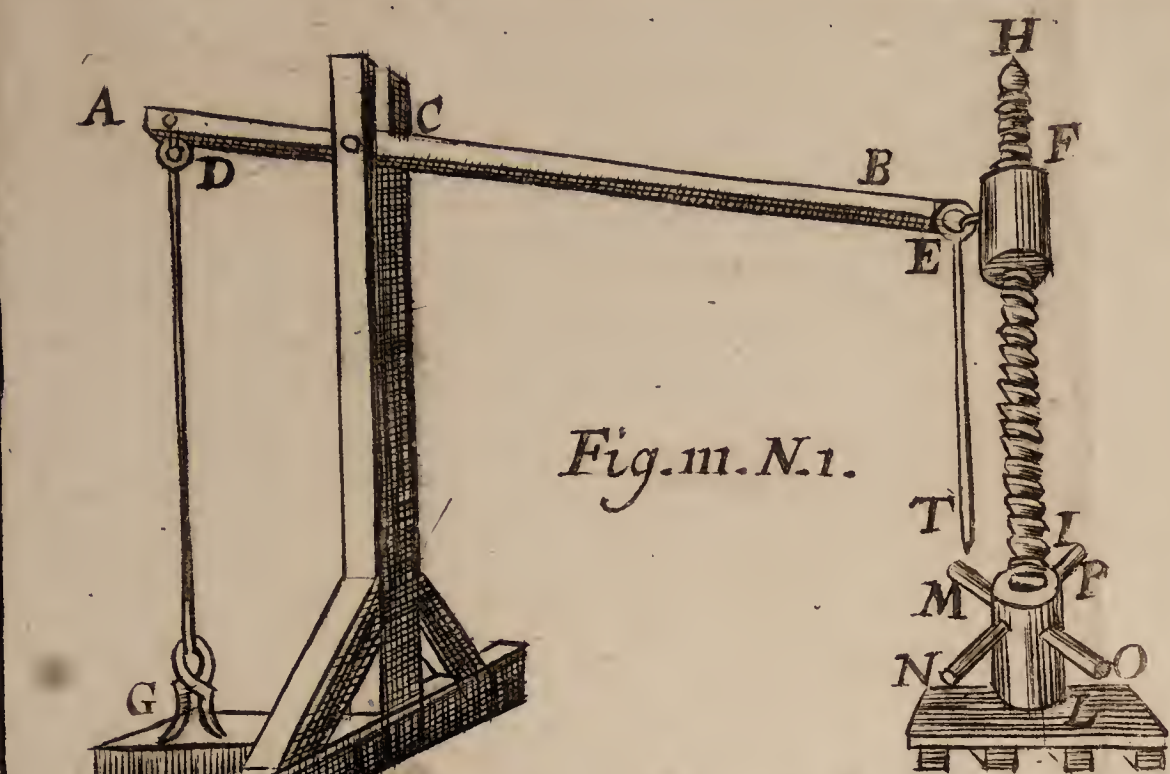


Fig: Mechan: Tab: IX.







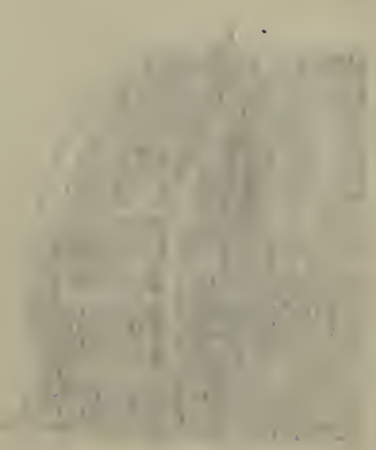
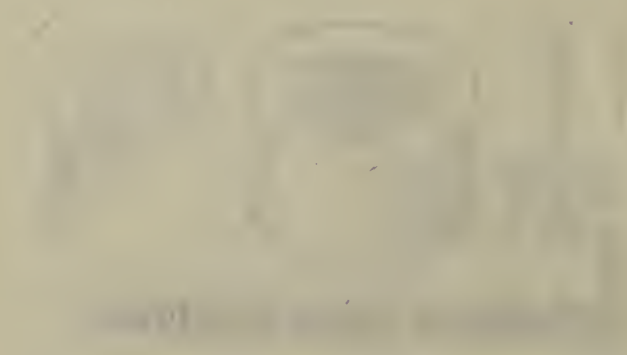
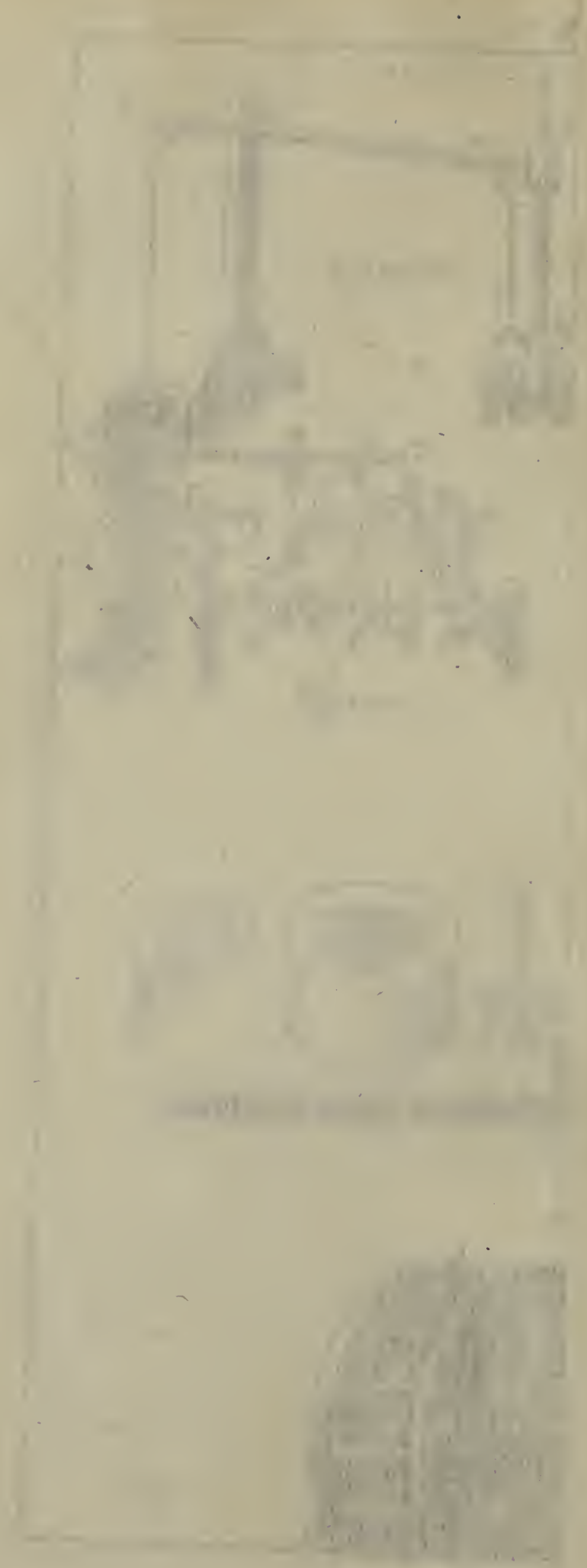


Fig. 115.

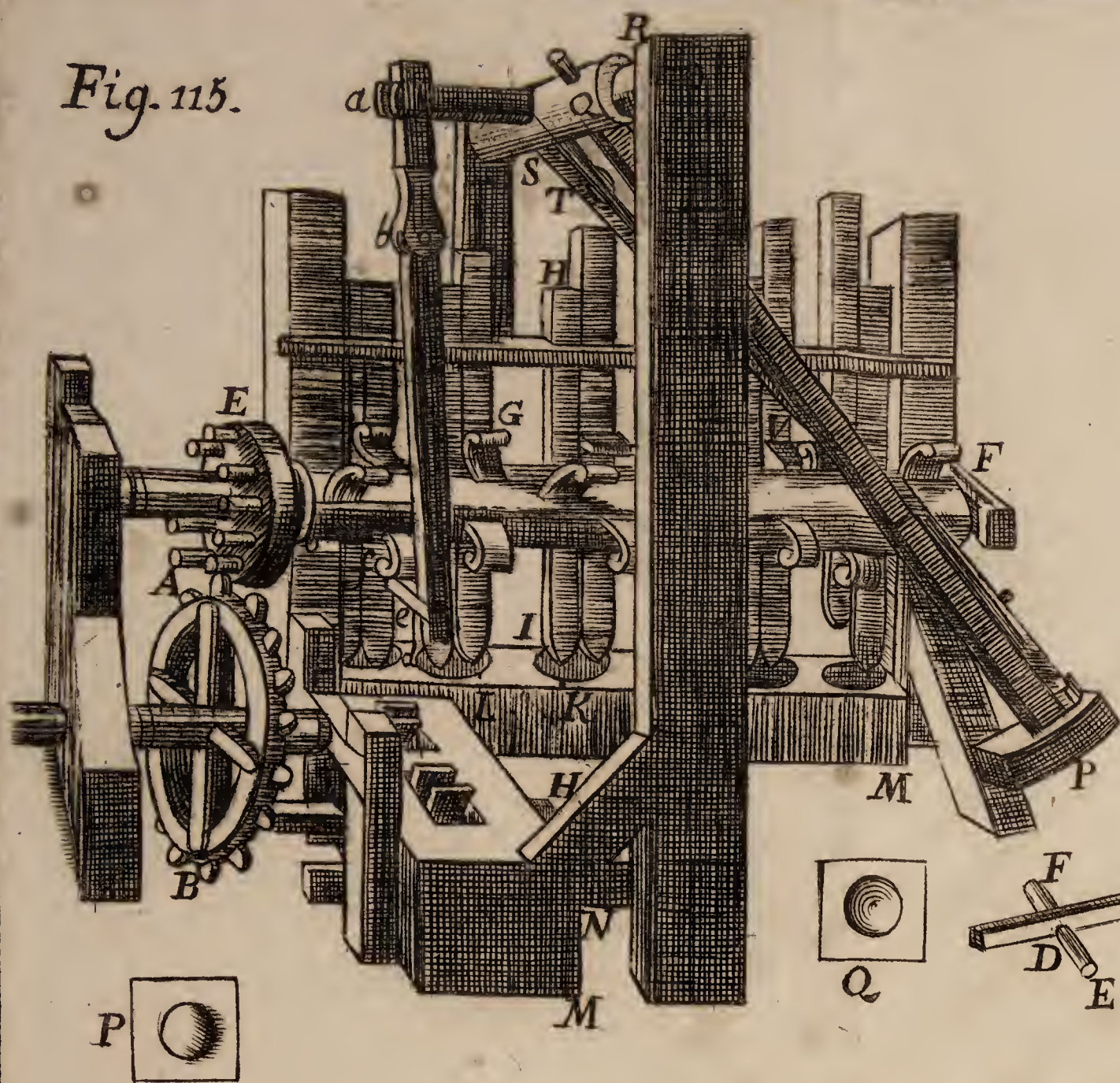


Fig. 117.

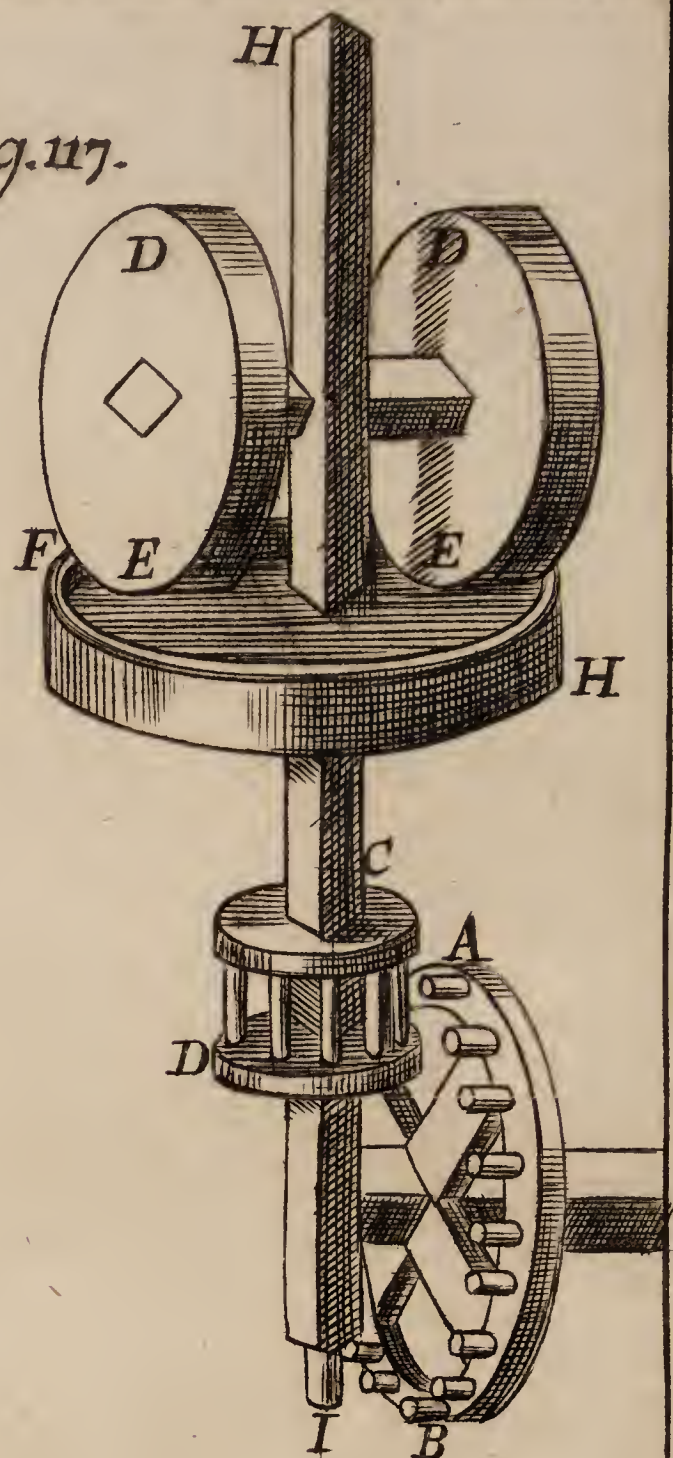


Fig. 116.



Fig. 114.

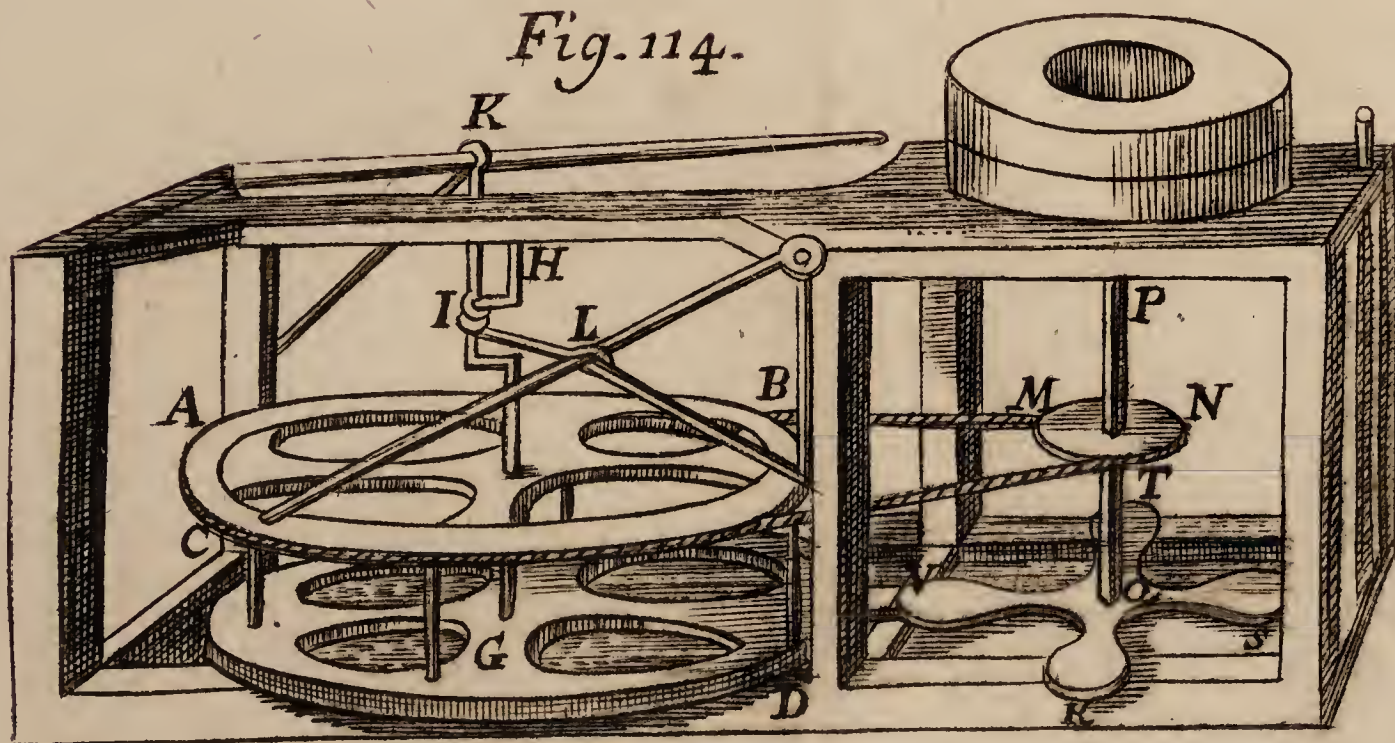


Fig. 113.

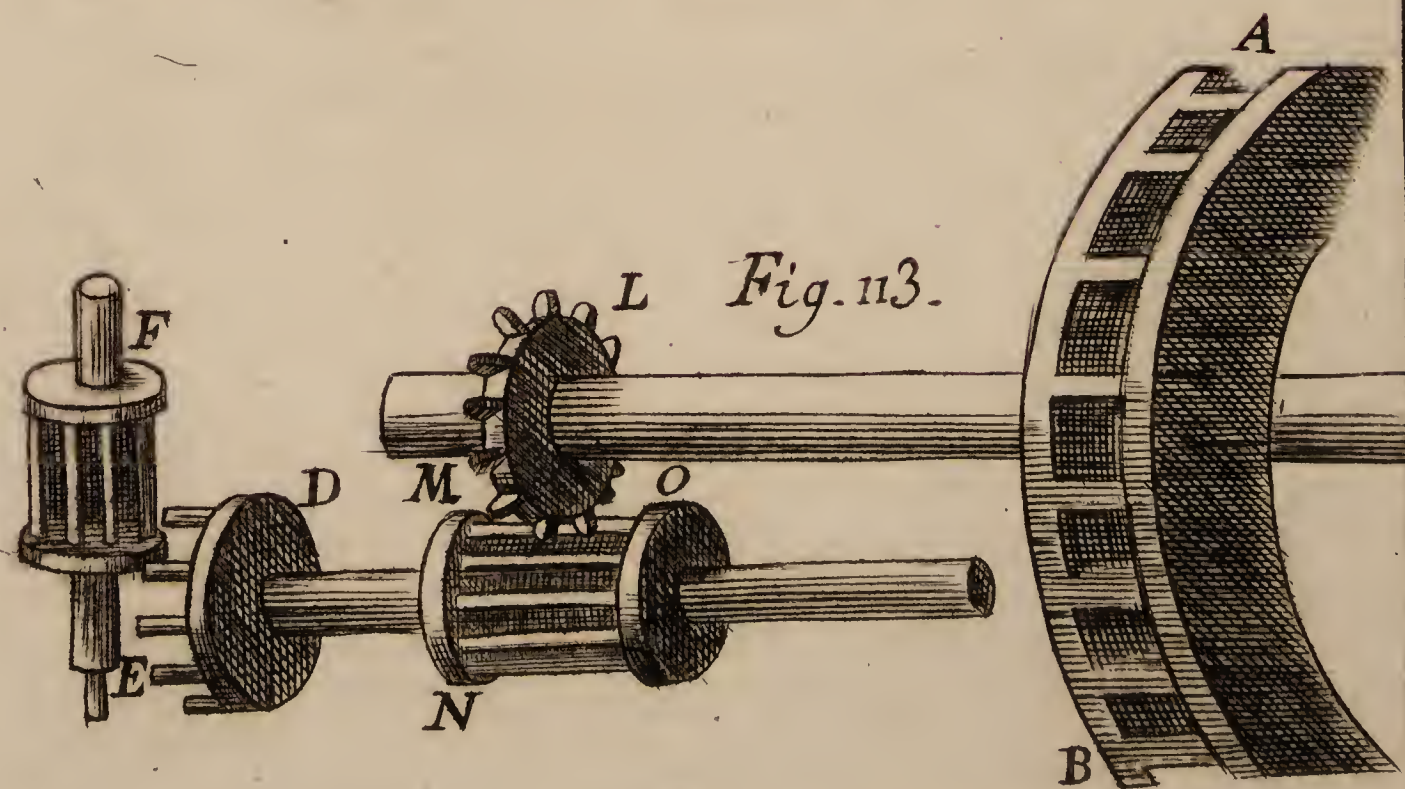


Fig: Mechan: Tab: XII.

Fig. 121. N. 1.

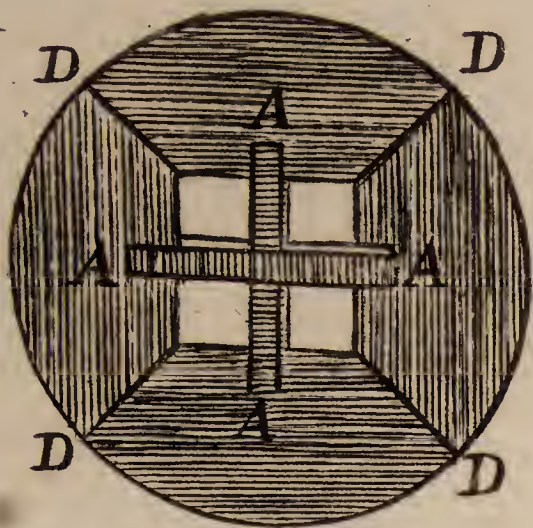


Fig. 121. N. 2.

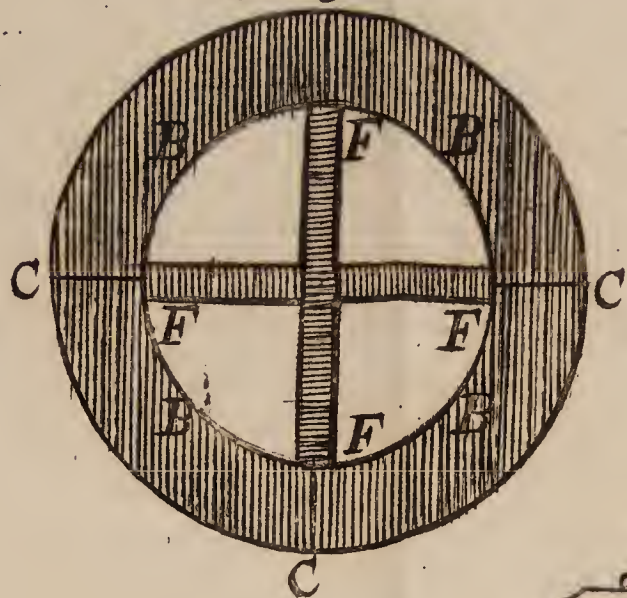


Fig. 118.

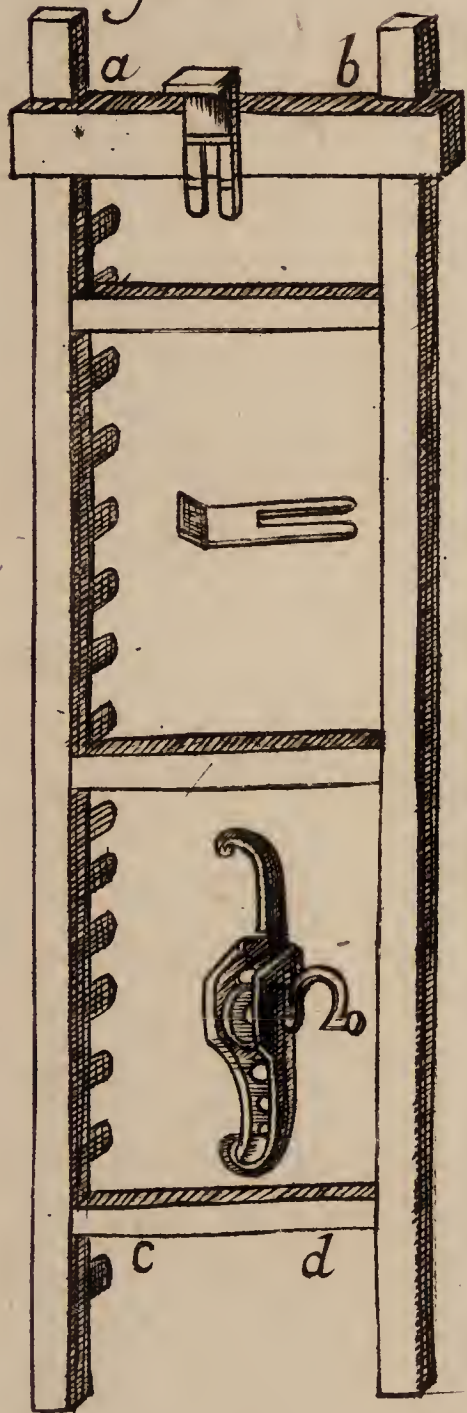


Fig. 120.

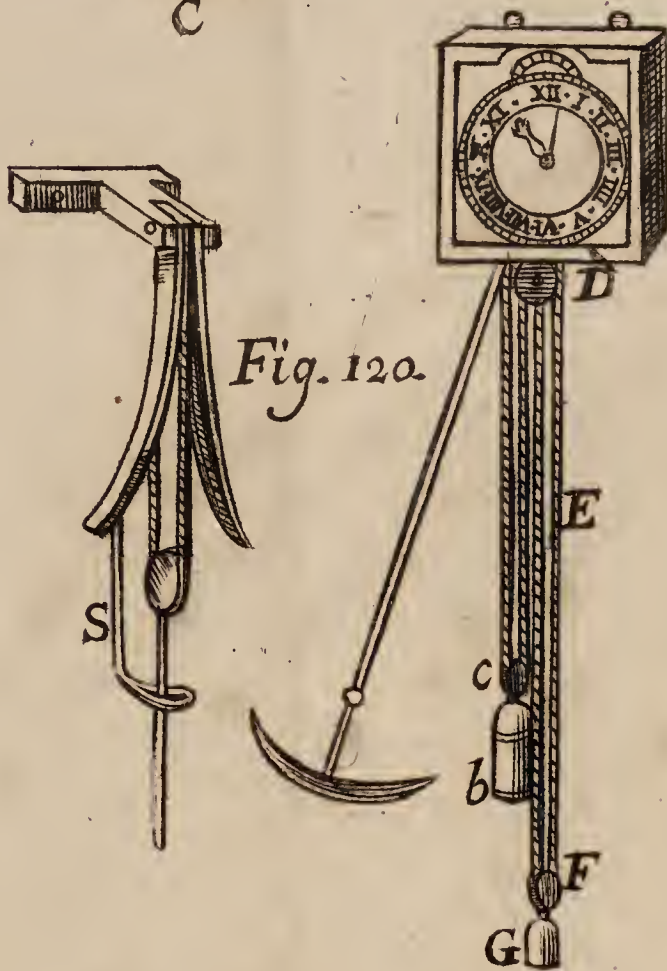


Fig. 119.

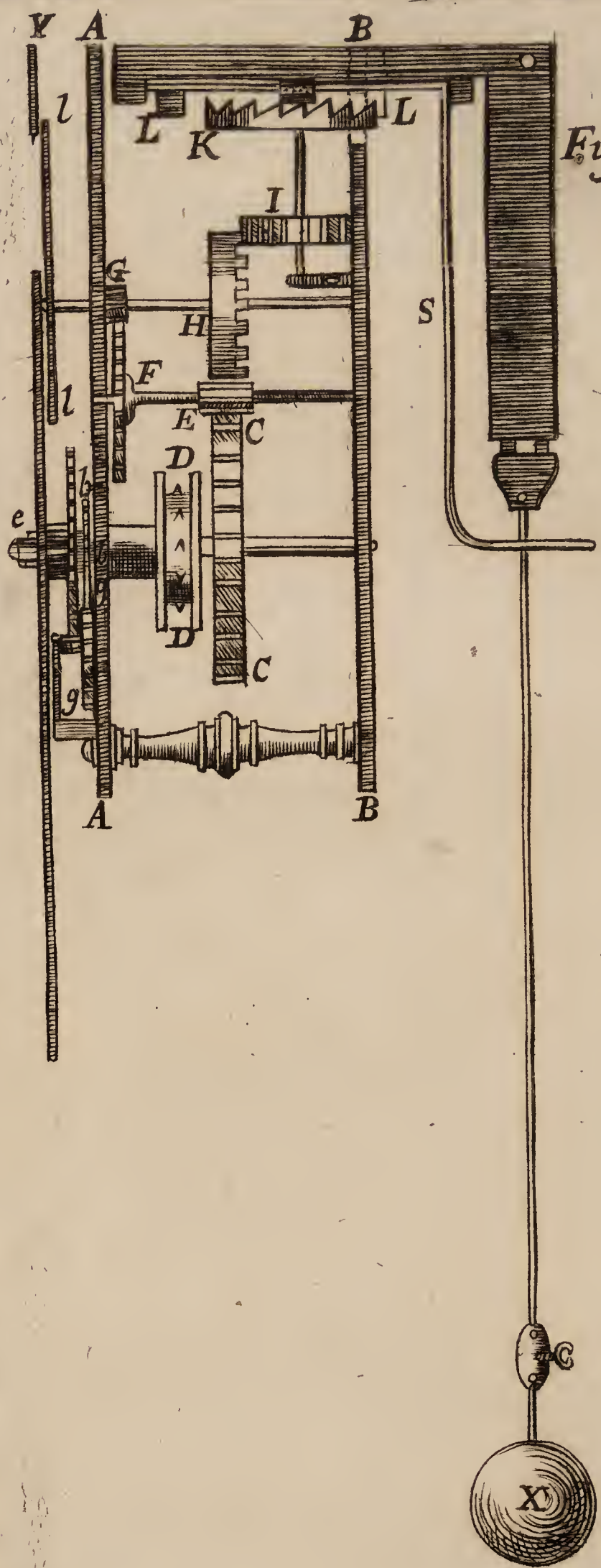


Fig. 118.

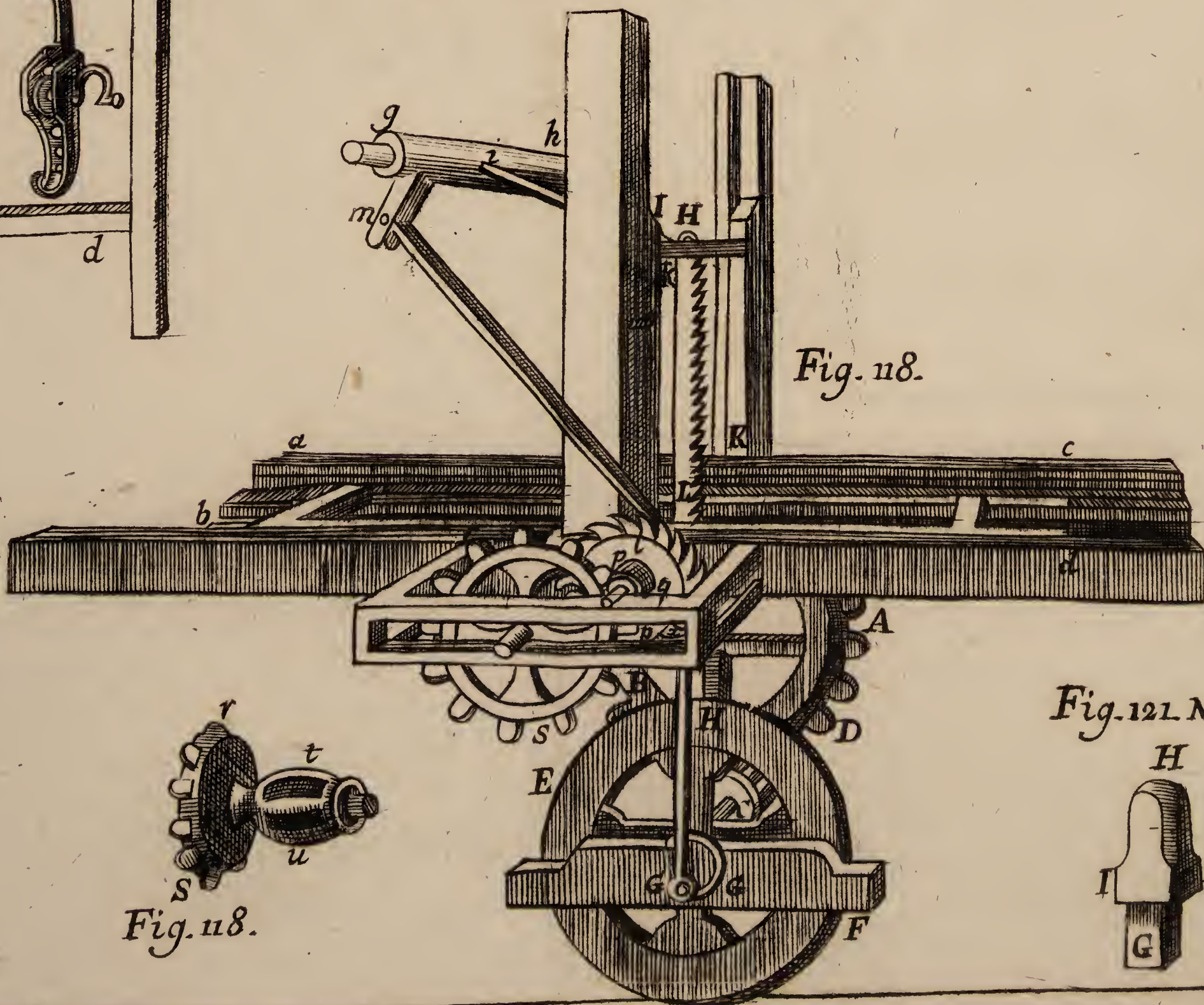


Fig. 121. N. 3.



Fig. Mechan. Tab. XIII.

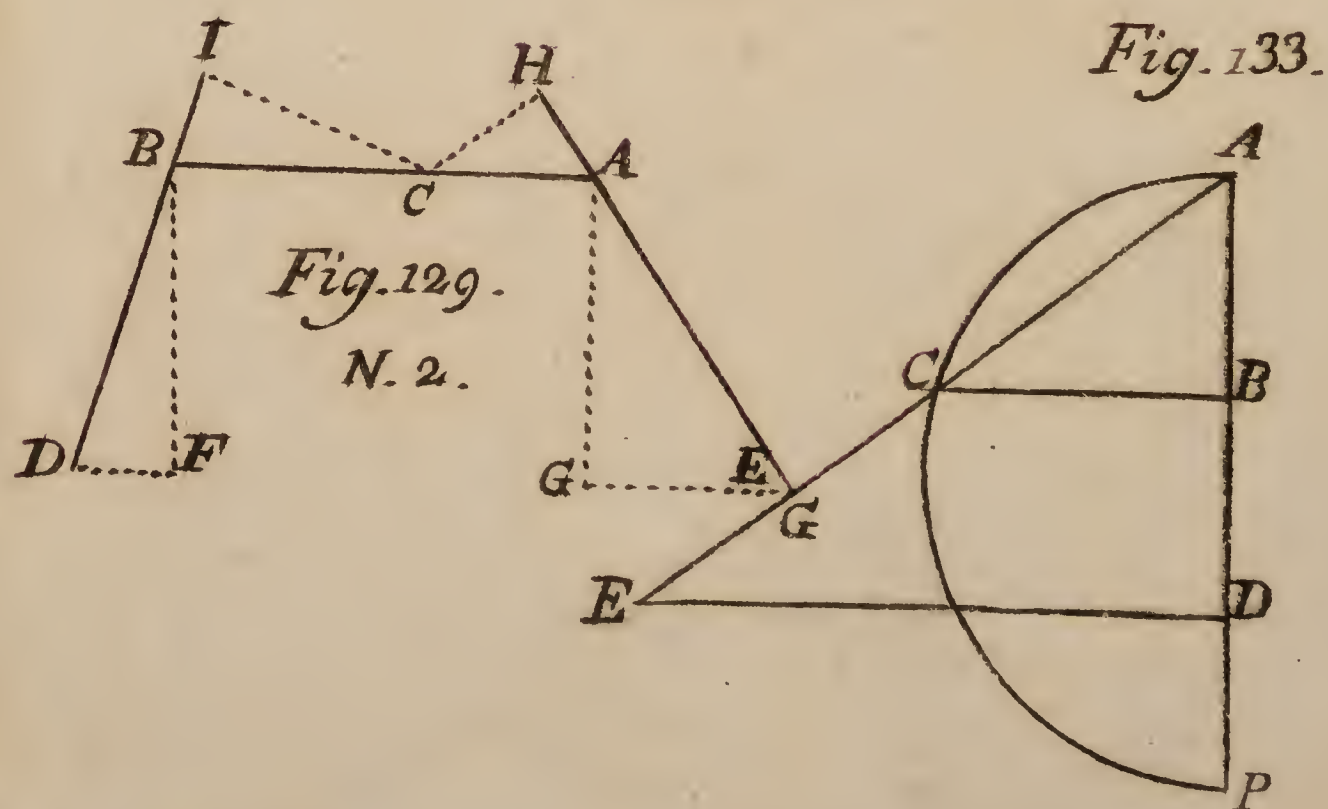
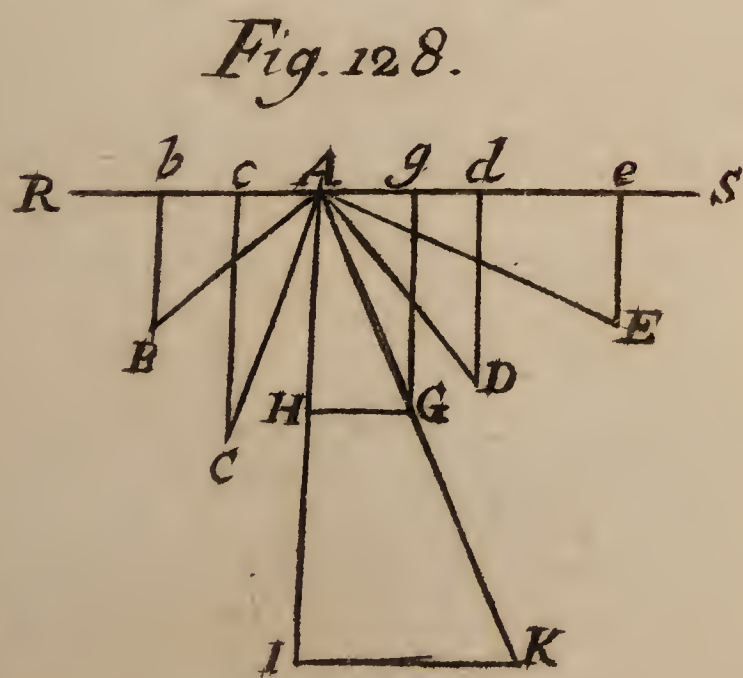
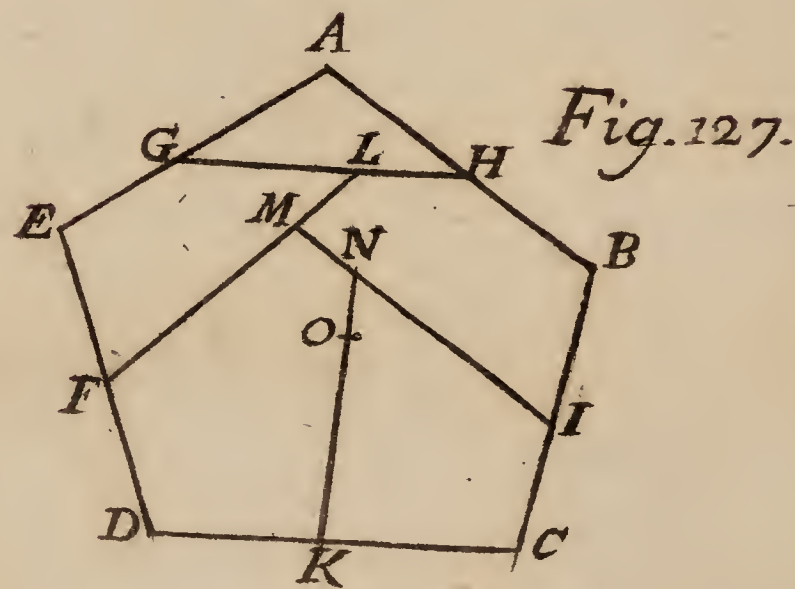
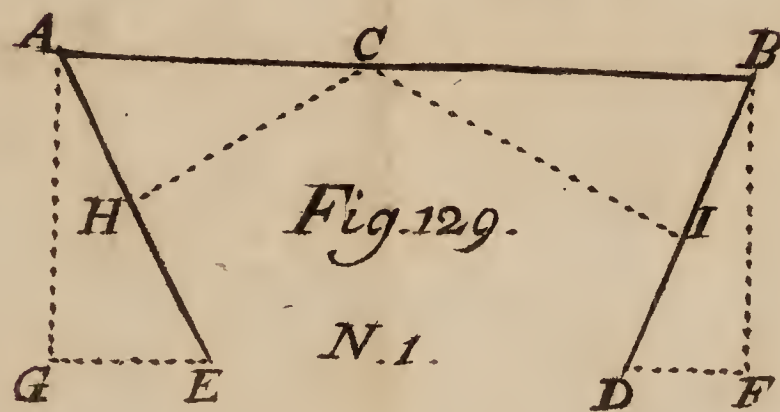
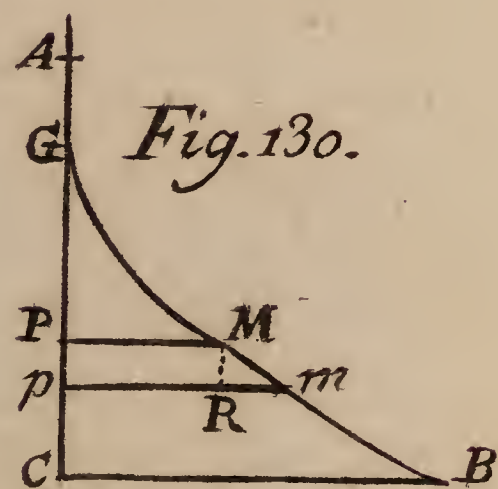
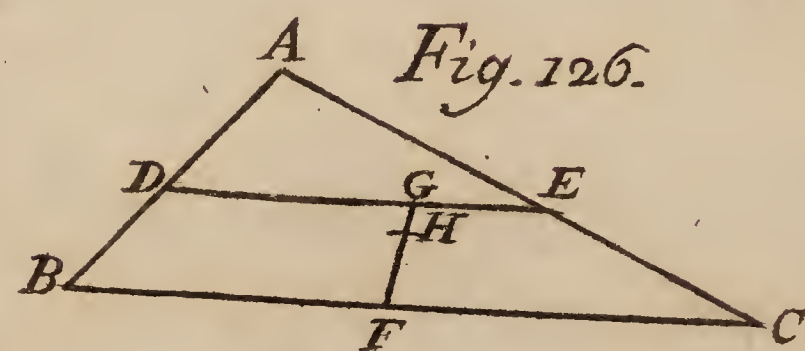
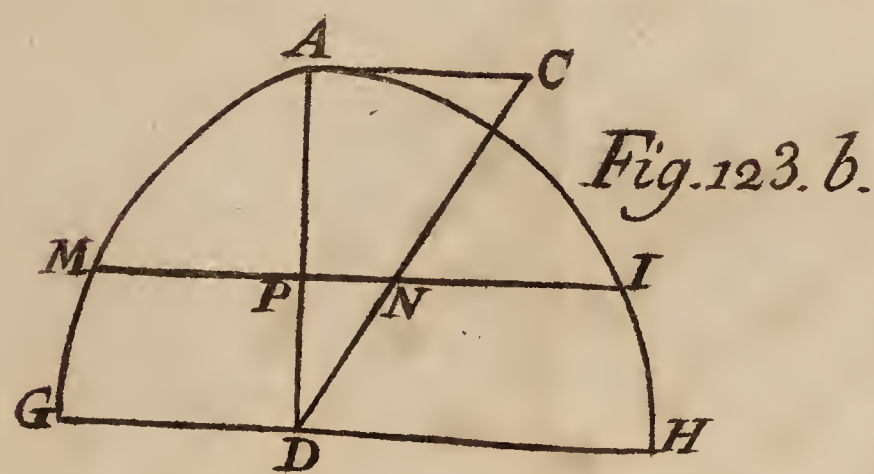
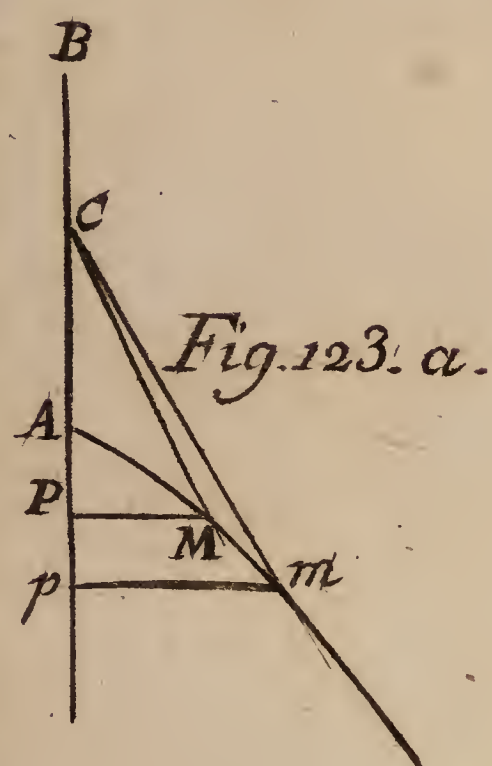
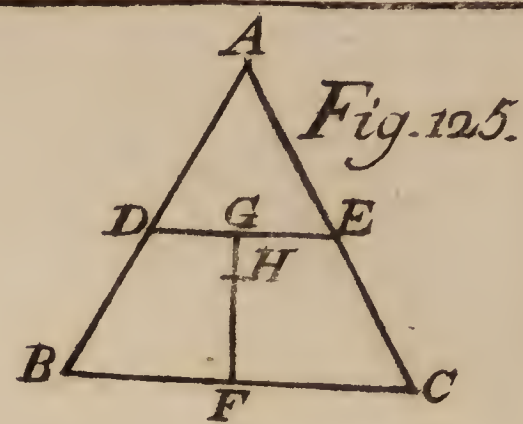
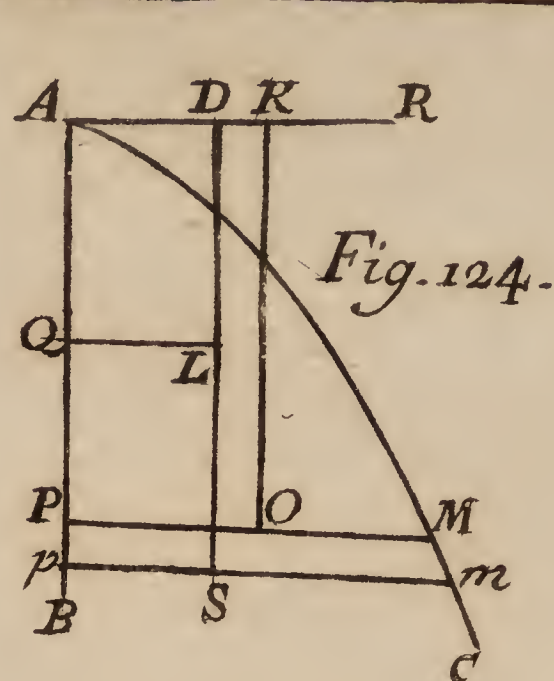
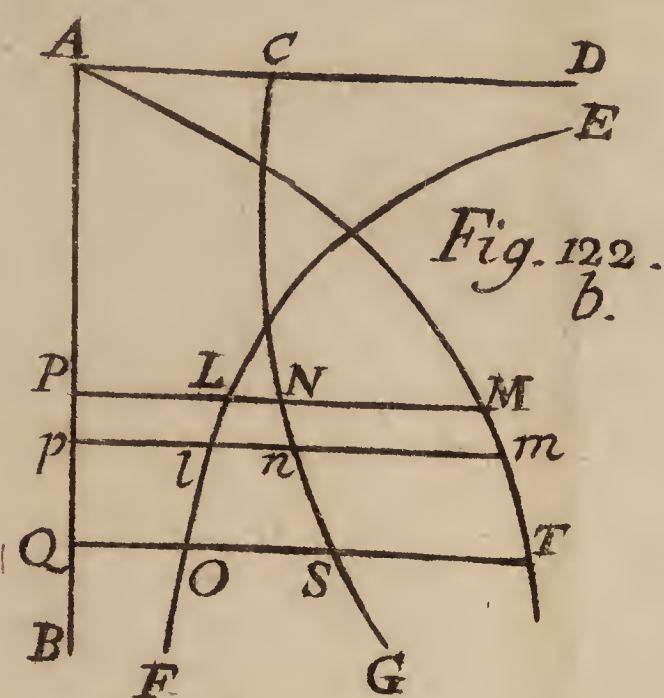
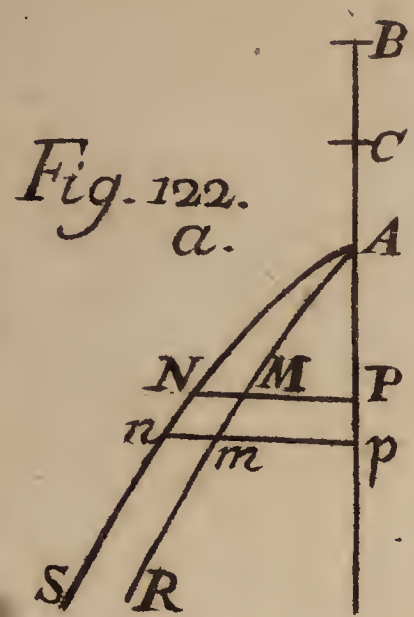
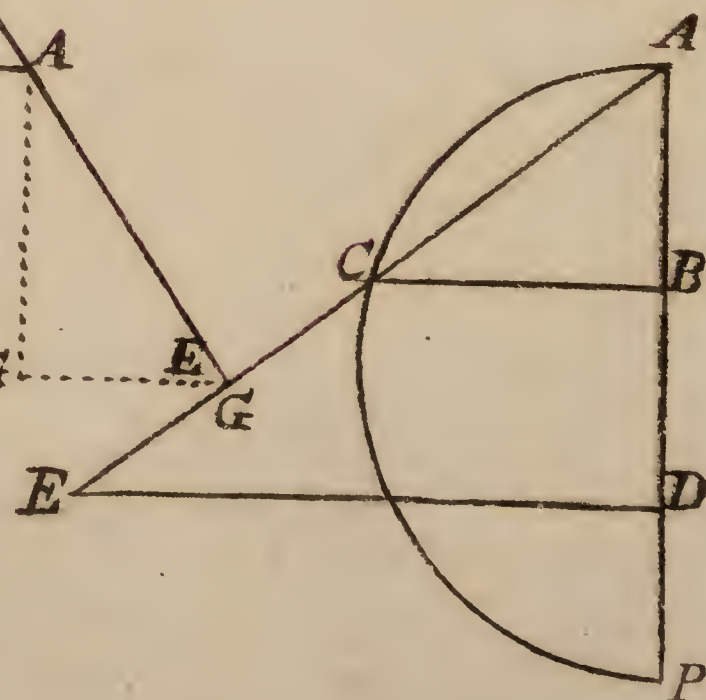


Fig. 133.



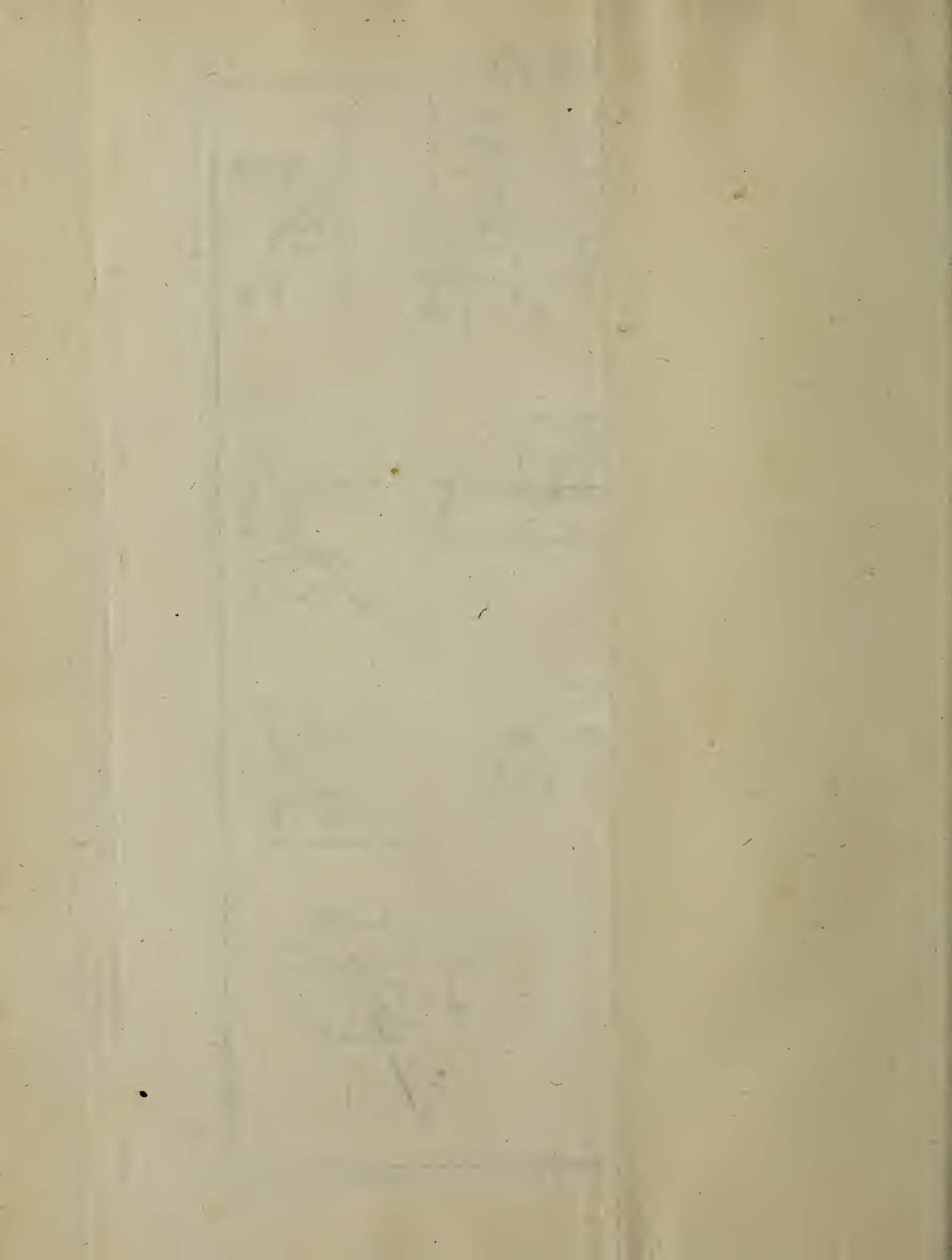


Fig. 131.

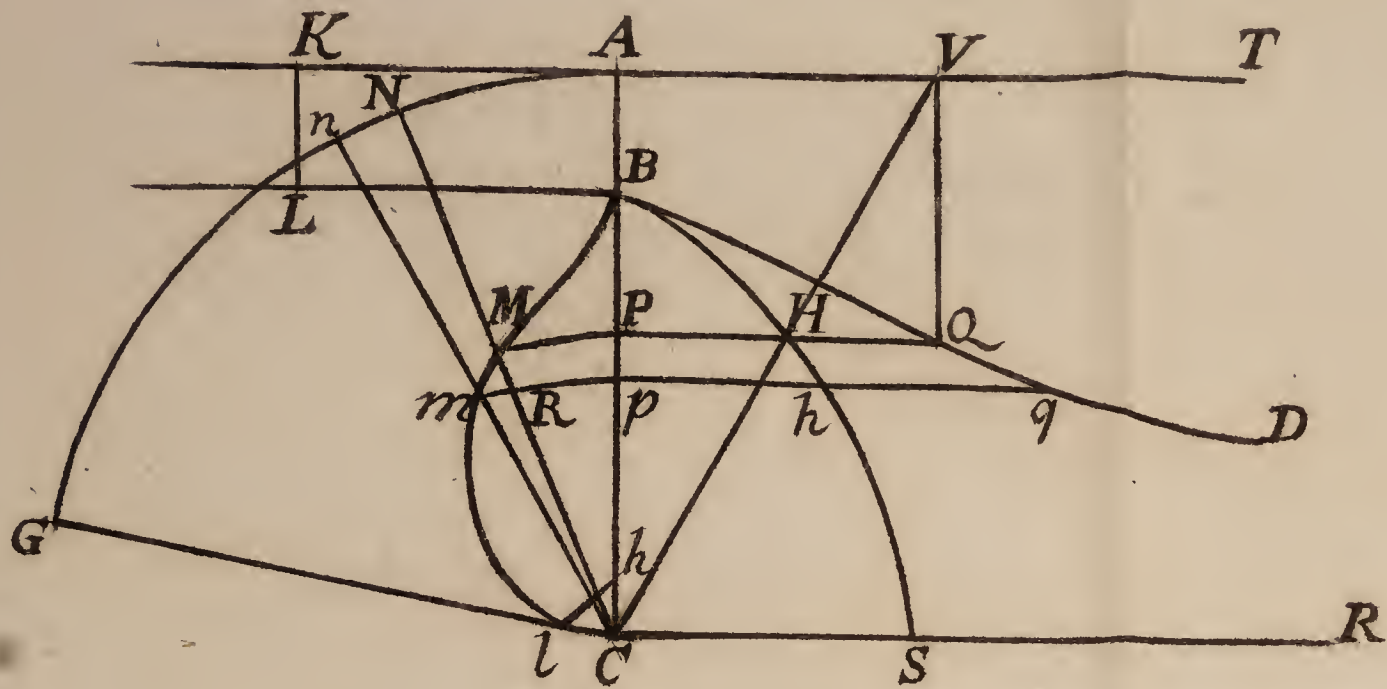


Fig. 134.

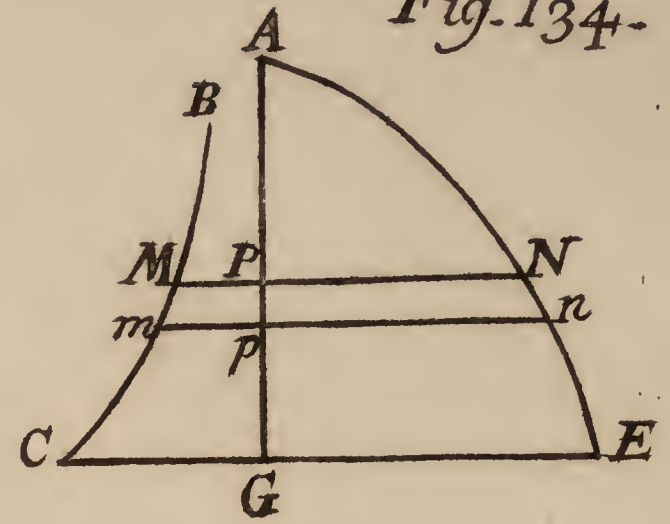


Fig. 136.

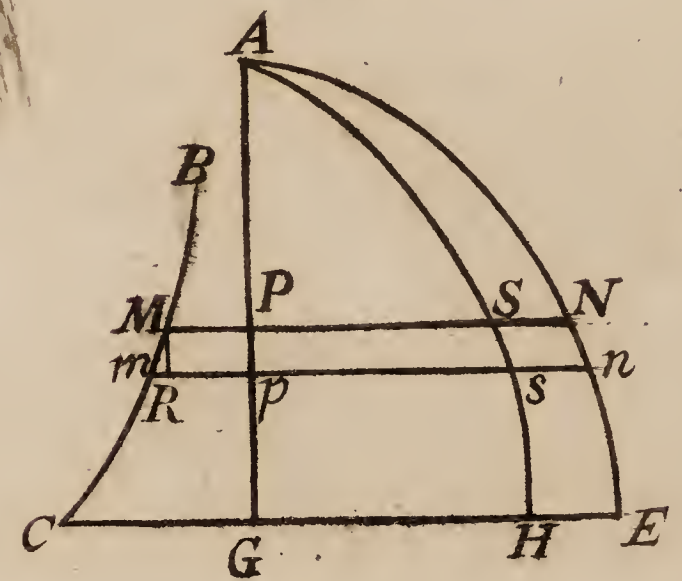


Fig. 132.

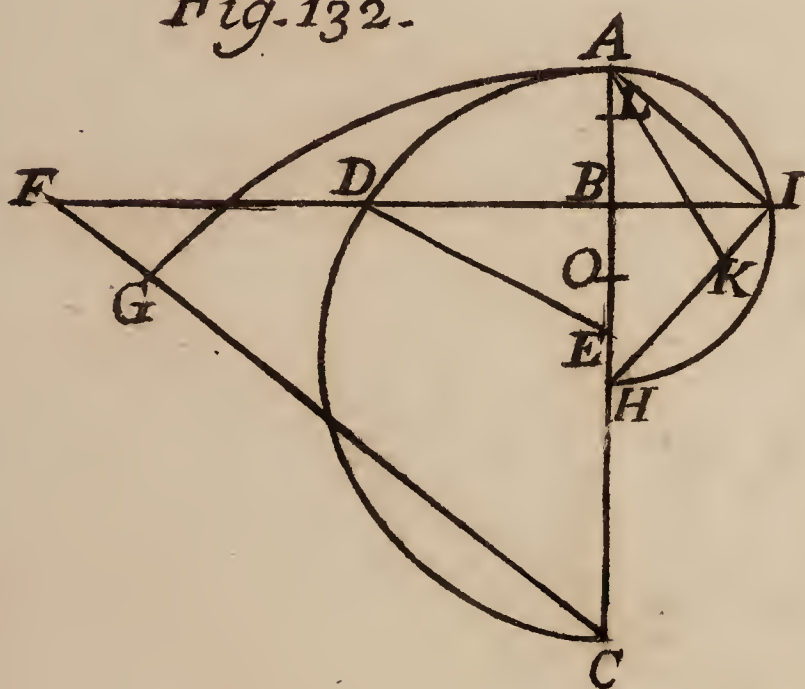


Fig. 135.

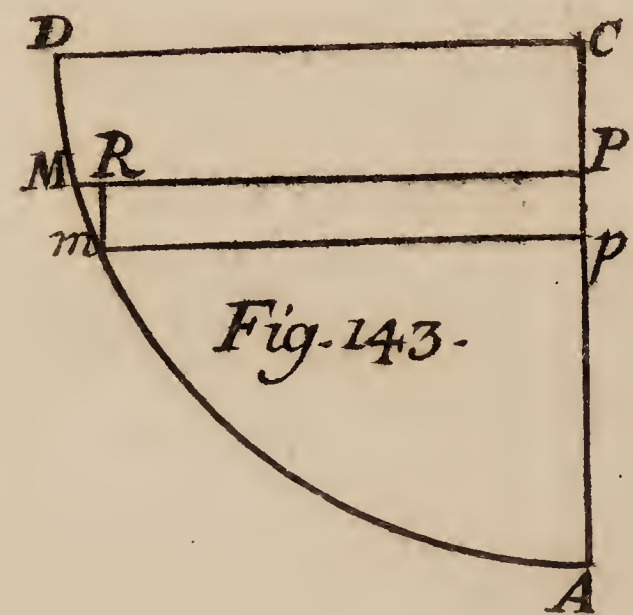
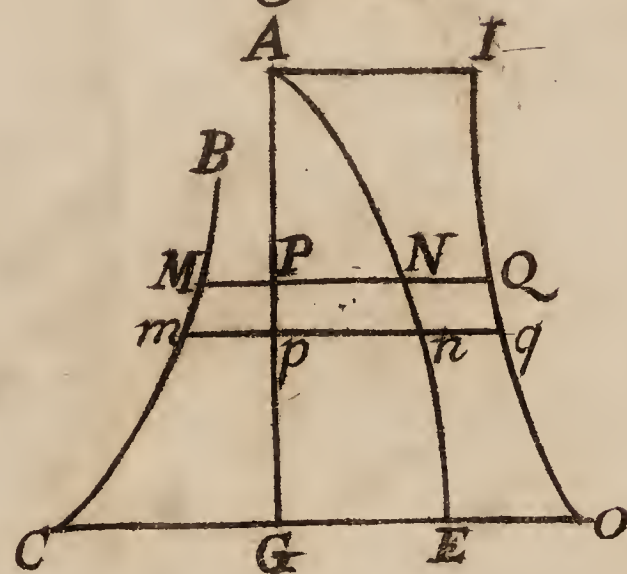
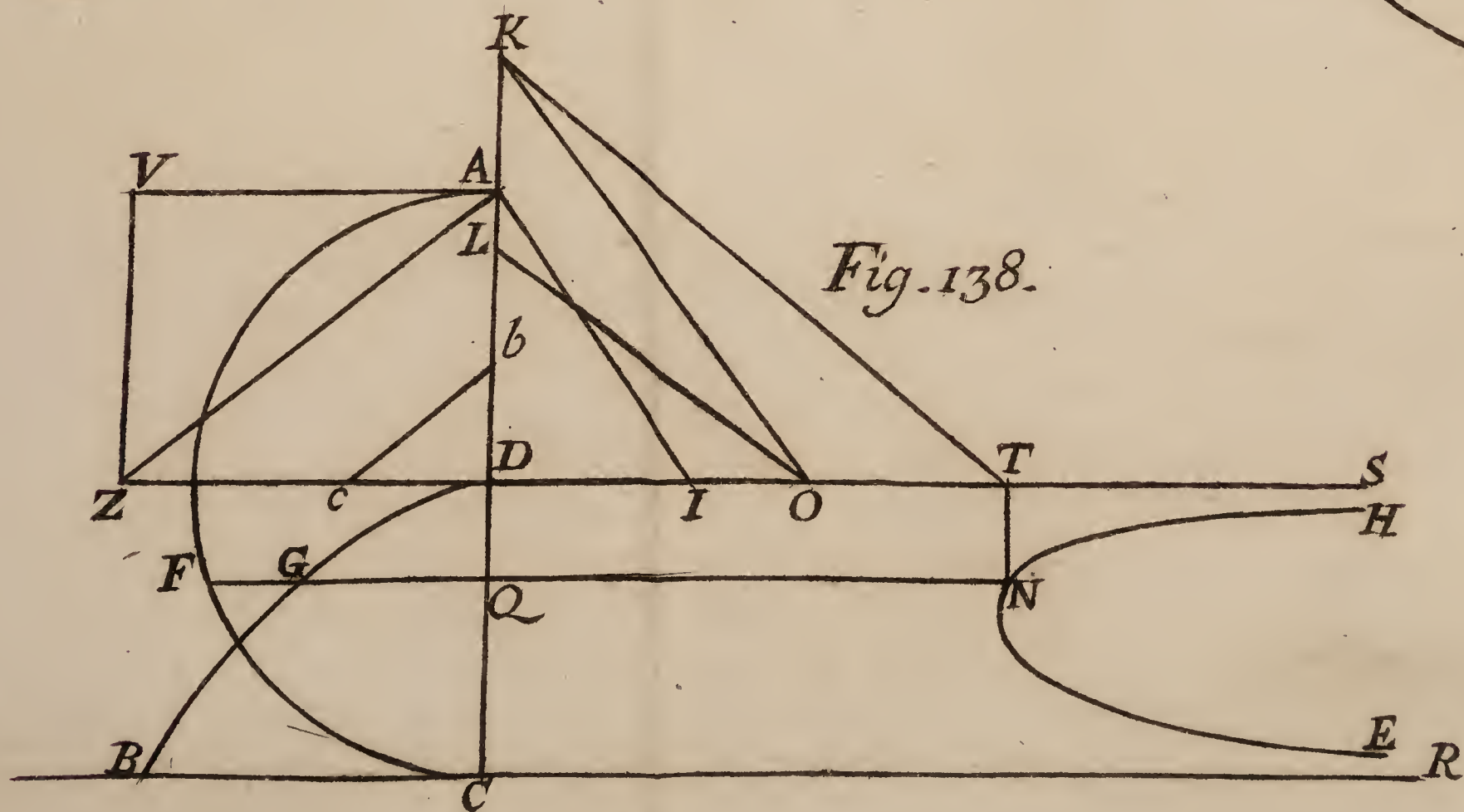


Fig. 138.



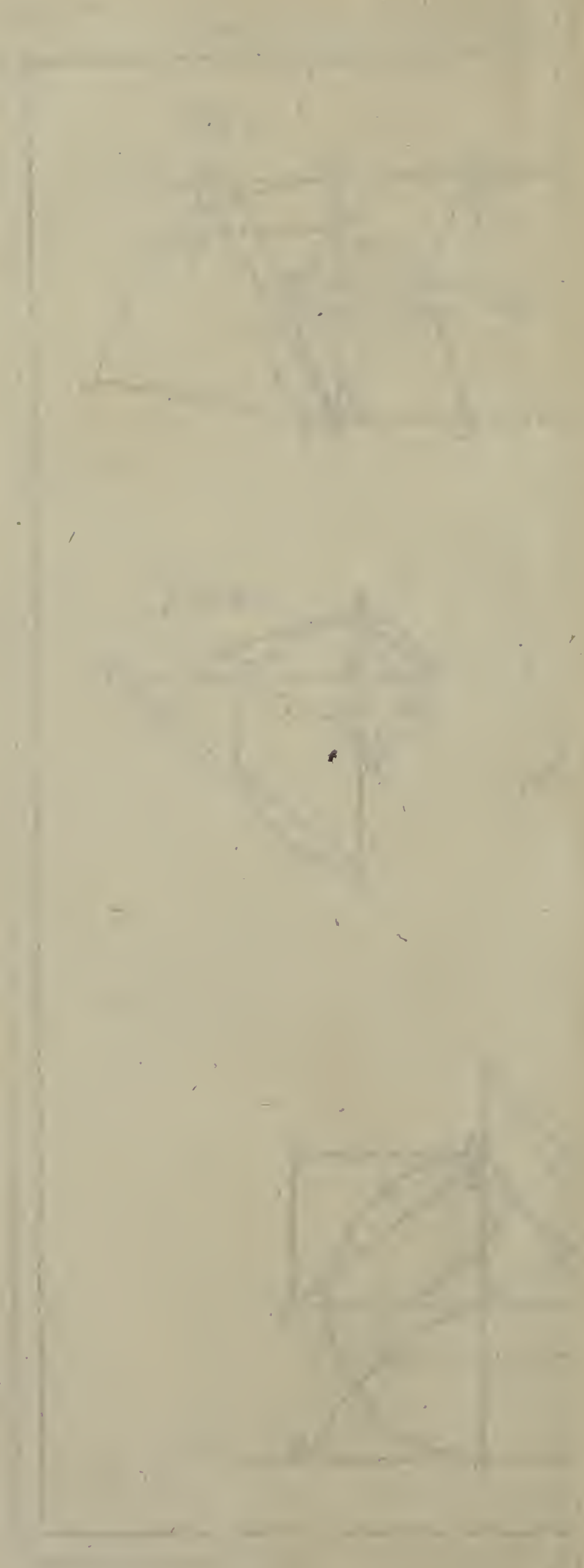


Fig. 137.

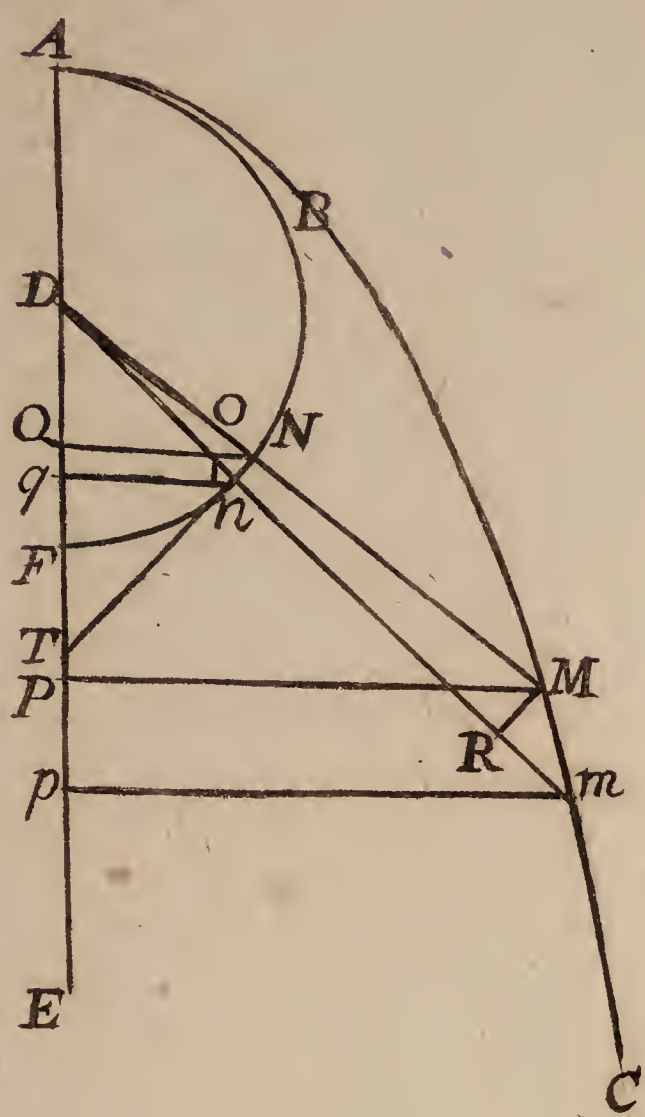


Fig. 139.

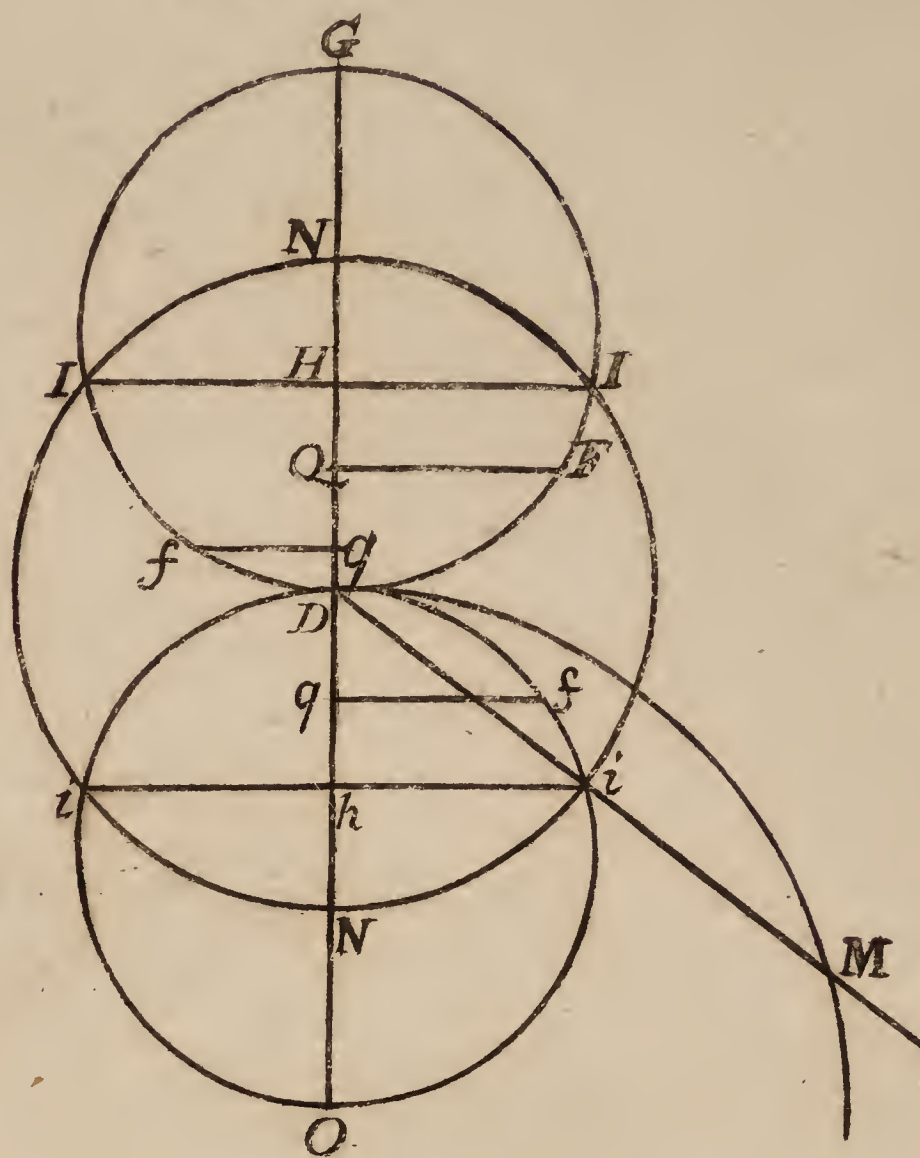


Fig. 140.

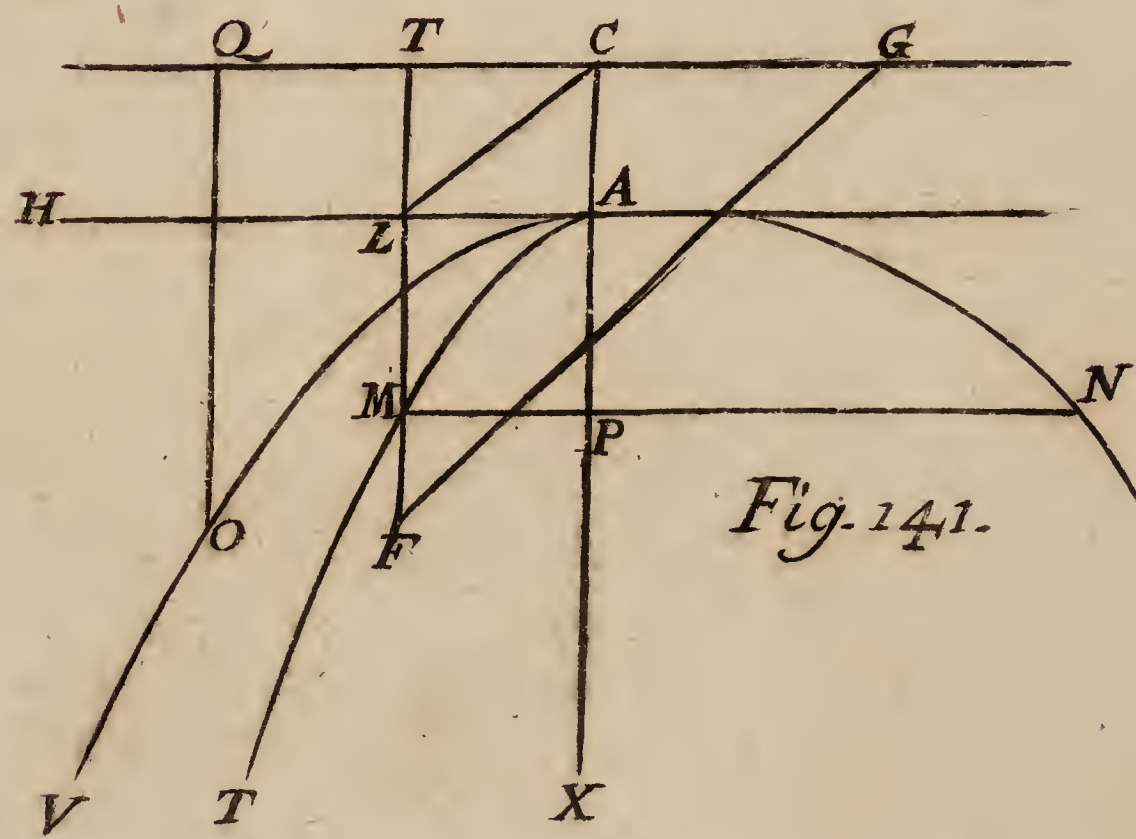
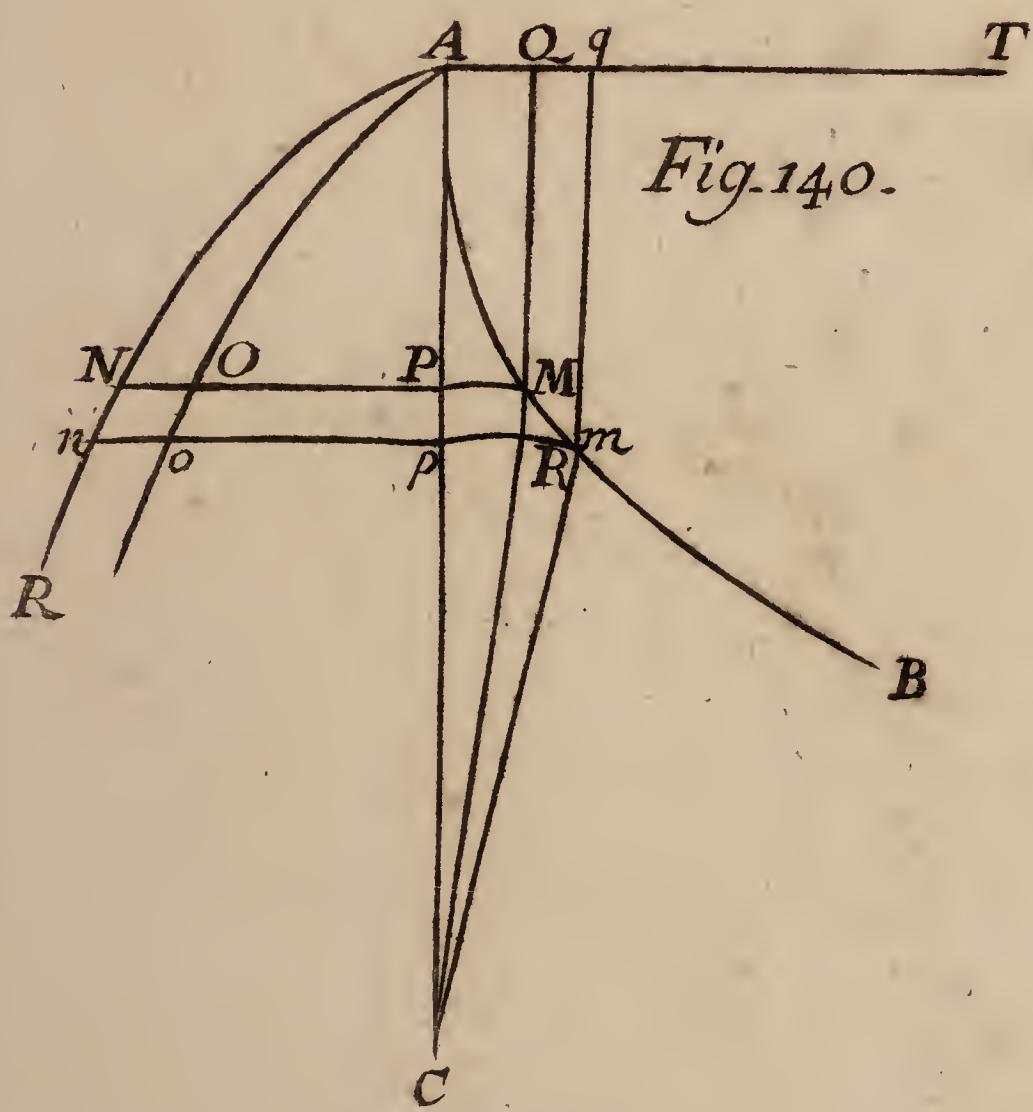


Fig. 141.

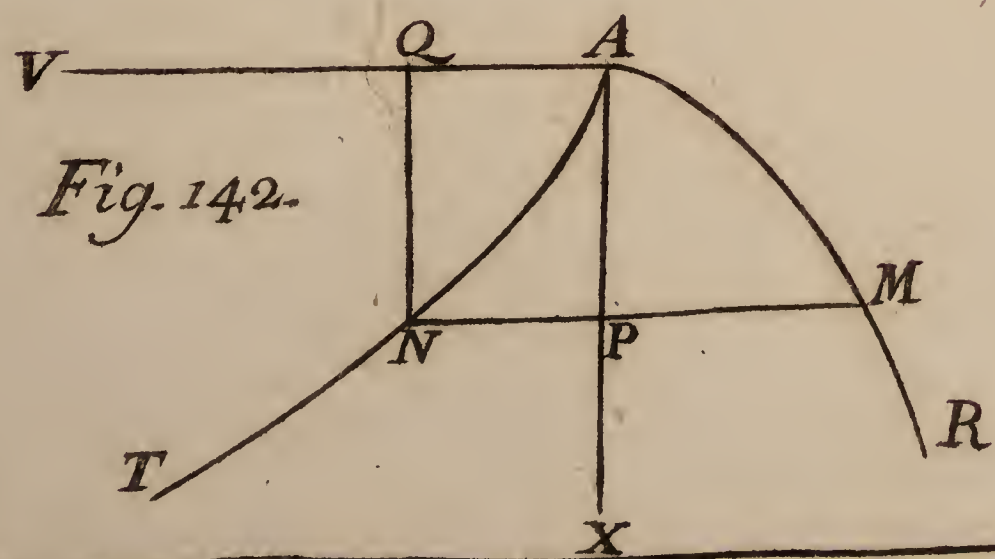


Fig. 142.

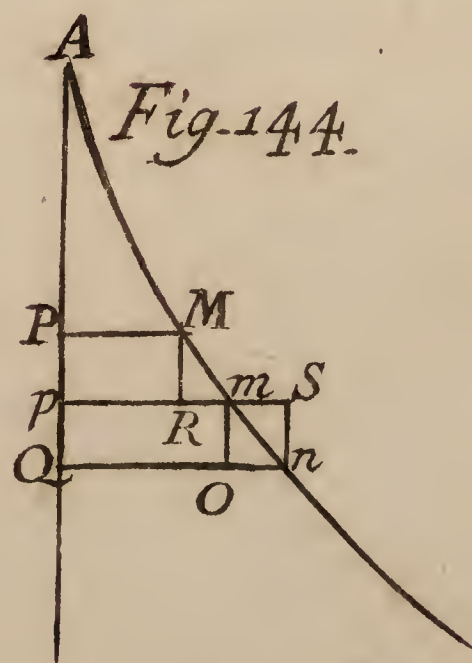


Fig. 144.

Fig. Mechan. Tab. XV.

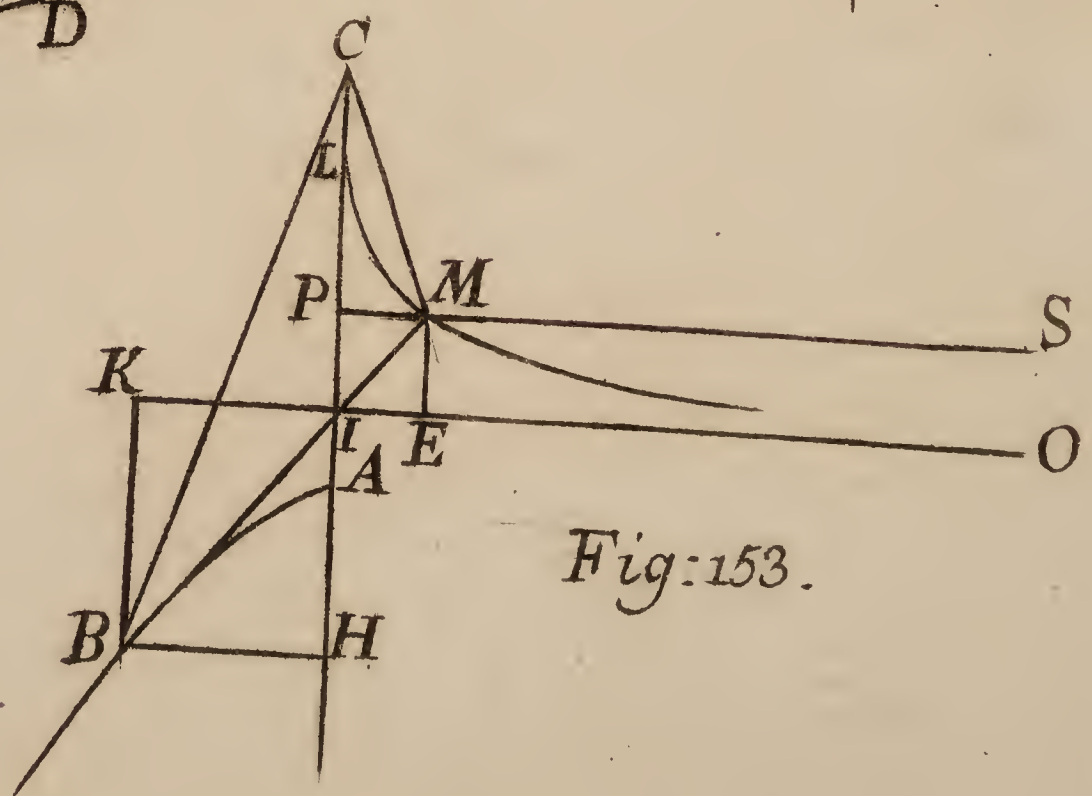
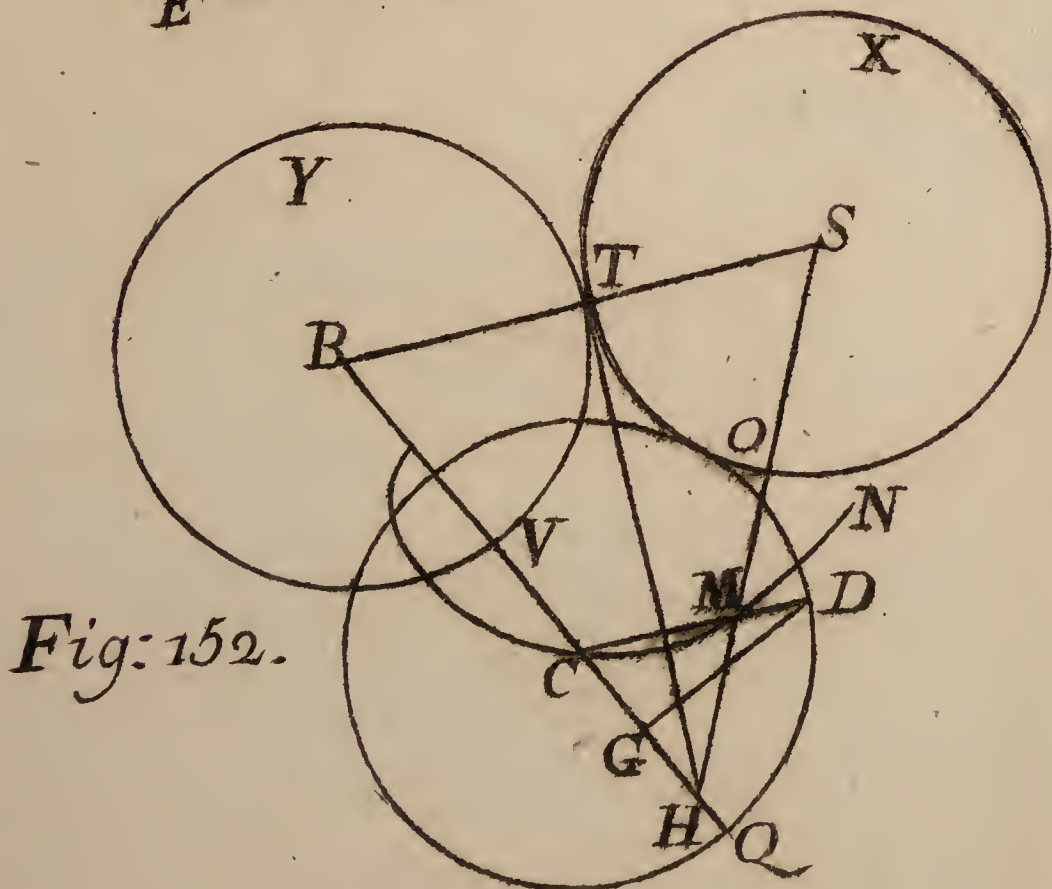
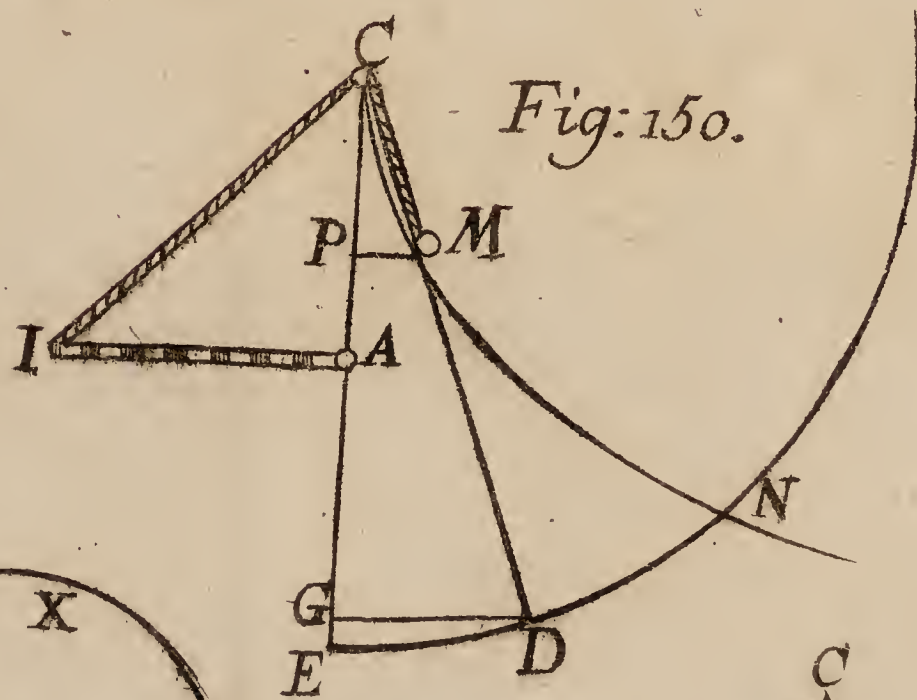
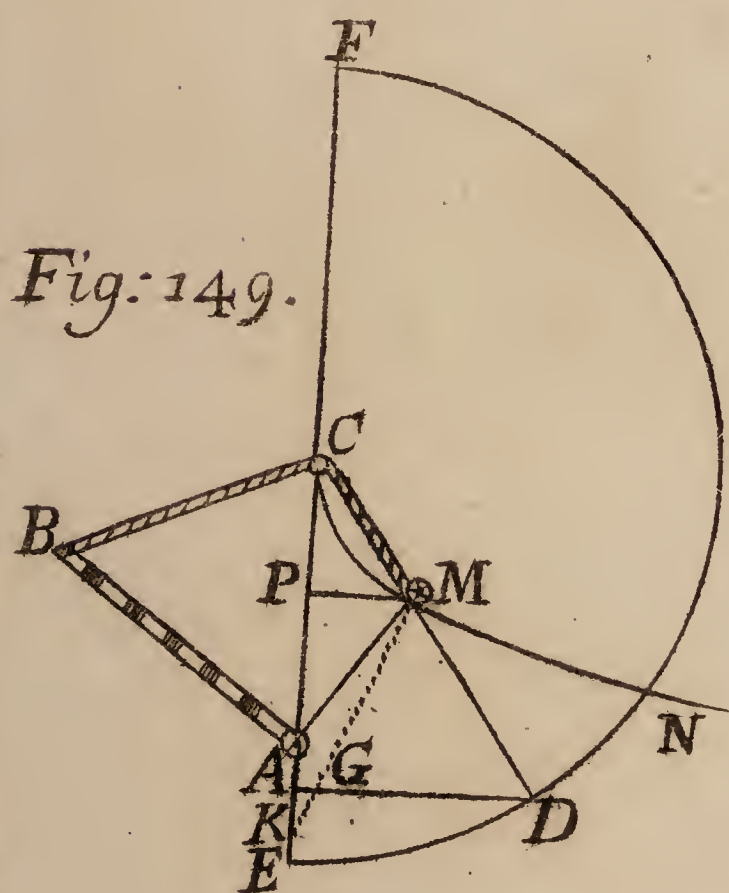
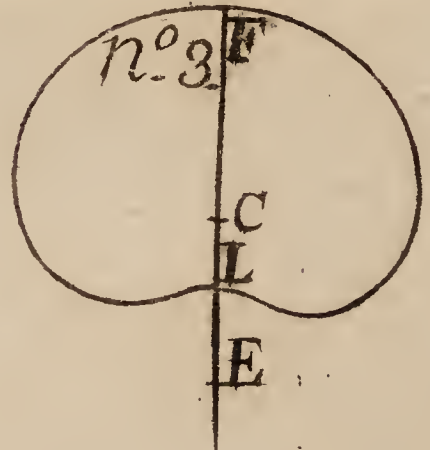
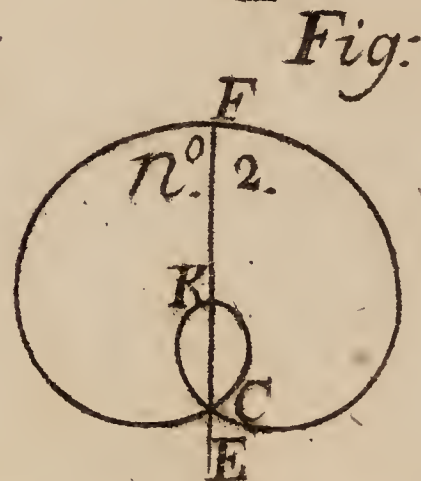
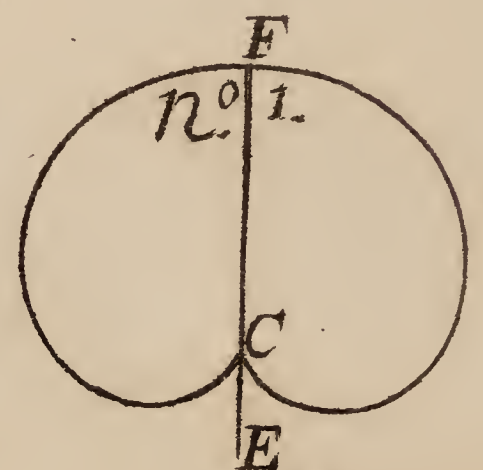
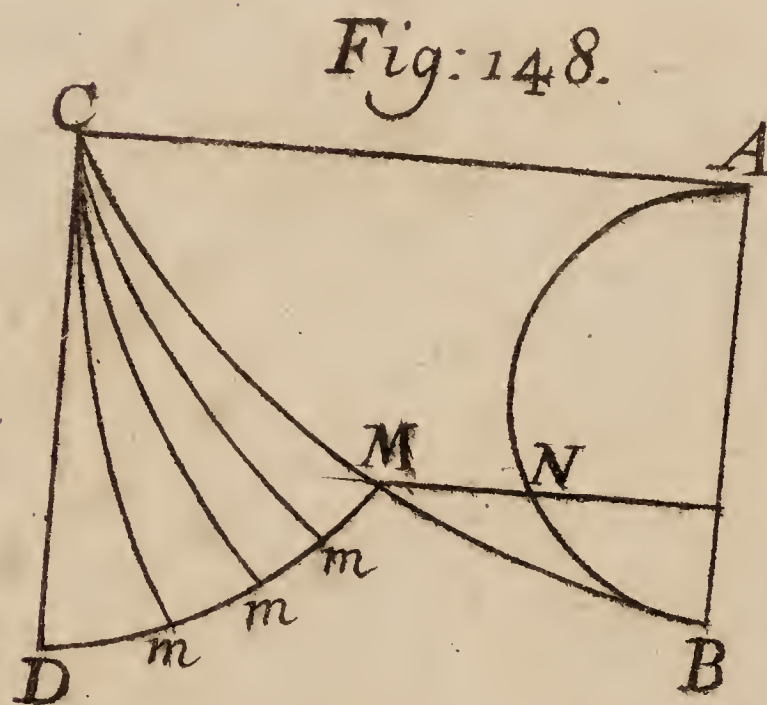
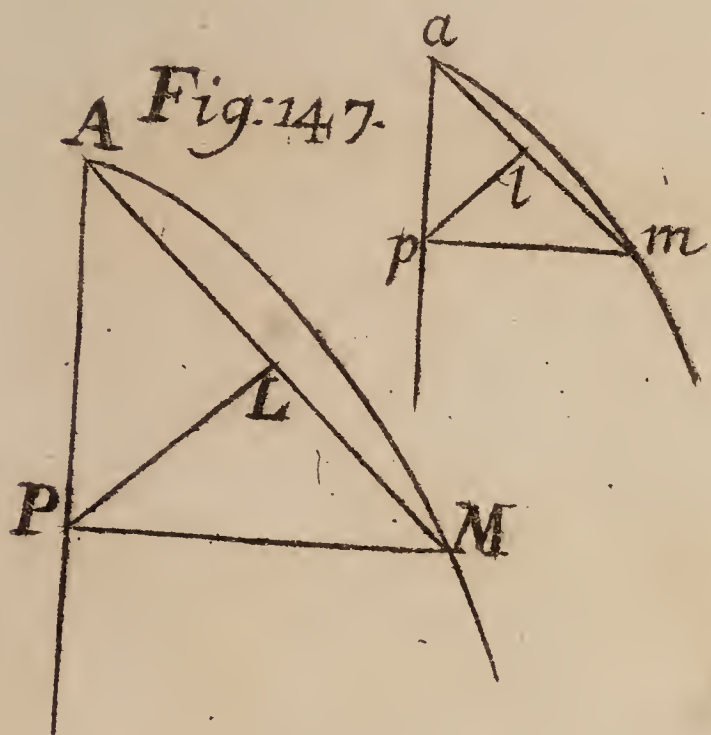
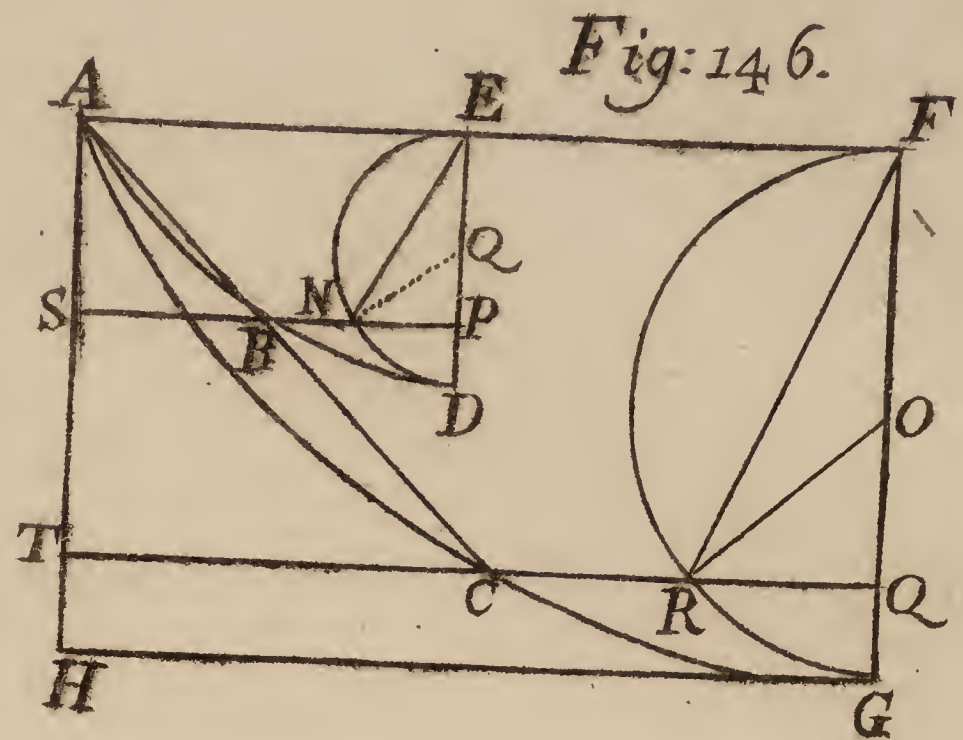
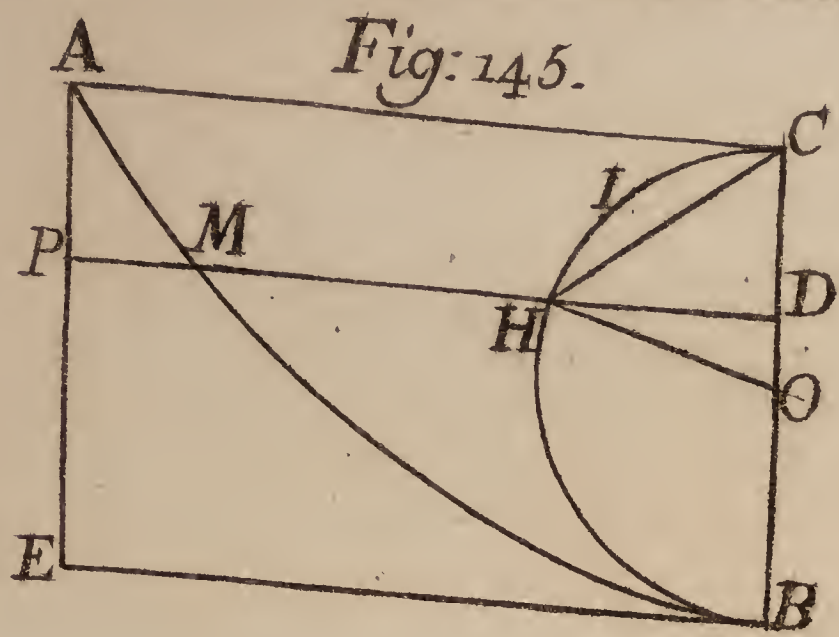


Fig. 154.

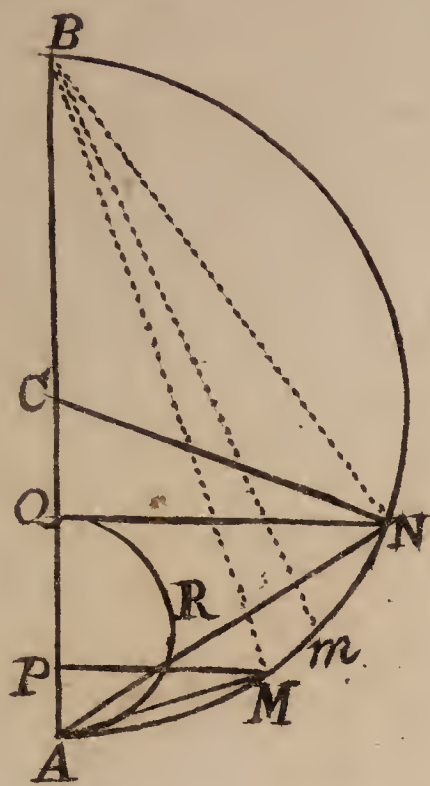


Fig. 155.

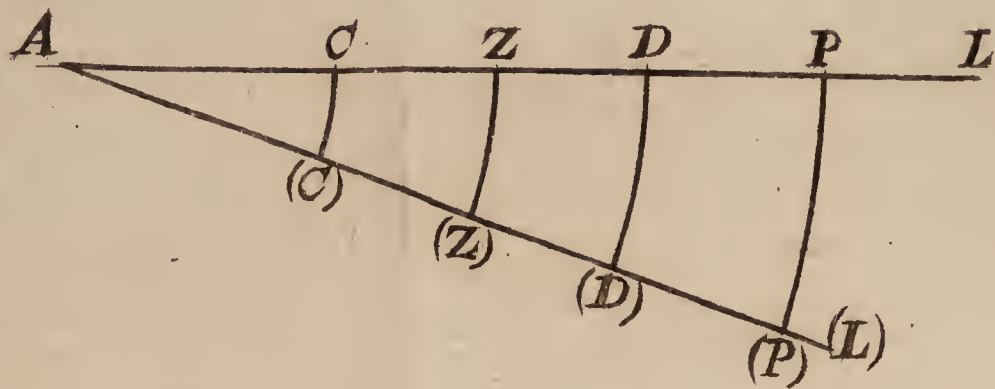


Fig. 157.

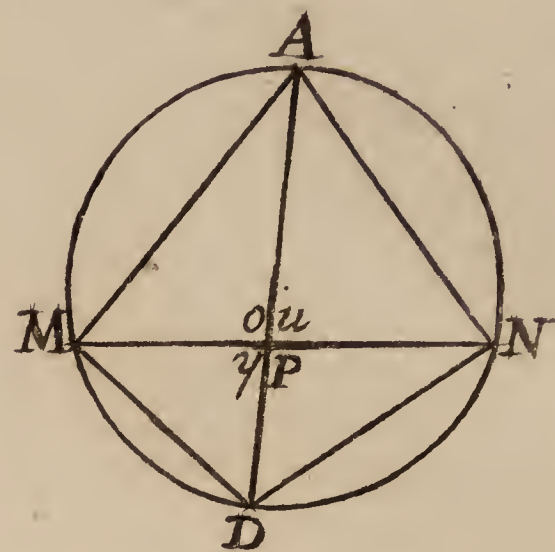


Fig. 156.

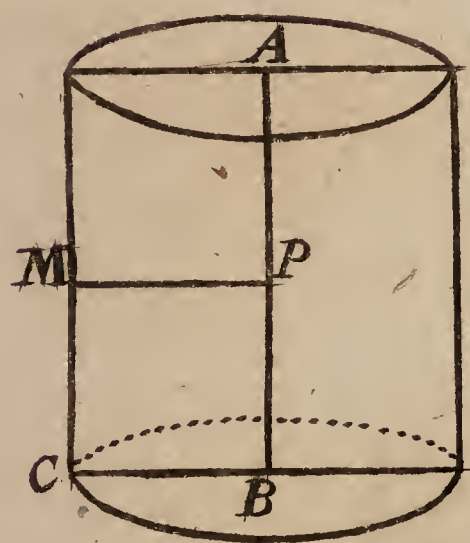
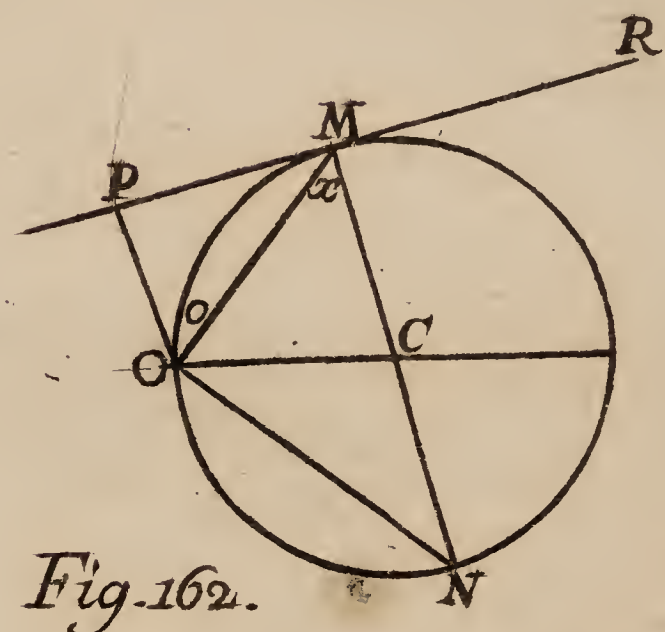
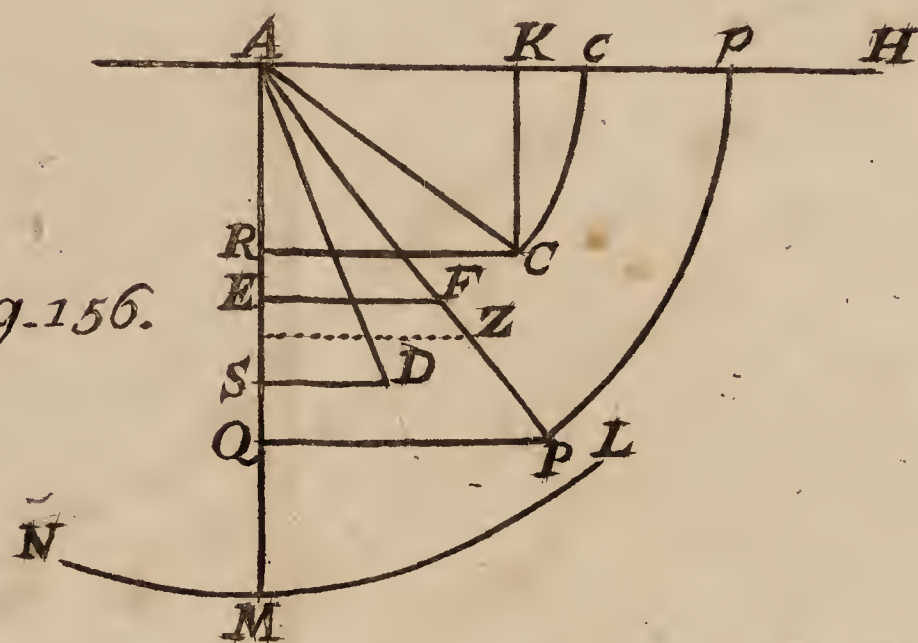


Fig. 159.

Fig. 161.

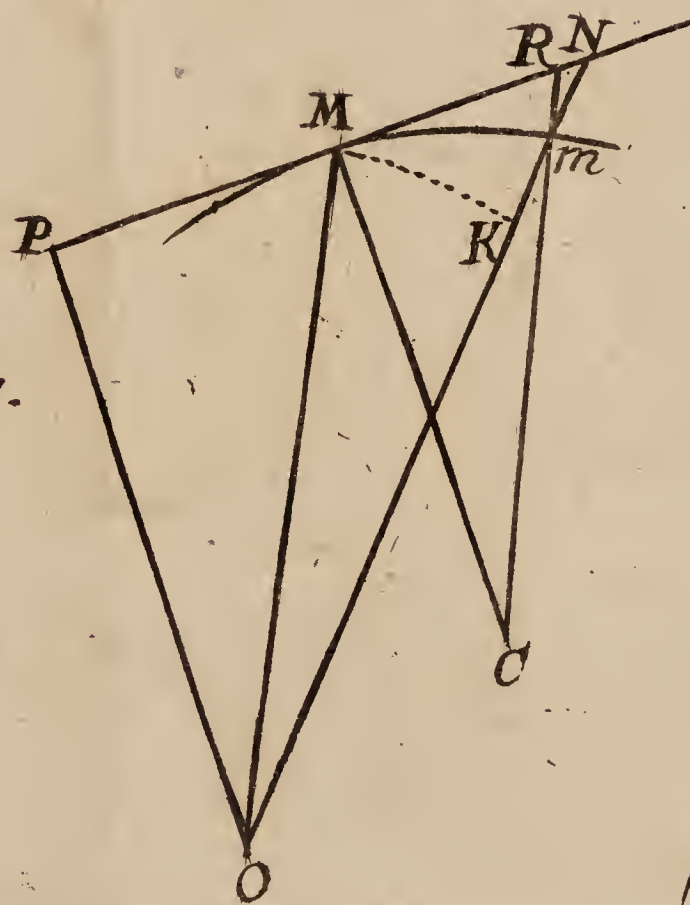


Fig. 160.

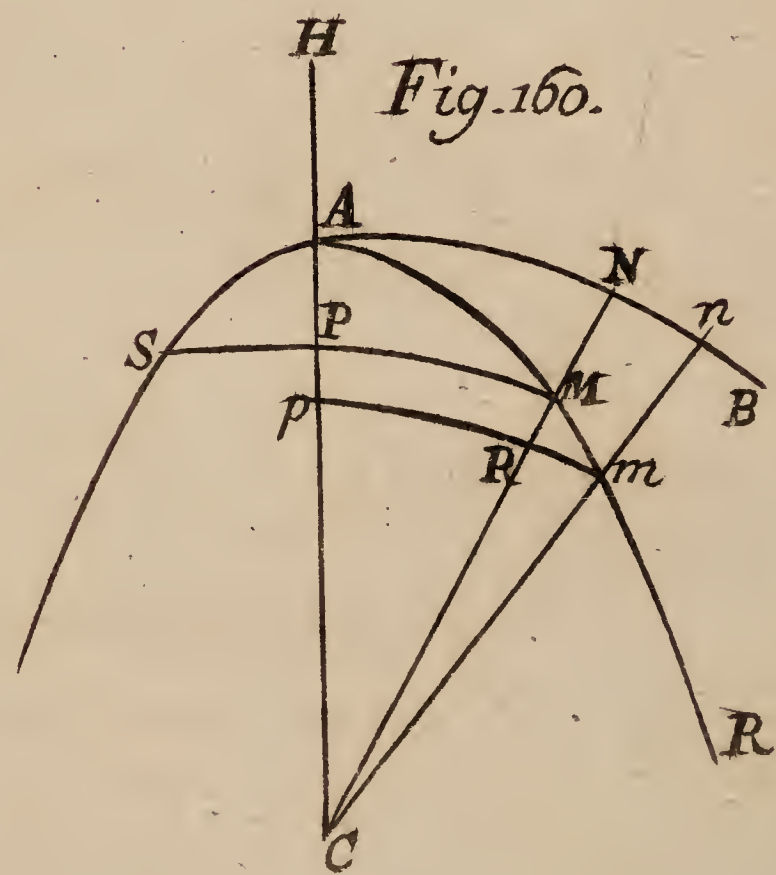


Fig. 158.

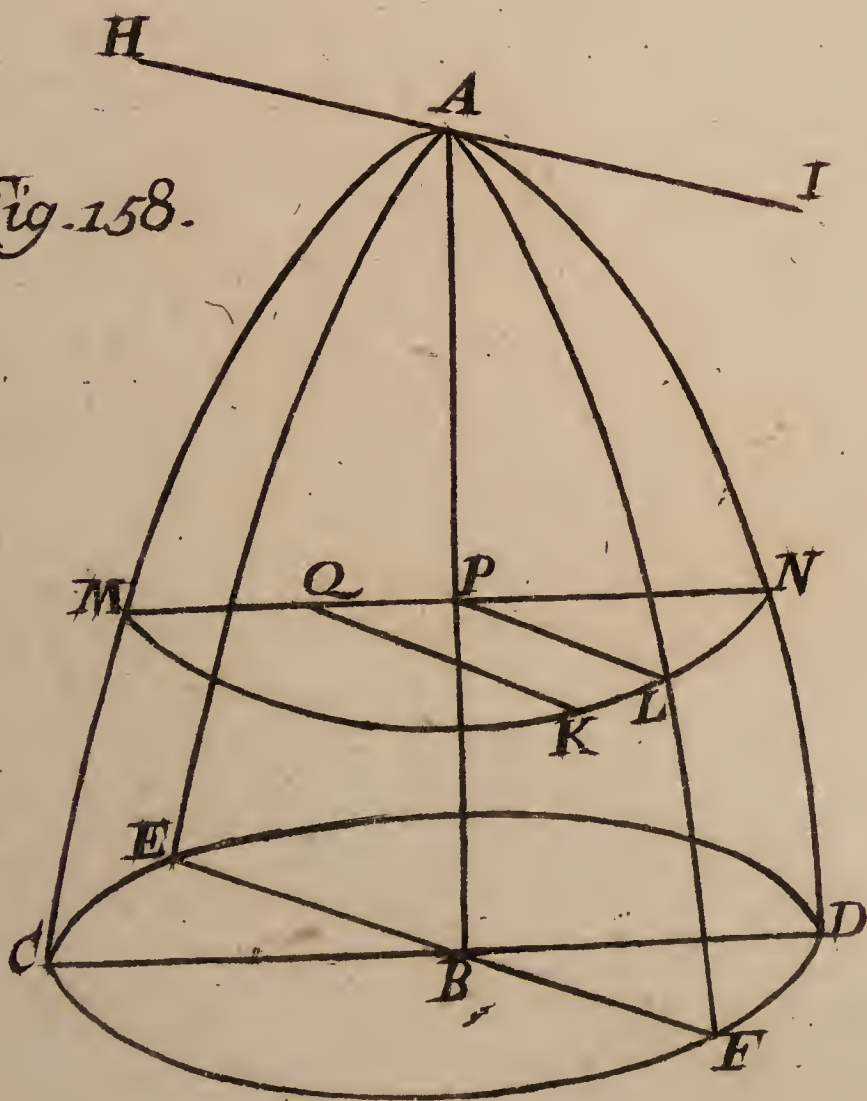
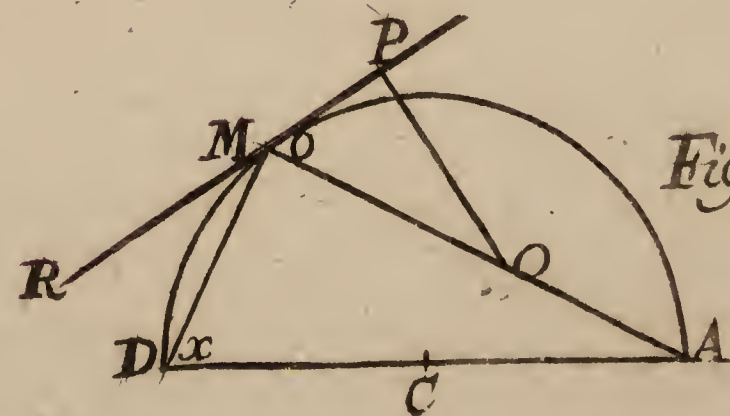


Fig. 163.



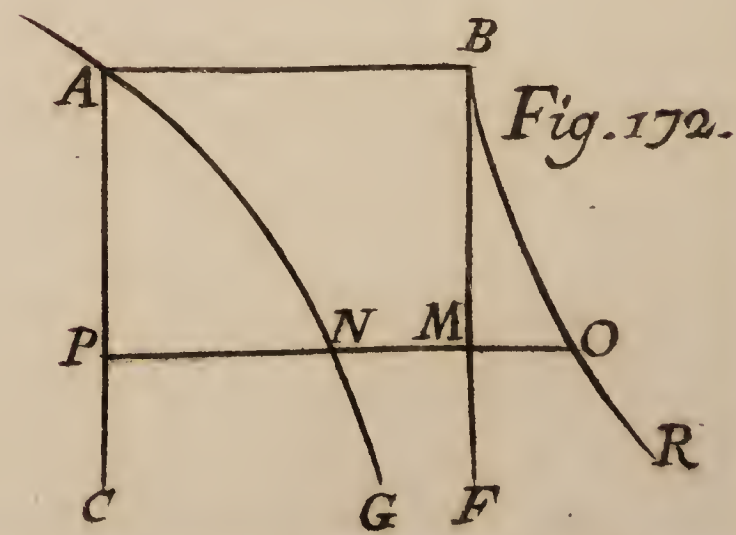
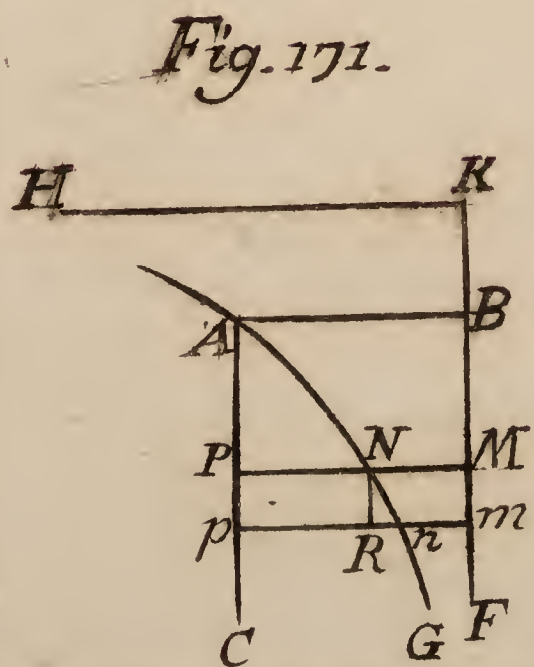
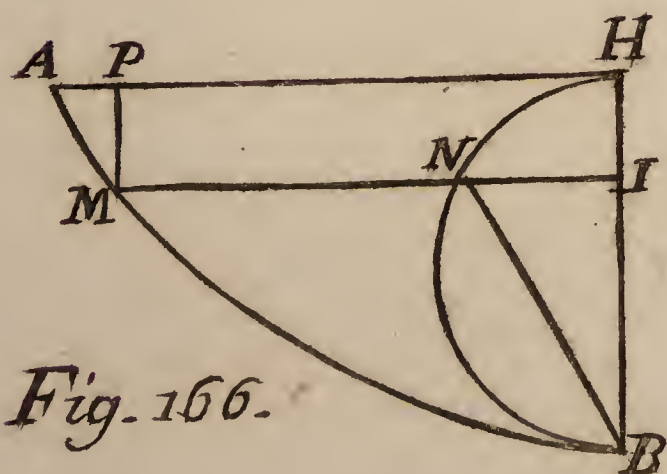
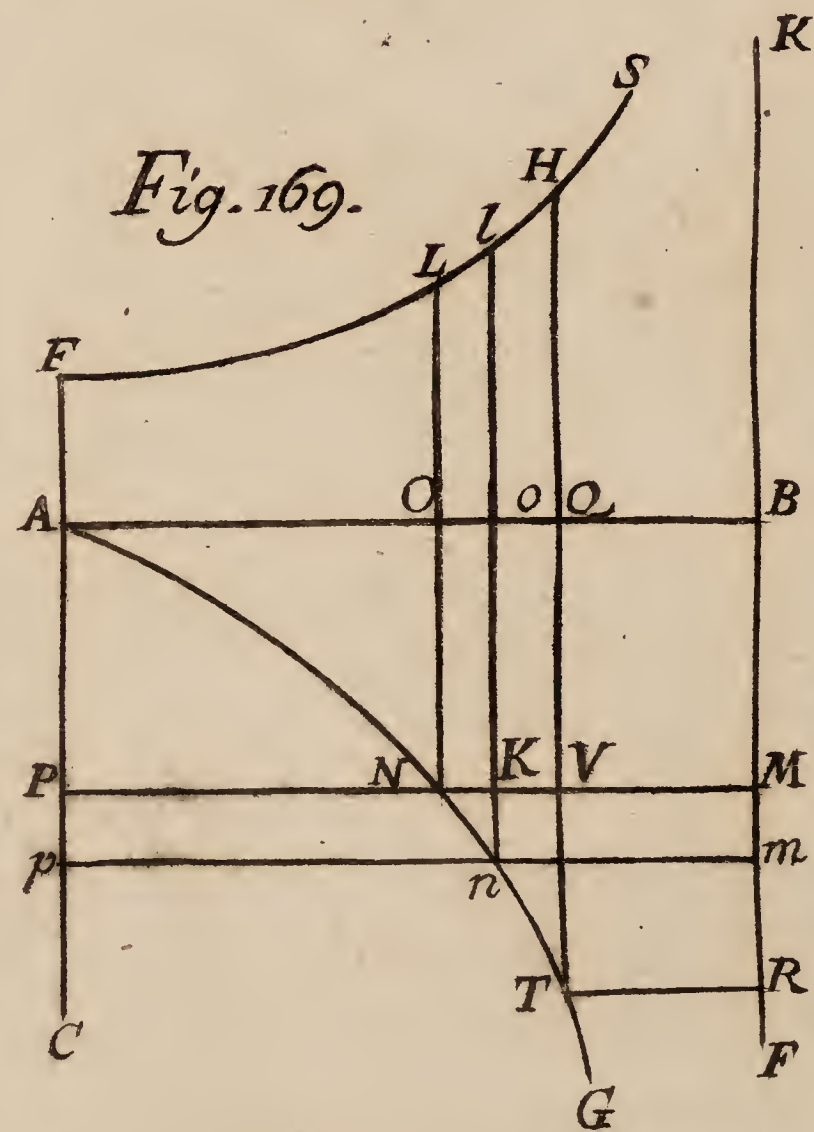
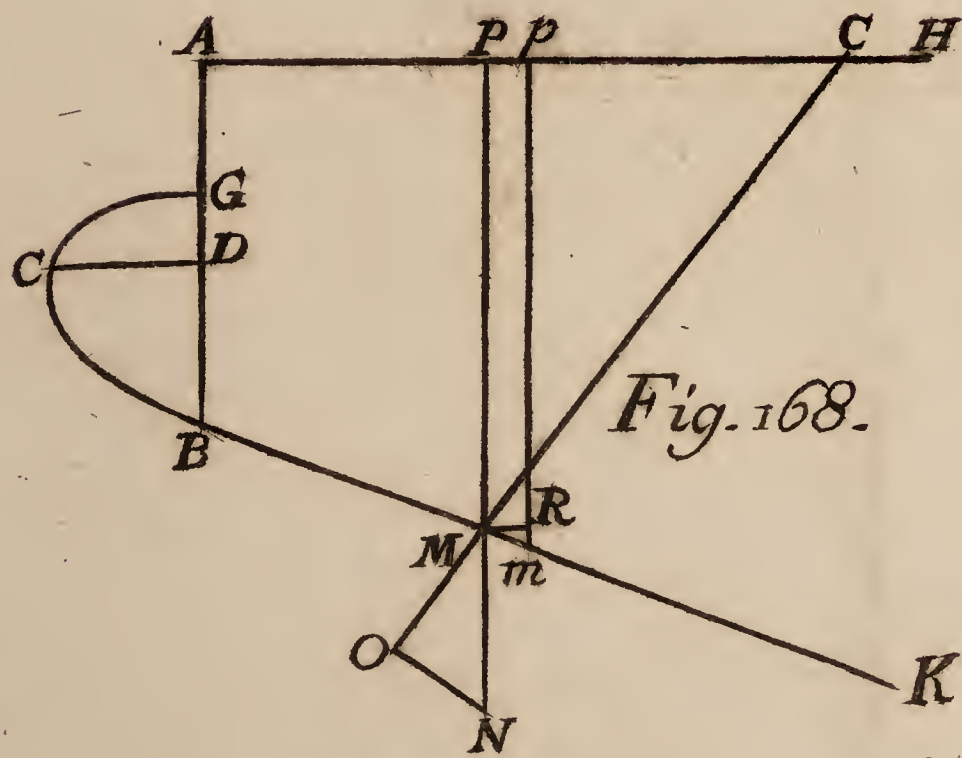
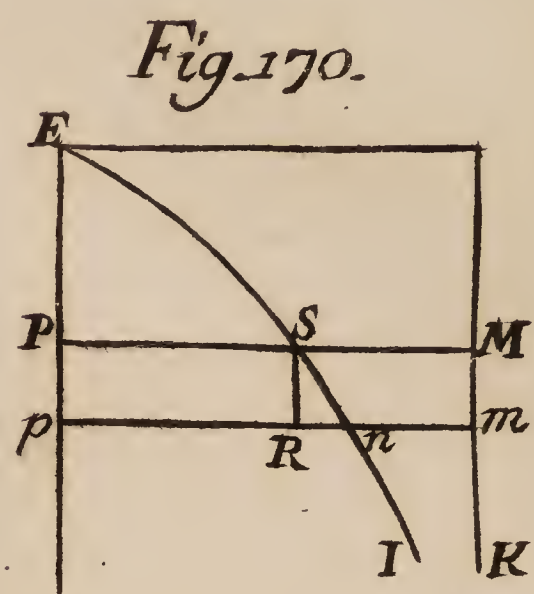
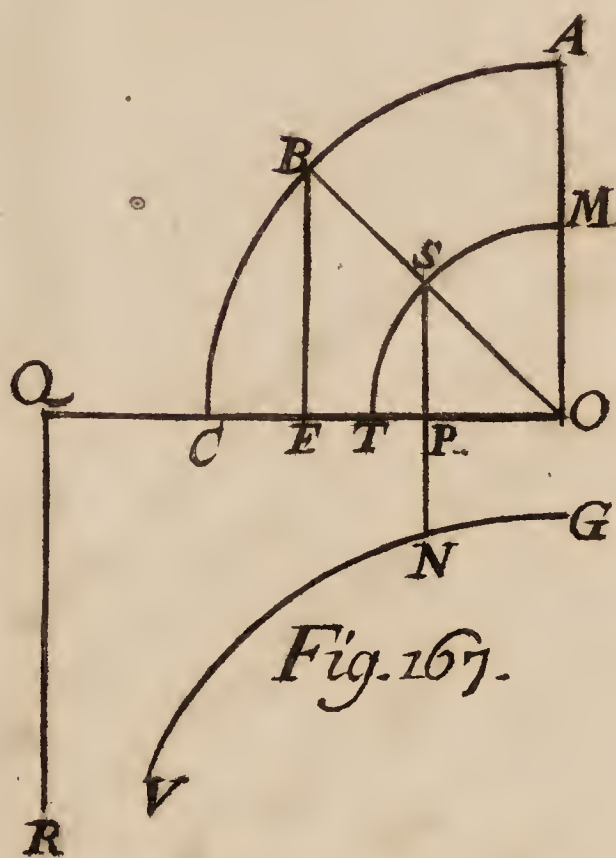
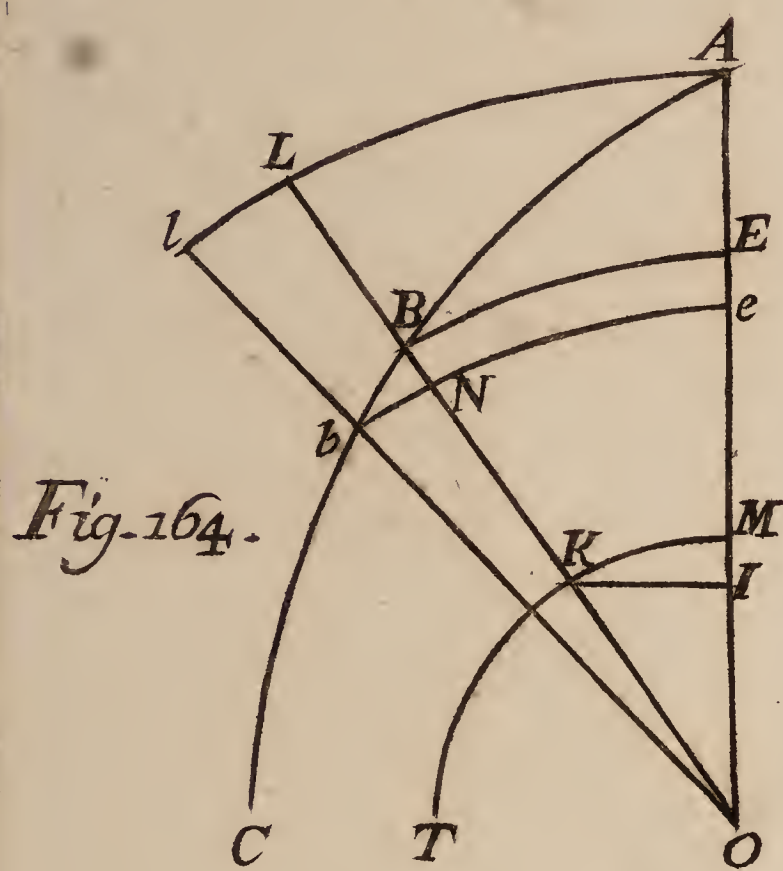
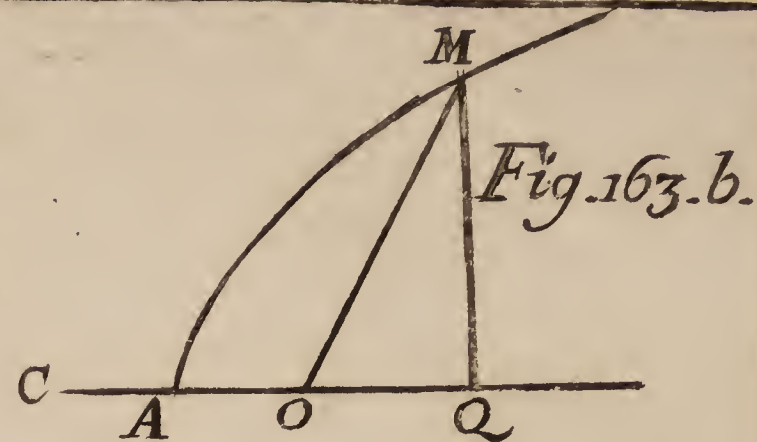
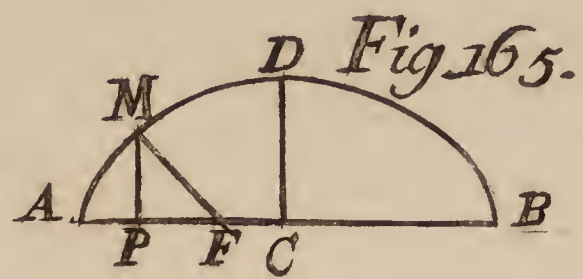
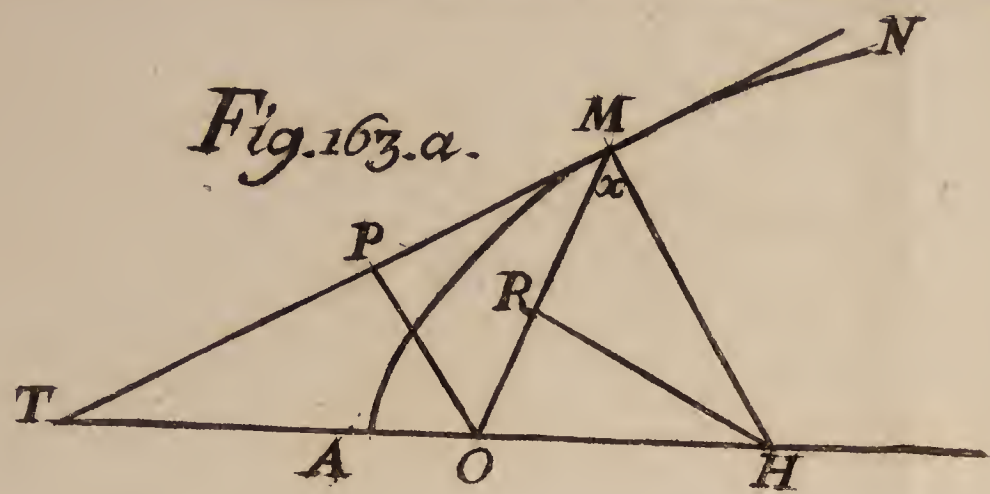


Fig. 173.

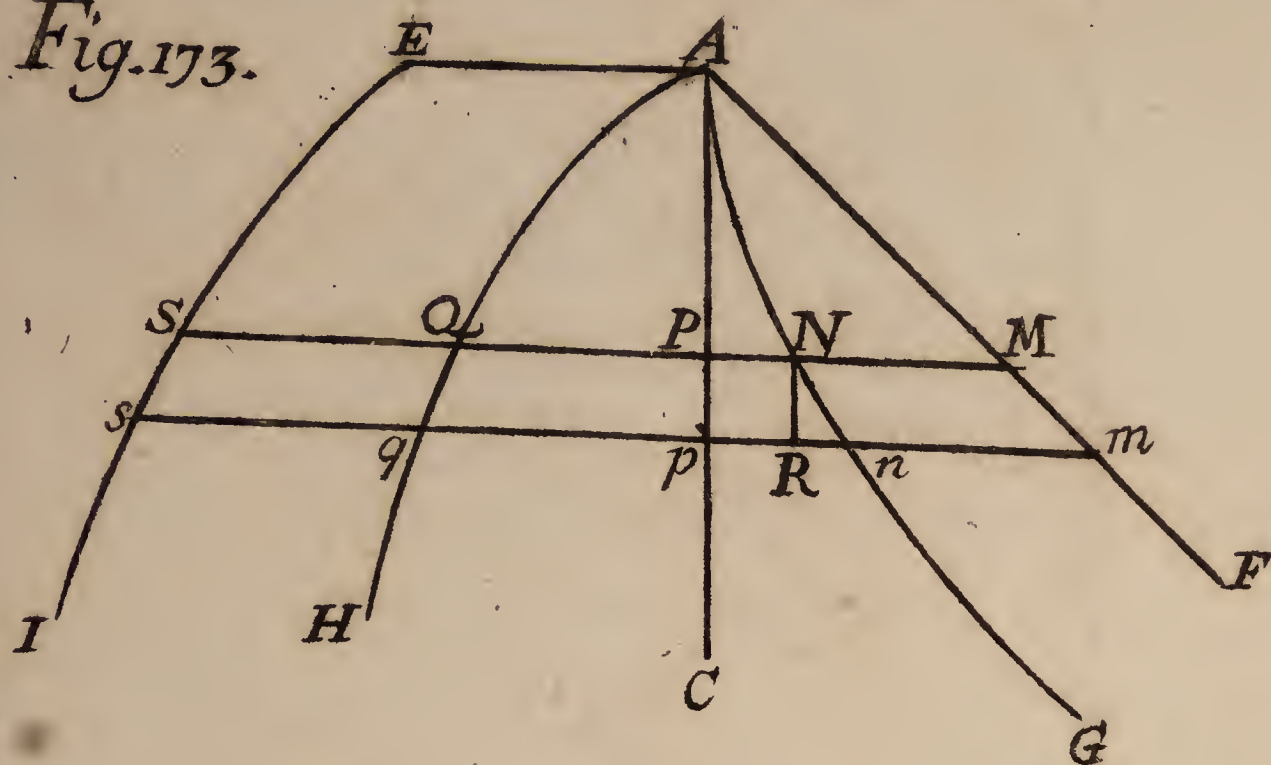


Fig. 177.

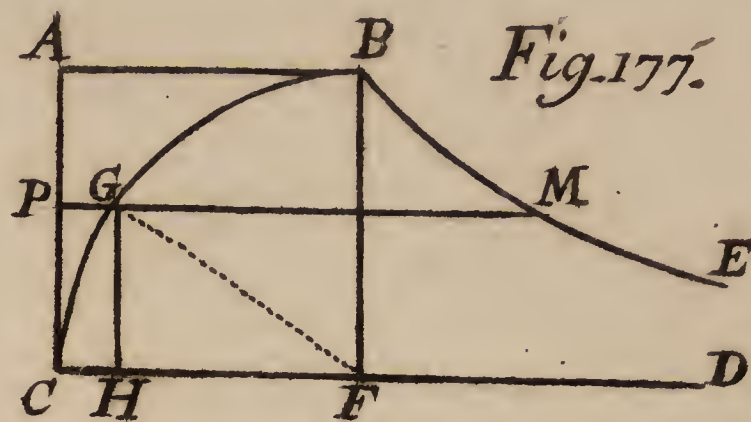


Fig. 174.

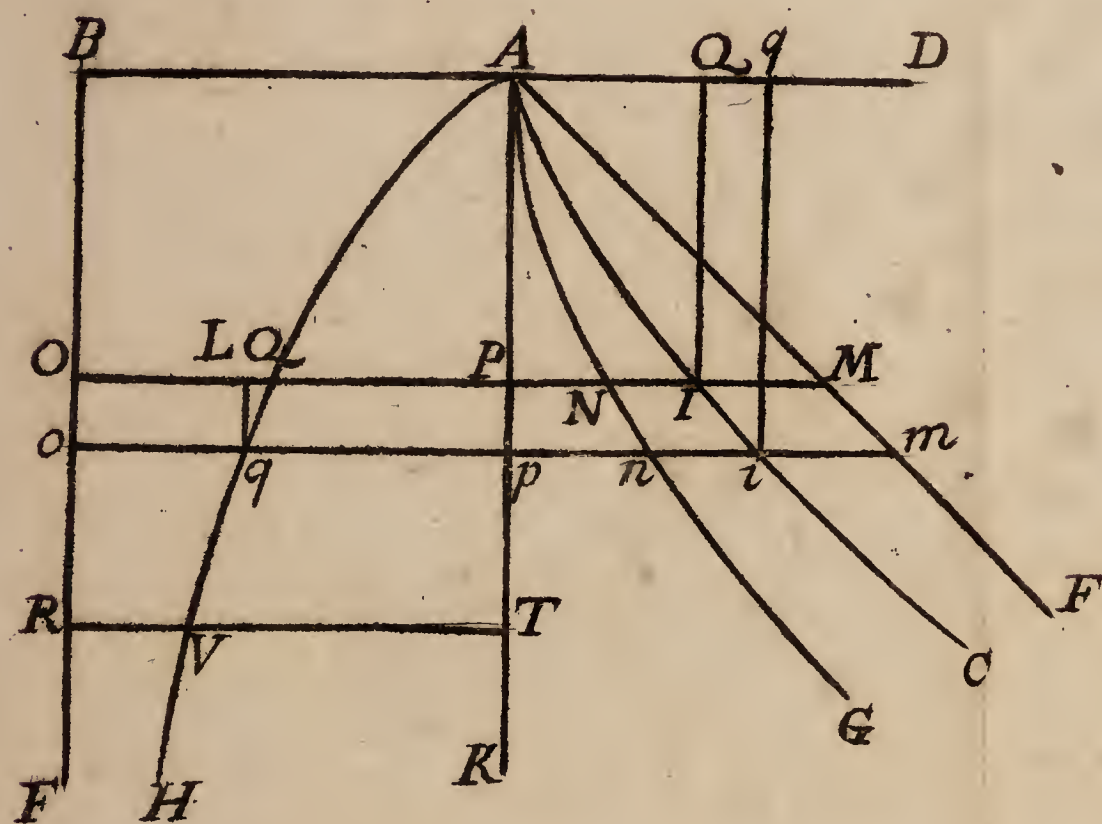


Fig. 175.

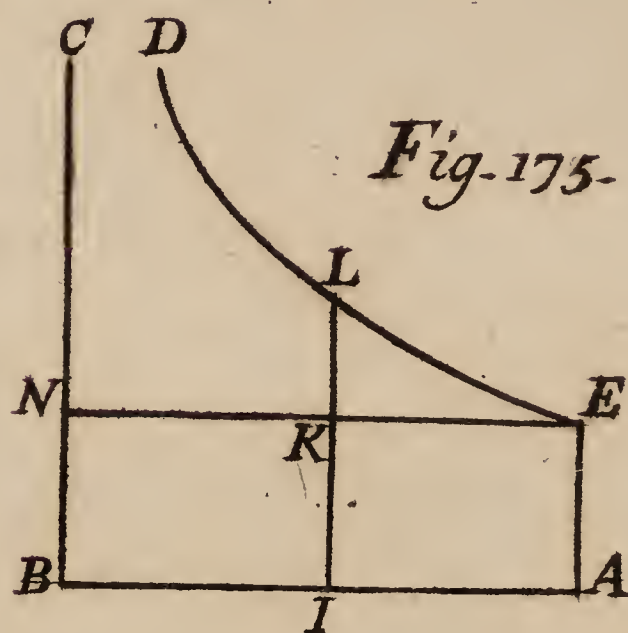


Fig. 179.

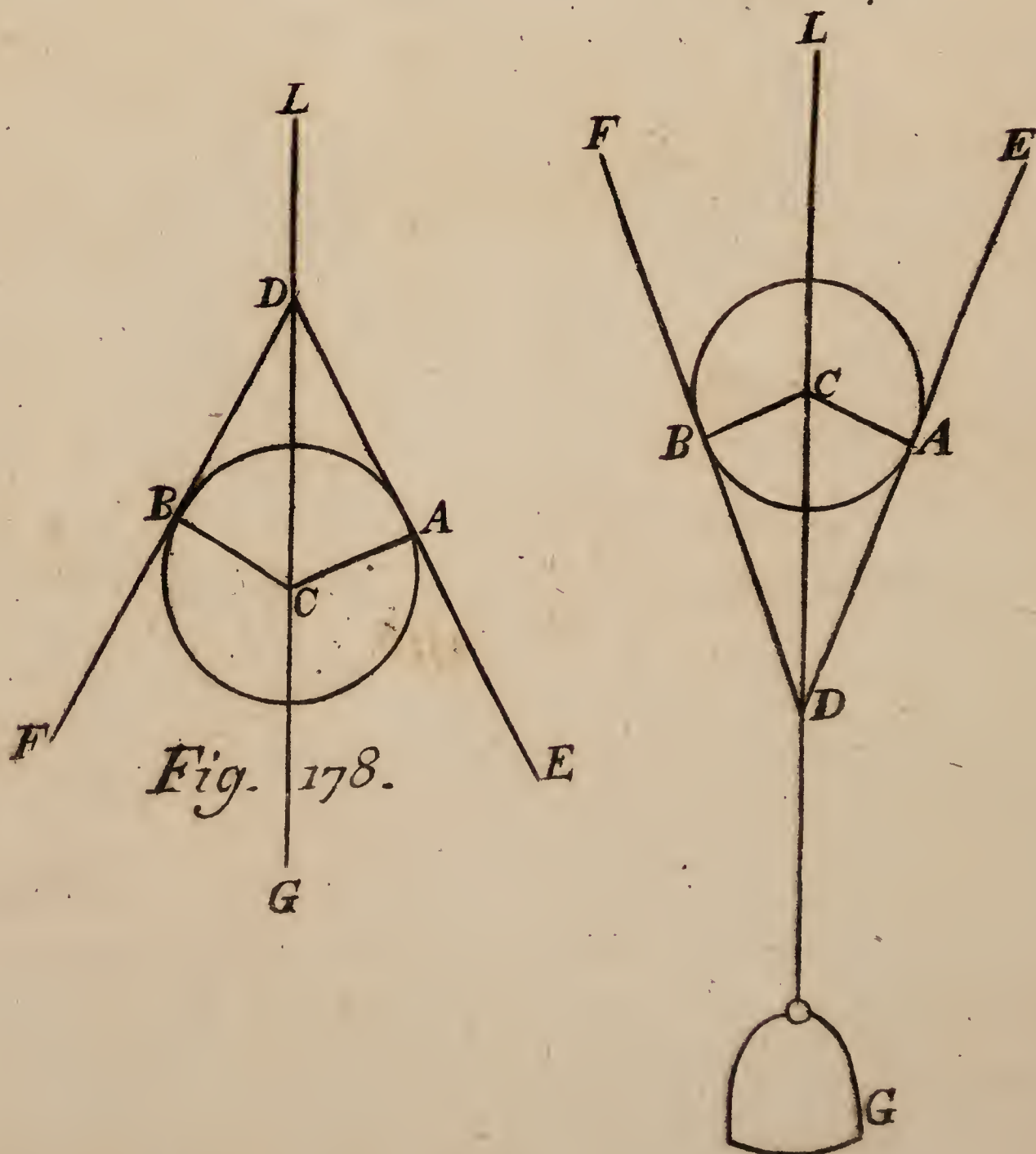
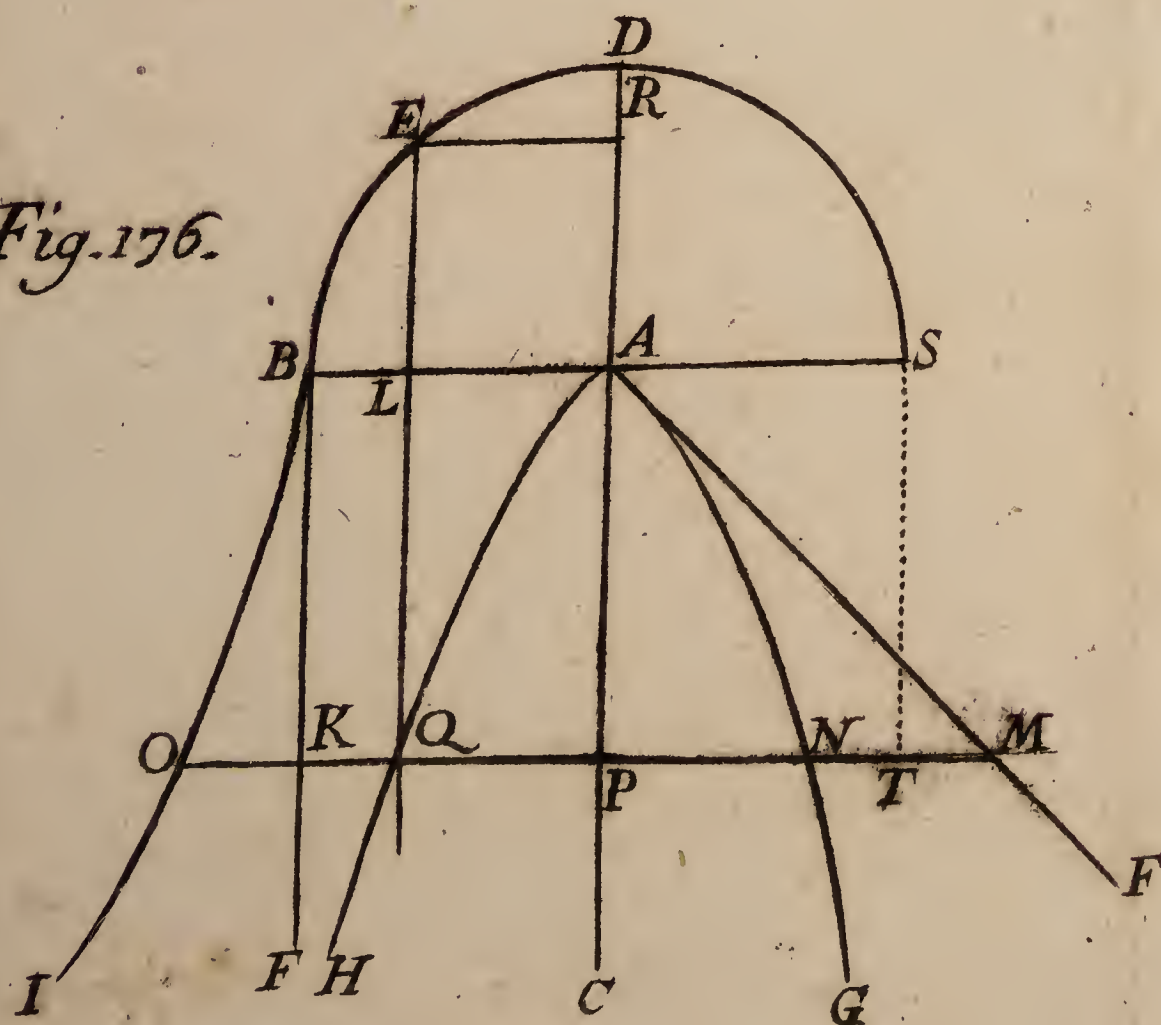
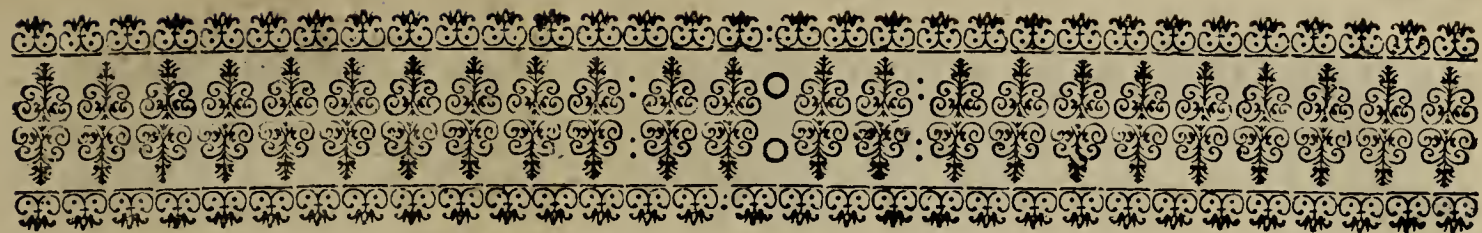


Fig. 178.

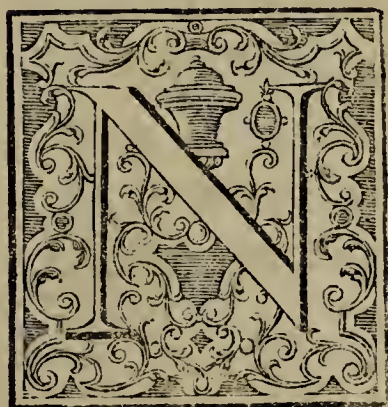
Fig. 176.





ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

P R Æ F A T I O.



ON dubito fore multos, quibus Leges Hydrostaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim Gravitationem sibi imaginentur tanquam Vim in materia persistentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato: fluida vero, quamdiu intra eosdem terminos conclusa quiescunt, omnis actionis in corpora alia prorsus expertia judicent; rationem sane non capiunt, cur partem Gravitationis corpori demerso veluti adimant, vel etiam totum ingenti sæpius impetu sursum propellant. Enimvero quemadmodum Leges Hydrostaticæ admodum evidenter demonstrantur, ita non minus Experientia singulæ confirmantur. Hinc discant velim, qui in rebus naturalibus cognoscendis sensui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane esse in intellectu quam in sensu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica speranda. Quodsi hunc solum sui usum Hydrostatica præberet, digna profecto foret, quam meditarentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipsa quoque clavem

continet, qua multa abdita referantur. Non exiguus est Phænomenorum numerus, quorum ratio in Hydrostatica continetur, & quæ nec sine ea intelligi, nedum comprehendi possunt. Hydrostaticæ usum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum solidorum, in primis autem fluidorum, in *Medicina Hydrostatica* ostendit Celeberrimus BOYLIUS. Varios, eosque præclaros in vita humana usus in ipsa pertractatione passim indicavi. Sine ea nec Aërometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi potest. Sat ergo rationis apparet, cur Hydrostaticæ Elementa inter Elementa Matheseos præcipuum quendam locum sibi vendicent, & cur digna sint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana usus applicentur. Agite itaque, quotquot Natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando solum cogitent; evolvite hæc Hydrostaticæ Elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Physicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.





ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Corporum Specifica Gravitate & Levitate.

DEFINITIO I.

1. **H**ydrostatica est Scientia Gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2. Docetur nempe in Hydrostatica non modo ratio gravitatis fluidorum, sed & inprimis actio eorum in solida demersa.

DEFINITIO II.

3. *Corpus fluidum* est, cujus massulæ quantælibet sunt inconnexæ, mutua cohæsiōne a causa quacunque impedita.

DEFINITIO III.

4. *Corpus solidum* est, cujus massulæ quantælibet sunt connexæ.

DEFINITIO IV.

5. *Corpus specificè levius* est, quod sub eodem volumine minus pondus continet quam alterum.

DEFINITIO V.

6. *Corpus specificè gravius* est, quod sub eodem volumine majus pondus continet quam alterum.

SCHOLION.

7. Sint duo globi æquales, quorum scilicet diameter unius pedis; alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo, dicitur specificè gravior; ligneus autem specificè levior.

DEFINITIO VI.

8. *Corpus densius* est, quod plus massæ sub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus specificè gravius densius est specificè leviori, & corpus densius specificè gravius est rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO VII.

10. *Corpus rarius* est, quod minus massæ sub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus rarius est specificè levius densiori, & specificè levius rarius specificè graviori (§. 5, 6).

AXIOMA I.

12. *Corpora ejusdem densitatis sub eodem volumine æqualem massam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare si volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt, seu gravitatem eandem habebunt (§. 112 *Mechan.*).

AXIO-

Axioma II.

14. Si duorum corporum volumina fuerint æqualia; densitates sunt ut massa.

SCHOLIUM.

15. Nempe, vi defin. (§. 8) corpus dicendum est duplo densius, si duplum massæ sub eodem volumine continet; triplo densius, si triplum; & ita porro.

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur densitates corporum æqualium ut pondera, seu ut gravitates (§. 112 Mechan.).

THEOREMA I.

17. Si duo corpora eandem densitatem habuerint, massa sunt ut volumina.

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem massam continent (§. 12); adeoque in volumine duplo continetur massa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla, & ita porro. Sunt igitur massæ ut volumina. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

18. Quoniam etiam gravitates sunt ut massæ (§. 112 Mechan.); corporum ejusdem densitatis gravitates sunt in ratione voluminum (§. 167 Arithm.).

COROLLARIUM II.

19. Ergo corpora ejusdem densitatis sunt etiam ejusdem gravitatis specificæ; & contra (§. 6).

COROLLARIUM III.

20. Quare corpora diversæ densitatis sunt diversæ gravitatis specificæ; & contra.

THEOREMA II.

21. Massa duorum corporum sunt in ratione composita densitatum atque voluminum.

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum massæ a, b, c ,

volumina primi & secundi d , tertii e , densitas primi f , secundi & tertii g : sint nempe primum & secundum ejusdem voluminis, secundum & tertium ejusdem densitatis. Quoniam

$$a:b=f:g \quad (§. 14)$$

$$b:c=d:e \quad (§. 17).$$

erit $ab:bc=fd:ge$ (§. 213 Arithm.) consequenter $a:c=fd:ge$ (§. 181 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM III.

22. Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 Mechan.); eadem etiam sunt in ratione composita densitatum & voluminum (§. 167 Arithm.).

THEOREMA III.

23. Si duorum corporum massa vel gravitates fuerint æquales; densitates sunt reciproce ut volumina.

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in Theorematis præcedentis demonstratione, erit $a:c=fd:ge$ (§. 21). Jam $a=c$ per hypoth. adeoque $fd=ge$. Est igitur $f:g=e:d$ (§. 299 Arithm.). Quod erat unum.

Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 Mechan.), si massæ æquales sunt, etiam gravitates æquales sunt. Sed si massæ æquales sunt, densitates sunt reciproce ut volumina, per demonstrata. Ergo etiam, si gravitates æquales sunt, densitates reciproce sunt ut volumina. Q. e. d.

THEOREMA IV.

24. Duorum corporum quorumcunque densitates sunt in ratione composita ex directa massarum & voluminum reciproca.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione Theorematis secundi, erit

$$a : c = fd : ge \text{ (§. 21).}$$

Ergo $age = cfd$ (§. 297 *Arithm.*)
consequenter $f : g = ae : cd$ (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum sunt ut massæ eorundem (§. 112 *Mechan.*); densitates corporum sunt in ratione composita ex directâ gravitatum & reciproca voluminum (§. 15 *Arithm.*).

AXIOMA III.

26. Si duorum corporum volumina fuerint equalia; gravitates specificæ sunt ut gravitates absolutæ.

SCHOLIUM.

27. Corpus enim duplo gravius specificè dicitur altero, si duplam gravitatem sub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, si triplam, &c. (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates absolutæ sunt ut massæ (§. 112 *Mech.*); corporum æqualium gravitates specificæ sunt ut massæ (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA V.

29. Corporum ejusdem ponderis gravitates specificæ sunt in ratione voluminum reciproca.

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis $A = a$, volumen alterius $B = b$. Quoniam B supponitur esse homogeneum; gravitates voluminibus proportionales sunt (§. 130 *Mechan.*), adeoque gravitas ipsius B sub volumine a , reperitur $ag : b$ (§. 301 *Arithm.*). Sunt igitur gravitates specificæ corporum A & B ut g , ad $ag : b$ (§. 26), hoc est,
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

ut bg , ad ag (§. 181 *Arithm.*); consequenter ut b ad a (§. 178 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

30. Quodsi ergo volumina fuerint æqualia; etiam gravitates specificæ æquales erunt, hoc est, corpora ejusdem ponderis & voluminis eandem gravitatem specificam habent.

THEOREMA VI.

31. Gravitates absolutæ duorum corporum sunt in ratione composita voluminum & gravitatum specificarum (hoc est, gravitatum sub eodem volumine).

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejusdem voluminis c gravitates absolutæ a & b , specificæ f & g ; corporum ejusdem ponderis a volumina c & d , gravitates specificæ f & e . Erit

$$a : b = f : g \text{ (§. 26)}$$

$$f : e = d : c \text{ (§. 29).}$$

$$\text{Ergo } af : be = fd : gc \text{ (§. 213 } *Arith.*)}$$

$$\text{Unde } a : b = d : \frac{gc}{e} \text{ (§. 185 } *Arithm.*)}$$

$$\& a : b = ed : gc \text{ (§. 178 } *Arithm.*)}$$

Q. e. d.

THEOREMA VII.

32. Gravitates specificæ duorum corporum sunt in ratione composita ex directâ gravitatum absolutarum & reciproca voluminum.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione Theorematis præcedentis; erit

$$a : b = ed : gc \text{ (§. 31).}$$

$$\text{Ergo } \frac{a}{d} : \frac{b}{c} = e : g \text{ (§. 185 } *Arithm.*)}$$

consequenter $ac : bd = e : g$ (§. 181 *Arithm.*). Q. e. d.

K k

COROL-

COROLLARIUM.

33. Quoniam densitates sunt in ratione composita ex directa gravitatum absoluta-

rum & reciproca voluminum (§. 25); erunt etiam gravitates specificæ ut densitates (§. 167 *Arithm.*)

CAPUT II.

De Æquilibrio & Pressione Fluidorum.

THEOREMA VIII.

34. **S**I in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit; fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem basin & altitudinem habent, adeoque æquales sunt (§. 535 *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales sint (§. 131 *Mechan.*); fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, quæ idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quiescunt & neutrum alterum movet (§. 75 *Mechan.*). *Quod erat unum.*

Fig. 2. II. Quodsi basis tubi GI fuerit quadrupla basis alterius HK, & aqua descenderet ex L usque ad O, ex. gr. per intervallum unius digiti, in tubo altero NK ascenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 580 *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK, est ad celeritatem, quæ idem moveretur in GI; ut basis tubi GI, ad basin alterius HK (§. 33 *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo, ipsumque fluidum homogeneum *per hypoth.* massa fluidi in

tubo GI est ad massam fluidi in altero Fig. 2 HK, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 573 *Geom.*). Est ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK, ut factum ex basi tubi GI in basin alterius HK ad factum ex basi tubi HK in basin alterius GI (§. 278 *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arithm.*); vires etiam æquales sunt; adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§. 75 *Mech.*). *Quod erat secundum.*

III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas absoluta fluidi in tubo inclinato SR est ad gravitatem respectivam ejusdem qua nititur juxta directionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261 *Mechan.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem basin & altitudinem habente cum inclinato TR; consequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per cas. I. Quod erat tertium.*

IV. Eodem modo ostenditur fluida Fig. 4 æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, si ad eandem

eandem altitudinem constituentur.
Quod erat quartum.

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major est altitudo.

THEOREMA IX.

36. In tubis communicantibus quibuscunque fluida diversæ gravitatis specificæ æquiponderant, si altitudines habuerint rationem gravitatum specificarum reciprocam.

DEMONSTRATIO.

g. 1. E. g. Sint tuborum AB & DC diametri æquales; & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas specifica aquæ est ad gravitatem specificam argenti vivi ut 1 ad 14; sit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero mercurii in tubo DC digiti unius.

Quoniam bases cylindrorum aquei & mercurialis æquales sunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 573 *Geom.*); consequenter cum tam aqua, quam mercurius sit fluidum homogeneum, licet inter se heterogenea, gravitates absolutæ eorundem erunt in ratione composita ex directâ tam gravitatum specificarum 1:4; quam altitudinum EB & DH, 4:1 (§. 31), hoc est æquales sunt (§. 159 *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro substituere licet aqueum, cujus altitudo est altitudinis ipsius quadrupla (§. 15 *Arithm.*). Sed hic alteri aquo in BA æquiponderat (§. 34.). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non absimili modo ostenditur, si tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM I.

37. Inveniri adeo potest fluidorum duo-*Fig. 1.* rum quorumcunque gravitas specifica, si in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum; & altitudines BG & DH, ad quas subsistunt æquilibrata, ex eadem mensura accurate æstimentur. Est enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLIUM.

38. Quodsi fluida facile commisceantur, tubum horizontalem BD mercurio replere debemus, commixtionem impedituro. Etsi autem fluida non facile commisci soleant, specificè tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.

COROLLARIUM II.

39. Quoniam densitates fluidorum sunt ut gravitates specificæ (§. 33); eadem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM III.

40. Eadem ergo methodo, quam in *Cor. 1* (§. 37) exposuimus, ratio densitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA X.

41. In vasis perpendicularibus ABDC *Fig. 5.* & EGHF æquales bases BD & GH habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum AB & EG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vasa sunt perpendicularia, hoc est, bases eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hypoth.* fluida adversus fundos nituntur secundum lineas perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), adeoque tota gravitate sua, cum nihil resistat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina sunt ut altitudines (§. 573 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Quod si ergo etiam altitudines æquales sunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM II.

43. In vase igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam consistente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales sunt super parte qualibet fundi.

COROLLARIUM III.

44. In uno eodemque vase, fluidum ad diversas altitudines successive constitutum fundum premit in ratione altitudinum ad quas consistit.

COROLLARIUM IV.

45. Decrescente adeo altitudine, decrescit pressio, suntque hujus decrementa in ratione decrementorum altitudinis.

THEOREMA XI.

Fig. 6. 46. In vasis perpendicularibus ABDC & EGHF, bases BD & GH utcumque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione composita basium & altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione Theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina sunt in ratione composita basium & altitudinum (§. 572 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione composita basium & altitudinum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

47. Si vas inclinatum ABDC eandem altitudinem & basin habuerit cum perpendiculari BEFG; fundus utriusque æqualiter premitur.

DEMONSTRATIO.

In vase inclinato ABCD fundus CD premitur secundum directionem BD. Est autem vis gravitatis secundum BD ad gravitatem absolutam, ut BE ad BD (§. 261 *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac si a fluido ad altitudinem BE consistente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vasis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

48. Si bases vasis ABDC inæquales fuerint; fundus eodem modo premitur, ac si superior inferiori æqualis existeret.

DEMONSTRATIO.

I. Sit basis inferior CD minor superiori re AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem

Fig. 8. quem in plano horizontali supponimus, secundum lineas perpendiculares EC, FD premit (§. 215 *Mechan.*), nonnisi fluidum intra cylindrum ECDF comprehensum adversus eum nititur, reliqua massa contra latera vasis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac si basis superior inferiori æqualis esset. *Quod erat unum.*

Fig. 9. II. Sit vasis inferior basis CD multo major superiore FG. Nempe ut Demonstratio facilius evadat, cylindro ABDC infixus intelligatur tubus FE. Quodsi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per interval- lum CL: in tubo FE per altitudinem EM ascendet, quæ est ad CL ut basis CD ad basin GF (§. 580 *Geom.*). Est vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vase AD, ut EM ad CL (§. 33 *Mechan.*); consequenter ut basis CD ad basin FG (§. 167 *Arithm.*). Vis ergo, qua aqua in tubo deorsum nititur, prodit si basis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*). Summando scilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95 *Analys. infin.*); consequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a Cylindro HCDI premeretur (§. 541 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vasorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem consistente, quæcunque sit figura vasis.

SCHOLION I.

Fig. 10. 51. Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus superior dolii AB attollatur ab aqua in tubo CD plurimum pedum contenta. Ipse-

met experimentum aliquoties iteravi in vase Fig. 10. ligneo AB intus pice probe obducto & tubo CD ex lamina ferrea stanno obducta parato altitudinis 14 fere pedum, nec 800 libræ basi superiori impositæ impedire potuerunt, quominus attolleretur.

SCHOLION II.

52. Ab hoc principio derivavi Siphonem Fig. 11. meum Anatomicum, ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri scilicet curavi ex lamina ferrea stanno obducta vas cylindricum DEGF, & eidem afferruminari jussi tubum FIH. Quodsi jam vesica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut aliæ quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inversæ basi superiori superinducantur; eas non modo ingenti vi in hemisphæricam figuram expandit, sed & poros subintrans omnes membranas & vasa ita dividit, ut, levi incisura facta, solis digitis multo accuratius separentur, quam cultro anatomico. Jucundum sane est spectaculum, dum non modo substantia membranacea mire intumescit, sed & vasorum per eam dispersorum ramificationes & insertiones minimas distincte spectare, tunisæque, quæ vulgo pro una habentur, in plures discerpere licet. Probe autem notandum est, quod si interior vesicæ aut reliquarum partium corporis animalis super vase DG expensarum superficies aquam lambat, aqua per substantiam earum penetrare nequeat. Caterum si vesicæ ingens pondus imponas, ab aqua in tubo HI vix duarum librarum attollitur.

SCHOLION III.

53. Veritatem hujus doctrinæ de pressione Fig. 9. fluidorum in ratione basis ac altitudinis exploraturus, vas metallicum ACDB ita construi curret, ut fundus CD sit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & basi superiori AB successive tubi æque-alti, sed diversarum diametrorum applicari possint. Quodsi enim funiculi per tubum FE trajecti alterius extremum annulo K basi mobili afferruminato,

Fig. 9. alterum vero brachio alicujus libræ alliges, & in lance alteri appensa pondus colloques, idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus CD attollatur; non modo hinc disces, eodem semper pondere opus esse ad fundum attollendum, quæcunque sit tubi EF amplitudo, modo aqua constanter ad eandem altitudinem consistat, sed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vase basin CD, sed altitudinem FK habentis.

SCHOLION IV.

54. Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonstrata sunt, non consentire videtur, quod in tubis capillaribus, seu fistulis gracilioribus utrinque patulis, unaque sua extremitate sub aquam demersis, aqua ultra libellam assurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, Phænomenon hoc alteri cuidam causæ adscribendum esse, licet sine principiis Aërometricis definiri nequeat.

CAPUT III.

De Gravitatione Corporum specificè Graviorum in Fluidis Levioribus.

THEOREMA XIV.

55. **C**orpus specificè gravius in fluido leviori eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.

DEMONSTRATIO.

Fig. 12. Ponamus ex. gr. cubum pollicarem plumbeum F sub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo quem occupat loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a resistantia ambientis sustentabatur. Ergo a resistantia aquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plumbei pars sustentari debet, quantum est pondus aquæ expulsæ. Hac igitur parte gravitas corporis demersi deprehendetur imminuta. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

56. Cum fluidum specificè gravius sub

eodem volumine majus pondus possideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido specificè graviori majorem ponderis sui partem amittit, quam in leviori; adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHOLION.

57. Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in spiritu vini.

COROLLARIUM II.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, si unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM III.

59. Cum gravitates specificæ sint ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi solido immerso mole æqualis sit ad gravitatem solidi, ut pars ponderis in fluido amissa ad pondus ipsius integrum (§. 55);

(§. 55); erit gravitas fluidi specifica ad gravitatem solidi demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

60. Duo solida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed specificè gravioris pondus majus est, quam specificè levioris (§. 6). Ergo majorem sui ponderis partem amittit specificè levius quam gravius (§. 205 *Arithm.*).

COROLLARIUM V.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina sunt reciproce ut gravitates specificæ (§. 29); specificè levius ejusdem cum graviore ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare si in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, sed specificè gravius præponderabit, eo magis quo fluidum densius.

PROBLEMA I.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, ex. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quærat volumen fluidi per regulas Stereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino suspensus fluido immergatur, & ope bilancis exactè notetur pondus amissum: quod erit pondus fluidi sub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus sit volumini proportionale (§. 130 *Mechan.*); pondus fluidi quæsitum per regulam trium (§. 302 *Arithm.*) invenietur.

Ex. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68:1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari potest pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque, & in usus futuros annotari.

SCHOLIUM.

64. *Pondus pedis cubici aquæ investigarunt multi; sed cum in diversis fluviis ac fontibus non eadem sit gravitas specifica aquæ, immo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio, mirum non est, observationes diversorum Autorum inter se admodum discrepare.* MORLANDUS (a) experimentis sæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum juxta mensuram Parisinam esse 70 librarum cum duabus unciiis.

THEOREMA XV.

65. *Gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in utroque amissa.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ sunt ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem solido in diversis fluidis amissa sunt gravitates absolutæ fluidorum sub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in iis amissa. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

66. *Invenire gravitatem specificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ suspendatur globus plumbeus, & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipso in aëre æquilibrium servet.

2. Glo-

(a) *Elevations des Eaux* p. 7.

2. Globus successive immittatur diversis fluidis quorum specifica gravitas determinanda, noteturque pondus quod in singulis fluidis demerso æquiponderat.
3. Singula hæc pondera subducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amissæ, & una ratio gravitatis specificæ fluidorum constabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum densitates sint ut gravitates specificæ (§. 33); eodem modo invenitur ratio densitatis fluidorum.

SCHOLION I.

68. *Maximi usus est hoc Problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum investigantur: quod scire non solum in Scientia naturali excolenda, sed & in vita civili ac praxi medica proficuum existit.*

SCHOLION II.

69. *Quodsi diverso tempore gravitatem specificam fluidorum investigates; hieme majorem, quam æstate deprehendes. Joan. Casp. EISENSCHMIDIUS (a) experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc Tabulam referre libet.*

Tabula gravitatis Liqueurum in pondere Parisino.						
Pollex cubicus Parif.	Æstate			Hieme		
	Unc.	Gross.	Gran.	Unc.	Gross.	Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus salis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti destillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cerevisiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cerevisiæ fuscæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur.		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ destillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHO-

(a) In *Disquisitione Nova de ponderibus & mensuris*, p. 174. & 175.

SCHOLION III.

70. Ut accuratissime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum constituti subtrahenda est a pondere solidi in aëre; vis vero quæ requiritur ad filum sub fluido demergendum, si specificè levius, addenda est ponderi amisso. Quodsi vero filum ex quo pendet solidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aëre subtrahendum est a pondere solidi in aëre, & pondus quod filum amittit a pondere in fluido amisso. Enimvero quoniam filum cum solido immerso idem totum constituit, hac cautione opus non est, si in omnibus fluidis quorum gravitates specificas inter se conferre volueris, eandem fili portionem una cum solido immergas. Quia crinis equinus eandem fere cum aqua gravitatem specificam habet; Experimenta Hydrostatica in aqua instituturi ex eodem solida suspendunt.

PROBLEMA III.

71. Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a superioribus, nec ne.

RESOLUTIO.

Exploretur per Probl. 2 (§. 66), quamnam ponderis sui partem amittat idem solidum in diversis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodsi enim pondus a solido solo in diversis profunditatibus amissum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi specificæ in partibus inferioribus, quæ in superioribus (§. 55), consequenter eadem densitas (§. 33). Quodsi vero in profunditate majore pondus majus amittitur quam in minore; in priore casu gravitas specificæ (§. 6), consequenter & densitas (§. 33), major erit quam in altero. Q. e. i. & d.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

SCHOLION.

72. Tentavit hoc in aqua Franciscus Tertius DE LANIS (a). Accepto autem vase duorum pedum altitudine, cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio 18 granorum perfectissimum facere æquilíbrium expertus est. Cum eundem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem descendere permetteret, ponderi ejus dimidium insuper granum decedere observavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immersum conjici debet, quippe extra aquam grani semissi æquiponderantem; aquæ partes inferiores a superioribus nullam pati compressionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus instituere.

PROBLEMA IV.

73. Determinare rationem quam habet gravitas specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi quod fluido specificè gravius existit.

RESOLUTIO.

Ponderetur massa quantalibet solidi in fluido, & notetur accurate pondus in eodem amissum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi in ipso demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 59). Q. e. d.

SCHOLION.

74. Si fluidum specificè gravius solido, proposito satisfiet per ea quæ in Capite subsequente traduntur.

L 1

THEO-

(a) In Magisterio Naturæ & Artis. Tom. 3. lib. 25. c. 1. exper. 7. f. 492.

THEOREMA XVI.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amissæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ corporum pondere æqualium sunt reciproce ut volumina (§. 29). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amissæ voluminum rationem habeant (§. 55, 18); gravitates corporum specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amissæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio quam habent gravitates specificæ solidorum, si massæ in aëre æquiponderantes in eodem fluido ponderentur, & pondera a singulis amissa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem specificam plurimorum Corporum solidorum investigarunt multi. Imprimis proluxa sunt Tabulæ, quæ in hanc rem exhibeantur in Transactionibus Anglicanis (a). Variorum quoque corporum, præsertim metallorum, gravitatem specificam jam ante dedit Marinus GHETALDUS (b) & ex eo Guilielmus OUGHTREDUS (c) : dederunt postea alii. Nobis suffecerit annotasse metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem specificam a PETITO multa solertia investigatam, prout eam exhibuit MERSENNUS (d) & ex ipso postea alii. Nempe si fuerit gravitas*

(a) N. 169. p. 926. & seqq. it. n. 199. p. 994. Conf. *Epitome Transact. Angl. Cl. LOWTHORPII*, vol. I. cap. 6. p. 60. & seqq.

(b) In *Archimede promoto*.

(c) In *Opusculis Mathematicis*, p. 61.

(d) In *Phænomenis Hydraulicis*. cor. prop. 47. *Cogitatorum Physico-Mathem.* p. 192.

Auri librarum 100.

erit sub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. $71\frac{1}{2}$	Stanni puri	$38\frac{1}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Argentii	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{3}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{3}$

PROBLEMA V.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem solidi mole ipsi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur ratio gravitatis specificæ fluidi ac solidi (§. 73).
2. Hac data, per Regulam trium invenietur gravitas solidi sub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi sub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas specifica aquæ ad gravitatem plumbi, ut $5\frac{1}{3}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 32 ad 363 (§. 178 *Arithm.*); reperitur gravitas plumbi $363. 200 : 32 = 2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur, data gravitate solidi unius, gravitas alterius, si ratio gravitatis specificæ investigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas stanni sub eodem volumine cum plumbo 30 librarum. Quia gravitas stanni ad gravitatem plumbi, ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 78 ad 121 (§. 178 *Arithm.*); reperietur gravitas stanni quæsita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA VI.

80. *Dato corporis solidi volumine, invenire volumen solidi alterius pondere æqualis.*

RESOLUTIO.

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium sint reciproce ut gravitates specificæ (§. 29), Problema præsens eodem modo resolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum, ut 21 ad 42, hoc est, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PROBLEMA VII.

81. Dato pondere corporis ex duobus miscibilibus compositi, una cum pondere quod in fluido aliquo amittit; invenire pondera miscibilium sigillatim.

RESOLUTIO.

1. Investigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido massa quædam determinata utriusque miscibilis amittat.
2. Hinc per Regulam trium porro eruat, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriusque massa, si pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus subtrahatur e majori, ut constet excessus quo pondus a specificè leviori amissum superat pondus a graviori amissum.
4. Porro pondus a specificè graviori amissum subtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut constet excessus quo pondus a mixto amissum superat pondus a graviori amissum.
5. Quodsi ad excessum primum, excessum alterum, & pondus mixti quæ-

ratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miscibilis specificè levioris: quod

6. a pondere mixti subductum relinquit pondus massæ specificè gravioris.

Ex. gr. Massa 120 librarum, ex stanno & plumbo commixtis composita, in aqua 14 libras amittit: quærentur pondera stanni & plumbi sigillatim. Quoniam experimentando reperitur, stannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

$$\begin{array}{r}
 37 - 5 = 120 \\
 \quad \quad 5 \\
 \hline
 \quad \quad \frac{600}{37} \text{ lib.} \\
 23 - 2 = 120 \\
 \quad \quad 2 \\
 \hline
 \quad \quad \frac{240}{23} \text{ lib.} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 500 \quad 240 \quad 13800 - 8880 = 4920 \\
 37 \quad 23 \quad \quad \quad 851 \quad \quad \quad 851 \\
 \hline
 14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851} \\
 4920 - 3034 = 120 \\
 41 \quad \quad \quad 1 \quad (120 \\
 \quad \quad \quad \times 6 \\
 3034 \times (74 \text{ lib. Pondus specif. lev.} \\
 \quad \quad \quad 120 \quad \quad \quad \text{Pondus mixti} \\
 \quad \quad \quad \times \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad - 46 \quad \quad \quad \text{Pondus specificè} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{gravioris.}
 \end{array}
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum = p , quod in fluido amittit = a , pondus amissum a specificè graviori ejusdem cum mixto ponderis = b , amissum a specificè leviori ejusdem itidem cum mixto ponderis = c , pondus specificè levioris quod

mixtum ingreditur $= x$; erit pondus specificè gravioris quod mixtum ingreditur $= p - x$, pondus a miscibili x in fluido amissum $= cx : p$, amissum a miscibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$

$$cx - bx = (a - b)p$$

$$x = (a - b)p : (c - b). \text{ Q. e. d.}$$

SCHOLIUM.

82. Eodem modo solvi potest Problema ab HIERONE Rege Syracusarum olim ARCHIMEDI propositum, quantum scilicet argenti corona aurea admiscuerit dolosus Artifex (a).

PROBLEMA VIII.

83. Determinare bonitatem massarum, massasque adulteratas distinguere a genuinis.

RESOLUTIO.

Præsupponendum hic est, bonitatem massæ æstimari ex ratione ipsius ad volumen, ex. gr. frumentum eo melius, quo gravitas specificæ major. Quare non alia re opus est, quam ut investigetur decrementum ponderis in aqua.

Quod si, eodem mediante, gravitatis specificæ massarum ratio ad fluidum aliquod determinetur (§. 73); massæ adulteratæ facile dignoscuntur, si facta ponderatione in eodem fluido, diversa ab hac gravitatis specificæ ratio reperitur (§. cit.).

SCHOLIUM I.

84. Cum aqua non semper ejusdem sit gravitatis specificæ, diversitas prius per ponderationem ejusdem solidi in eadem detegenda.

(a) Vid. VITRUVIUS Lib. 9. c. 3. f. 273.

SCHOLIUM II.

85. Notandum præterea, fieri nonnunquam posse, ut Hydrostaticum examen solum adulterationem factam non prodat. Ex. gr. Cum stannum argento sit specificè levius, plumbum specificè gravius; duo hæc metalla (quod inferius expressius docetur) ita misceri possunt, ut eandem cum argento gravitatem specificam nanciscantur: quæ massa postmodum cum argento permixta examen Hydrostaticum non verebitur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miscibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur (§. 81.).

SCHOLIUM III.

86. Notandum denique, per varia experimenta addiscendam esse diversitatem, quæ in gravitate specificæ corporum ejusdem speciei ad idem fluidum occurrere potest, antequam de adulteratione facta judicium feratur.

PROBLEMA IX.

87. Fluidum specificè gravius ponderare in specificè leviori.

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. mercurius in aqua ponderandus.

1. Assumatur vas vitreum, v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amissum 36: quod erit pondus aquæ ejusdem cum vitri massa voluminis.
2. Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amissum 43; quod erit æquale ponderi aquæ ejusdem cum vitro & mercurio simul sumto voluminis.

4. Qua-

4. Quare si pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde subtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc est, pondus ab argento vivo in aqua amissum 7.

THEOREMA XVII.

88. *Corpus specificè gravius in fluido specificè leviori ea vi descendit, quæ est excessui ponderis ejusdem supra pondus fluidi sub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonnisi ea vi descendit quæ ipsi relinquitur, demta parte in resistantiam fluidi vincendam impensa. Quamobrem cum hæc æqualis sit ponderi fluidi sub eodem volumine (§. 55); nonnisi excessu ponderis sui supra pondus fluidi sub eodem volumine descendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

89. Quoniam vis ad sustentandum corpus in fluido requisita æqualis est vi qua nititur deorsum in eodem; vis, quæ corpus specificè gravius in fluido sustentat, æqualis est excessui gravitatis absolutæ supra gravitatem fluidi sub eodem volumine. Ex. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{3}$ in aqua amittit de pondere suo $5\frac{1}{3}$ libras: vis ergo 42 librarum id sustentare valet.

COROLLARIUM II.

90. Quare cum excessus ponderis solidi supra pondus fluidi specificè gravioris minor sit, quam supra pondus specificè levioris sub eodem volumine; in specificè graviore vi minore descendit, quam in

leviore; consequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius descendit.

COROLLARIUM III.

91. Quamobrem in specificè graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod sustentandum, ne fundum petat, quam in specificè leviori (§. 89).

PROBLEMA X.

92. *Data solidi submersi gravitate absoluta, datoque volumine; determinare vim qua in fluido attolli potest.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63); unde,
2. Ob datum solidi submersi volumen, per Regulam trium inveniri potest pondus aquæ idem cum ipso volumen habentis.
3. Hæc ergo si subducatur a gravitate corporis submersi data, relinquetur vis quæ ipsum in aqua sustentare valet (§. 89); adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis submersi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ sit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum submerso volumen habentis 2800: quod ex 3000 subductum relinquit vim sustentantem 200 librarum.

SCHOLIUM.

93. *Hinc patet ratio, cur corpora quædam, quæ scilicet ad gravitatem specificam fluidi propius accedunt (§. 90), in fluido isto exigua vi sustententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aëre superant.*

CAPUT IV.

De Gravitatione Corporum Specificè Leviorum in Fluido Graviori.

THEOREMA XVIII.

94. *Corpus specificè levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi sub volumine partis immersæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur divisum, æquiponderent (§. 34); si corpus solidum eidem imponitur, perinde est ac si columnæ uni tantum ponderis accessisset, quantum est fluidi sub eodem volumine; consequenter columna ista præponderat (§. 35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§. 75 *Mechan.*), corpusque solidum immergitur. Quam primum vero corpus ea sui parte immersum est, ut fluidum ejectum ex spatio quod occupat pondere æquale sit gravitati totius corporis; columna ista non amplius præponderat. Corpus itaque ita immersum ab aqua sustentatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

95. Quia gravitates specificæ corporum ejusdem ponderis sunt reciproce ut volumina (§. 29); volumina vero fluidorum pondere æqualium sunt ut partes immersæ ejusdem solidi (§. 59); gravitates specificæ fluidorum reciproce sunt ut partes immersæ ejusdem corporis.

COROLLARIUM II.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviori.

COROLLARIUM III.

97. Quo majorem rationem solidi gravitas specificæ ad fluidi specificè levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur (§. 203 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

98. Si solidum fuerit ejusdem gravitatis specificæ cum fluido, corpus totum submergitur, & datum intra fluidum locum servat.

COROLLARIUM V.

99. Si corpus specificè levius in fluido graviori totum submergitur, a columnis collateralibus ea vi ad ascensum urgetur, quæ æqualis est excessui fluidi volumine solido æqualis, supra pondus solidi (§. 75 *Mechan.*).

COROLLARIUM VI.

100. Corpus adeo specificè levius fundo vasis incumbens non attollitur, nisi fluidum gravius affusum ultra partem assurgat quæ volumine æqualis est fluido ejusdem cum solido toto ponderis.

THEOREMA XIX.

101. *Gravitas specificæ solidi est ad gravitatem specificam fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum.*

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi solido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immersæ (§. 94). Cum adeo gravitates specificæ æquiponderantium sint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA XX.

102. Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immersæ sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Etenim pars immersa solidi A æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore A ponderis; & pars immersa solidi B æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Est vero gravitas solidi A æqualis gravitati solidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* consequenter gravitas fluidi expulsi eadem. Ergo pars immersa ipsius A est æqualis parti immersæ ipsius B. *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

103. Solidorum æqualium gravitates specificæ sunt ut partes eorundem in eodem fluido demersæ.

DEMONSTRATIO.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demersæ sunt ut gravitates fluidi expulsi (§. 130 *Mechan.*), adeoque

ut gravitates absolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates specificæ sunt ut absolutæ (§. 26); consequenter gravitates specificæ solidorum æqualium A & B sunt ut partes immersæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

104. Data gravitate pedis cubici fluidi, ex. gr. aquæ, una cum volumine partis immersæ solidi; invenire pondus totius corporis.

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis solidi æquale est ponderi fluidi quod idem cum parte immersa volumen habet (§. 94); ad pedem cubicum, volumen partis immersæ, & gravitatem pedis cubici unius fluidi quærendus est numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

Ex. gr. Pes cubicus aquæ est 70. librarum; (§. 64). Si itaque fuerit volumen partis immersæ 40 pedum cubicorum: reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA XII.

105. Data gravitate ex. gr. unius pedis cubici aquæ, & gravitate solidi; invenire volumen partis immergendæ.

RESOLUTIO.

Cum sit ut gravitas unius pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis, ita
pes

pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per Regulam trium invenitur.

Ex. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ est librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XIII.

106. *Datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate fluidi specificè gravioris; invenire vim qua illud sub hoc demersum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis ista æqualis est excessui ponderis fluidi sub eodem volumine, quod habet solidum submersum, supra pondus hujus (§. 99).

1. Ex datis volumine solidi, & gravitate unius pedis cubici aquæ, quæritur per Regulam trium gravitas fluidi sub æquali volumine.
2. Inde subtrahatur pondus solidi: ita nimirum vis quæsitæ relinquetur.

Ex. gr. Quæritur, qua vi opus sit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, sub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64); pondus aquæ sub volumine 8 pedum est 560. Unde si subducatur pondus solidi 100, relinquitur vis ad detinendum solidum sub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus specificè levius eadem vi ascendit in fluido graviori, qua ad ascensum ejus impediendum opus est (§. 75 *Mechan.*); per præsens Problema invenitur quoque vis, qua solidum specificè levius in fluido graviori ascendit.

PROBLEMA XIV.

108. *Instrumentum construere, quo explorare licet quantum salis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.

1. Ex tenui lamina cuprea construatur *Fig. I.* globus AB cum tubo BCEjus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.
2. Granula plumbea globo AB indantur, donec instrumentum in D usque immergatur.
3. Pondus totius aquæ, in qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum salis sit in ea dissolvendum, ut partem ponderis centesimam absolvat.
4. Postquam igitur tantum salis in aqua fuerit dissolutum, instrumentum de novo in ea mergatur, noteturque punctum E, quod hæret in superficie aquæ falsæ. Ita nimirum constabit terminus immersionis in aqua, quæ sub volumine 100 librarum salis libram unam comprehendit.
5. Quodsi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immersionis in aqua, sub volumine 100 librarum, duas, tres, quæ-

quatuor &c. libras falis continente ;
instrumento hoc explorare poteris ,
quantum falis in aqua data contineat-
tur.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim instrumentum in aqua
falsa mergatur, statim apparebit quot
libræ falis in aqua falsa centum libra-
rum contineantur. Quamobrem si
pondus aquæ falsæ exploretur, per Re-
gulam trium invenitur quantitas falis
in ea dissoluti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

109. Ut Problema præsens rectius intelliga-
tur, exemplo sequente id illustrare libet. Sit
gravitas aquæ puræ 2000 scrupulorum. Di-
vide 2000 per 99, quotus $20\frac{20}{99}$ indicabit,
quot scrupula falis in aqua dissolvenda, ut
ponderis centesimam partem constituat. Di-
vide ulterius 2000 per 98, quoti $20\frac{40}{98}$ du-
plum $40\frac{80}{98}$ indicat, quantum falis in aqua sit
dissolvendum, ut sit $\frac{2}{100}$ totius ponderis. Di-
vide similiter 2000 per 97, quoti $20\frac{60}{97}$ tri-
plum $61\frac{83}{97}$ indicat, quantum falis in aqua
dissolvi debeat, ut si $\frac{3}{100}$ totius ponderis &c.
Enimvero cum non sine tadio, ad singula di-
visionum puncta inveniendâ, aqua pura uti li-
ceat; numerum sequentem continuo subduc a
proxime præcedente; residuum enim indica-
bit quantum adhuc falis sit addendum ad
inveniendum punctum proxime sequens. Ex.gr.
ubi in aqua dissolveris falis $20\frac{20}{99}$ pro inve-
niendo puncto E: ut alterum F reperias ad-
denda sunt insuper scrupula $20\frac{2}{9}$ fere, quæ est
differentia inter $20\frac{20}{99}$ & $40\frac{80}{98}$.

SCHOLION II.

110. Similia instrumenta ex vitro construi Fig. 14.
solent; tubo BC in partes æquales diviso, &
hermetice in C sigillato, globo vero gemina-
to, ad examinandam fluidorum gravitatem
specificam (§. 101).

PROBLEMA XV.

111. Data gravitate vasis ex ma-
teria specificè graviori parandi, & gra-
vitate fluidi specificè levioris; determi-
nare cavitatem quam habere debet, ut
fluido supernatet.

RESOLUTIO.

Cum detur pondus fluidi sub volu-
mine unius pedis cubici, per *hypoth.*
volumen fluidi vasi pondere æqualis
per Regulam trium inveniri potest.
Quodsi ergo cavitas paulo major fiat,
vas sub eodem volumine minus pon-
deris continebit quam fluidum; adeo-
que eodem specificè levius erit (§. 5);
consequenter ipsi supernatabit
(§. 94).

Ex. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ
supernatans, cujus pondus 30 librarum.
Quia pondus unius pedis cubici est 70
librarum; reperietur volumen aquæ 30
librarum $428'' 571'''$, adeoque cubus dia-
metri sphæræ 818924 (§. 552 Geom.):
unde radix cubica extracta $9'' 3'''$ est dia-
meter sphæræ aqueæ 30 librarum. Quodsi
ergo diameter cavitatis fiat paulo major
ex. gr. unius pedis, eo minor ipsius pars
mergetur, quo major fuerit diameter.

PROBLEMA XVI.

112. *Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam specificè leviori volumen habentis, cujus pondus datur.*

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque solidum specificè gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi sub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero specificè leviori quam fluidum, & massa utriusque simul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque massa volumen habentis (§. cit.).
3. Quodsi itaque ab hoc pondere subducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore specificè leviori volumen habentis.

Ex. gr. Sit in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{3}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{3}$; reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis 16 librarum.

THEOREMA XXII.

Fig. 15. 113. *Vis quæ requiritur ad vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergendum, ad quam aqua plenum immergitur, æquatur vi tantundem aqua in aëre sustentanti.*

DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aëre sustentans gravitatis ejus æqualis est. Sed vis vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergens æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eadem ad eandem lineam AC vas immergit, *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vase contentam in aëre sustentare valet.

THEOREMA XXIII.

114. *Vis, quæ impenditur in solidum specificè levius sub fluido graviore detinendum, itemque pondus a solido graviore in fluido leviori amissum, gravitati fluidi accrescit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in solidum specificè levius sub fluido graviore detinendum, premit fluidum subiectum, adeoque perinde est ac si massa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc massa, utpote unum grave cum fluido constituens, una cum eodem ponderaret. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a solido specificè graviore in fluido leviori amissum a fluido sustentatur, ceu patet ex demonstratione Theorem. 14 (§. 55). Sed pondus quod fluido incumbit unum cum eodem totum constituit; adeoque

que perinde cum eo gravitare debet, ac si massa fluidi tantundem ponderans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

115. Hinc Problema 13 (§. 106) etiam experimentando resolvere licet.

COROLLARIUM II.

116. Liquet etiam, vim nullam perdi; sed tantum aliorum impendi in corporum gravitatione.

SCHOLION.

117. *Præsens Theorema, si volupe fuerit, non minus ac præcedentia omnia Experimentis facile comprobantur. Respondent Experimenta in istiusmodi materiis Examinibus arithmeticis, uti jam innuimus in Arithmeticæ Elementis (§. 125).*

THEOREMA XXIV.

118. *Si corpus specificè levius quodam fluido, cum corpore quod eodem specificè gravius est quomodocunque jungatur, ut unum absque altero moveri non possit; fueritque excessus fluidi istius supra pondus specificè levioris in eodem demersi æqualis excessui ponderis specificè gravioris supra pondus fluidi sub eodem volumine; corpora ista simul sumpta eandem cum fluido gravitatem specificam habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim gravitas corporis

specificè gravioris, tantum excedit gravitatem fluidi sub eodem volumine, quantum gravitas fluidi excedit gravitatem corporis specificè levioris sub eodem volumine, *per hypoth.* in volumine fluidi, quod voluminibus utriusque corporis simul sumptis æquale est, tantundem præcise gravitatis inest, quanta est gravitas utriusque corporis simul. Quamobrem cum corpora ista ita conjuncta, ut unum absque altero moveri non possit, *per hypoth.* adeoque vi gravitatis suæ simul deorsum nitantur (§. 4 *Mechan.*), consequenter quoad gravitationem pro uno eodemque corpore haberi debeant; simul sumpta eandem cum fluido isto gravitatem specificam habent (§. 5, 6). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

119. Quia solidum ejusdem gravitatis specificæ cum fluido in eodem totum submergitur, & datum intra fluidum locum servat (§. 98); corpora diversæ gravitatis specificæ inter se & cum fluido, in hypothesi Theorematis, tota simul in fluido demerguntur, datumque intra ipsum locum servant; consequenter nec ascendunt nec descendunt.

THEOREMA XXV.

120. *Vis corpus solidum in fluido specificè leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis, ut excessus voluminis supra partem qua in fluido isto mergitur ad hanc partem.*

DEMONSTRATIO.

Quod si in volumine corporis tantumdem gravitatis contineretur quantum in æquali volumine fluidi inest, totum in eodem submergeretur, & datum in eodem locum servaret, vi nulla extrinsecus accedente (§. 98). Quare cum sub volumine fluidi quod parti immersæ solidi æquale est tantum gravitatis insit quantum per totum corpus diffunditur (§. 94); vis, quæ extrinsecus superaccedere debet, ut solidum in dato loco intra fluidum detineatur, æqualis est gravitati fluidi per volumen diffusæ, quod æquale est excessui corporis solidi integri supra partem qua in fluido mergitur vi gravitatis propriæ. Enimvero in fluido tanquam gravi homogeneo gravitas est volumini proportionalis (§. 130 *Mechan.*). Ergo vis ad corpus solidum in fluido specificè leviori detinendum requisita est ad gravitatem totius solidi, uti excessus voluminis supra partem in eodem vi gravitatis propriæ immersam ad hanc partem immersam. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVI.

121. *Vis corpus solidum in fluido specificè leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum specificarum solidi atque fluidi, ad gravitatem specificam solidi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica fluidi ad

gravitatem specificam solidi, ut volumen totius solidi ad partem ejus qua in fluido vi gravitatis propriæ demergitur (§. 101). Ergo differentia gravitatum specificarum fluidi & solidi est ad gravitatem specificam solidi, ut excessus voluminis solidi supra partem immersam ad hanc ipsam partem (§. 193 *Arithm.*). Quoniam itaque vis in fluido corpus specificè levius suspensum detinens est ad gravitatem ejus, ut excessus voluminis supra partem qua vi gravitatis suæ in eodem demergitur ad hanc partem (§. 120); erit etiam eadem vis ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum specificarum solidi ac fluidi ad gravitatem specificam solidi (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

122. *Dato pondere corporis fluidi specificè gravioris, una cum parte ejusdem in fluido amissa; dataque ratione gravitatis specificæ fluidi ac corporis alicujus specificè levioris: invenire pondus ejusdem quod requiritur, ut specificè graviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Subtrahatur pars ponderis, quam corpus solidum specificè gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato; ut relinquatur vis quæ solidum intra fluidum in dato loco detinere potest (§. 75 *Mechan.*).

2. Ex

2. Ex data gravitate specifica fluidi & corporis specificè levioris, atque vi ad sustentandum specificè gravius intra fluidum modo reperta, seu, quod perinde est, ad detinendum specificè levius a graviore requisita; investigetur gravitas totius corporis specificè levioris: quod vi Theorematis præcedentis (§. 121) per Regulam trium, (§. 302 *Arithm.*) reperiri potest. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM I.

123. Quoniam solidum ejusdem gravitatis specificæ est cum fluido quod datum intra fluidum locum servat (§. 98), cum specificè gravius in eodem descendat (§. 88), specificè levius aliqua tantum sui parte mergatur (§. 94); per præsens Problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido specificè levius, alterum specificè gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem specificam habens.

COROLLARIUM II.

124. Si pondus corporis specificè levioris tantisper augeatur; specificè gravius ad superficiem fluidi attollet.

SCHOLIUM.

125. Theorema præsens cum ejus Corollariis etiam per Theorema 24 (§. 118) demonstrari poterat.

THEOREMA XXVII.

126. Vis corpus solidum in fluido specificè leviori sustentans est ad pondus ejusdem, ut differentia gravitatum spe-

cificarum illius ac fluidi ad gravitatem specificam solidi.

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi, ut pondus integrum solidi ad partem ejus in fluido amissam (§. 59). Quamobrem convertendo erit, ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi, ita excessus solidi supra fluidum ad pondus solidi integrum (§. 193 *Arithm.*). Est vero excessus solidi supra fluidum æqualis vi ad solidum intra fluidum sustentandum requisitæ (§. 89). Ergo hæc vis est ad pondus integrum solidi sustentandi, ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

127. Datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specificè gravioris, nec non gravitate specifica ejusdem fluidi & corporis solidi eodem specificè gravioris; invenire quantum hujus pondus esse debeat, ut specificè leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specificè gravioris; inveniatur vis ad solidum in fluido detinendum requi-

sita (§. 106) : quæ erit excessus
solidi specificè gravioris supra pon-
dus fluidi mole æqualis (§. 89).
Unde

2. ex data ratione gravitatum speci-
ficarum solidi specificè gravioris &
fluidi, atque vi ista, seu excessu præ-
dicto; invenitur pondus solidi spe-
cificè gravioris cum leviori conjun-
gendum, ut idem in fluido susten-
tet (§. 118). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quodsi solidi specificè gravioris
pondus tantisper augeatur, cum specificè
leviori una descendet, seu specificè levius
ad fundum secum abripiet.

SCHOLIUM.

129. *Non absimili modo plura alia Pro-
blemata solvi possunt, quæ in Philosophia Ex-
perimentalis, & Vita communi, ac Arte, usum
suum habere possint.*

FINIS HYDROSTATICÆ.





ELEMENTA AEROMETRIÆ.

P R Æ F A T I O.



MULTO jam tempore in more positum, ut Physicæ quædam capita in numerum disciplinarum mathematicarum relata fuerint, postquam, facta ad Experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ, & Analyseos, hoc est, Matheseos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia sane de causa Hydrostatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Astronomia in numero isto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus Aëris more Geometrarum & ex principiis Matheseos puræ demonstrari, demonstrata ad varios usus dextre applicari possint; Anno 1709, numerum Disciplinarum mathematicarum augere animum induxi, editis *Aërometriæ Elementis*, quæ anno sequente 1710, in Tomo secundo Elementorum Matheseos Germanicorum, Hydrostaticæ subjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto majori jure locum semel adeptum tuetur, quod Hydraulica, dudum in Mathesin recepta, in multis opem ejus imploret.

ploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydrostatica; ita Aërometria Hydraulicam illustrat. Antequam igitur ad Aërometriad animum appellas, Hydrostaticæ dogmatibus eundem imbuas opus est. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriad tibi sociam jungas e re tua omnino esse deprehendes. Jucundum vero est Aërometriæ studium, idemque utilissimum; tum quod inde ratio plurimorum Naturæ Phænomenorum desumitur, tum quod variarum Machinarum ac Instrumentorum structura in ea continetur. Ut brevitati consulatur & sequentia antecedentibus respondeant, non integra exhibeo Aërometriæ Elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita esse modo memini, sed quæ digniora reliquis visa sunt in compendio exhibere & nonnullis augere constitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris consentientibus, iis potissimum commendo, quibus curæ cordique fuerit ad Experimenta applicare Mathesin. Hunc fructum cupidus polliceor, & ut eundem consequantur ex animo apprecor.



ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Aërometriæ.

DEFINITIO I.

1. **A**ërometria est Scientia metiendi Aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem sit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam investigare (§. 23 Geom.); in Aërometria tradendæ sunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia, & extensionis terminos vel intensitatis gradus habentia, accurate determinari possunt.

DEFINITIO II.

3. Aër est corpus fluidum Telluri circumfusum, & spatia ab aliis corporibus in eadem relictæ occupans, nisi impediatur.

SCHOLION.

4. Definitionem Aëris nonnisi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuisse notam aëre præsentem semper obviam, ex qua ejus præsentia certo colligi potest.

DEFINITIO III.

5. *Compressio* est coarctatio massæ in minus volumen per impulsam aut pressuram alterius corporis facta.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

DEFINITIO IV.

6. *Condensatio* est coarctatio massæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO V.

7. *Dilatatio* est expansio massæ in majus volumen quam facta compressione habuerat.

DEFINITIO VI.

8. *Rarefactio* est expansio massæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO VII.

9. *Elater aëris* est vis qua vi comprimente sublata dilatatur.

AXIOMA I.

10. *Quo corpus est gravius, eo magis premit alia sibi subjecta.*

SCHOLION.

11. Patet ex definitione Gravitatis (§. 4 Mechan.). Corpus scilicet vi gravitatis nititur deorsum, adeoque premit alterum descensui resistens. Quo majore itaque vi deorsum nititur, eo magis quoque premit alterum sibi subjectum.

N n

Axi

AXIOMA II.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem est, elater quoque immutatus sit necesse est: quodsi vero elater majorem dilatationem produxerit, crevisse; sin minorem, decrevisse censendus est.*

EXPERIENTIA I.

13. *Promove celeriter manum per spatia quæ vacua esse videntur, faciem versus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipsam non contingat.*

COROLLARIUM.

14. *Necesse est adeo, ut interstitia inter corpora terrestria quæ vacua esse videntur, materia quadam repleantur, cujus partes sint admodum subtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impendant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod subtilissimum occupat (§. 3 Hydrostat.), hoc est, aer datur (§. 3).*

EXPERIENTIA II.

15. *Globo cupreo aut orichalceo satis capaci afferruminetur epistomium cum cochlea fœmina, ita ut syrinx, mediante cochlea mari, ad arbitrium ei adaptari rursusque removeri possit. Quodsi ope syringis plus aeris in globum intrudas, eumque clauso epistomio bilanci imponas; pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epistomium rursus aperies; ærem erumpere animadvertes, & globus metallicus recuperabit pondus quod ante intrusionem aeris habuerat.*

SCHOLION.

16. *Experimentum hoc excogitavit GALILÆUS GALILÆI, lagena vitrea usus (a); sed cum vasa vitrea ab aëre compresso facile nec sine periculo, adstantium frangantur, ego metallico uti soleo, in gratiam curiosorum idem repetens.*

COROLLARIUM I.

17. *Quoniam in globum metallicum plus aeris intrudi potest quam ordinarie capit; evidens est, ærem in minus volumen coarctari posse quam ordinarie occupat. Comprimi ergo potest (§. 5).*

COROLLARIUM II.

18. *Cum epistomio aperto aer rursus egrediatur, ipsoque egresso pondus pristinum recuperet globus quod ante compressionem aeris in ipso factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præcise aeris rursus egressum quantum intrusum fuerat. Aer itaque compressus ad pristinam expansionem redit, si vis comprimens aut expansioni resistens removeatur; adeoque elatere gaudet (§. 9).*

COROLLARIUM III.

19. *Certum itaque compressionis indicium est, quod aer intra vas quoddam magis compressus sit quam externus, si orificio ejus aperto, cæteris paribus, aeris quædam portio egredi observetur.*

COROLLARIUM IV.

20. *Denique quia pondus vasis augetur, si aer intra ipsum comprimitur; massa æreana exerceat opus est deorsum juxta lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 Mechan.). Gravis ergo existit (§. 4 Mechan.).*

COROLLARIUM V.

21. *Premittit ergo corpora subjecta secundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 Mechan.).*

Ex-

EXPERIENTIA III.

22. Quodsi vesicam aëre mediocriter repletam firmiterque constrictam ad ignem admoveas; ea non solum distenditur, sed & ingenti prorsus fragore tandem disrumpitur. Quodsi vero eam ab igne removeas antequam disrumpatur, statim flaccida evadit.

COROLLARIUM I.

23. Cum intra vesicam nil nisi pauculum aëris contentum fuerit; expansio vesicæ expansionem aëris inclusi arguit. Aër itaque rarefit (§. 8).

COROLLARIUM II.

24. Quia calore exspirato vesica distenta rursus flaccida fit; frigore in volumen minus rursus coarctatur, adeoque condensatur (§. 6).

EXPERIENTIA IV.

25. Si aër in vase comprimatur, ejus quandam portionem aperto orificio ex ipso iterum exspirare notabis in quacunque orificii directione.

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aëris nititur quaquaversum secundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA V.

ab. I. 27. Si tubum oblongum AB, cujus
fig. I. altitudo 32 pedibus Rhenanis major, in C epistomio instructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius A in aquam immergas, & aperto orificio B epistomium aperias; aqua tota cum impetu effluit: si vero obtura-

to orificio B epistomium C recludas; Tab. I. aqua usque ad D descendit, ac in al- Fig. I. titudine 31 pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vase GH contentæ pendula hæret.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendulæ aquam in vasculo sibi subjectam premit, nec tamen descendit; necesse est, ut, si aqua in vasculo contenta in istiusmodi columnas divisa concipiatur, qualis est quæ tubo AB subjacet, singulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum superficiæ aquæ incumbit aër (§. 3), eamque premit (§. 21). Columna igitur aërea a superficie aquæ in vasculo contentæ usque ad extremitatem atmosphæræ extensa, eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo super eadem basi, sed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. 36 Hydrost.);

SCHOLIUM.

29. Hoc æquilibrium aëris cum aqua primus observavit Hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra 18 cubitos attolli non posse miratus, atque cum GALILÆO Phenomenon insperatum communicavit, ipse causam ejus ignorans (a). Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter MARIOTTUS (b) altitudinem aquæ in tubo pendulæ reperit 32 pedum Parisiensium. Evangelista TORRICELLUS, discipulus GALILÆI, aquæ substituit mercurium, cujus altitudo, utpote quatuordecies gravioris aqua, reperitur 28 circiter digitorum Rhenanorum (§. 36 Hydrost.).

N n 2

CAPUT

(a) Mechan. Dial. 1. p. m. 15. 16.

(b) Traité du mouvement des Eaux. part. 2. Disc. I. p. 9.

CAPUT II.

De Elatere & Gravitate Aëris.

THEOREMA I.

30. **E**later aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis.

DEMONSTRATIO.

Aër enim superior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

31. Quoniam pondus aëris superioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aëris basis, sed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aëris inferioris eidem columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHOLION.

32. Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus in posterum, brevitatis gratia, Pondus Atmosphæricum.

COROLLARIUM II.

33. Elater aëris inclusi, si cætera cum ambiente externo paria sint, æquatur similiter ponderi totius superioris incumbentis.

COROLLARIUM III.

34. Inclusus adeo aër eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM IV.

35. Ergo etiam hic mercurium ad altitudinem 28 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo suspendit (§. 28, 29).

THEOREMA II.

36. Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur; aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet, eamque replebit.

DEMONSTRATIO.

Est enim aër in statu compressionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expansionem nititur (§. 9) & quidem quaquaversum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum nisui huic nihil resistat, expansio per cavitatem vasis actu sequetur (§. 75 *Mechan.*). Et quia, si aliquod spatium vacuum intra cavitatem vasis ab aëre irruente non occupatum supponamus, illud instar vasis vacui intra aërem aperti considerari potest; aër in vas irruens etiam hoc spatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit, eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo syrinx orificio alicujus vasis firmiter infigatur, & embolus postea extrahatur, aër in vase contentus per siphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO VIII.

38. *Antlia Pneumatica* est Machina, qua mediante aër ex vasis educi potest.

SCHOLION.

39. *Primus Antliæ Pneumaticæ inventor est Otto de Guericke, Consul Magdeburgicus,*
qui

qui Experimenta sua jam sub finem Comitiorum Imperialium, anno 1654 Ratisbonæ celebratorum, in præsentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit (a). Utut vero inter exteros non desint, qui laudem inventionis Roberto BOYLIO, Experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis Robertus HOOKIUS, recensente Cl. WALLERO (b), & ex Gallis, Joannes Baptista DU HAMEL variis scriptis celebris (c); ipse tamen BOYLIIUS, pro eo qui decet virum doctum candore (d), agnoscit quod OTTO DE GUERICKKE ipsum prævenit, quodque ipse ab iis quæ Casparus SCHOTTUS, in Mechanica Hydraulico-pneumatica A. 1657 edita, de vasis vitreis a GUERICKIO ab aëre evacuatis publicaverat, ad sua Experimenta, & Antliæ Pneumaticæ constructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipse GUERICKIUS (e): aliud artificium embolum extrahendi applicuit BOYLIIUS, quo nunc ordinarie utuntur. Recentius structuram Antliæ Pneumaticæ immutavit HAUKEBEIUS, Mechanicus Anglicus, cujus formam describit Cel. s' GRAVESANDIUS (f), ipseque inventor delineat (g).

PROBLEMA I.

40. Antliam Pneumaticam construere.

RESOLUTIO.

Tab. I. 1. Parètur cylindrus AB ex orichalco, ut embolus DE arctissime ipsam un-

(a) Vid. Præfatio ad Experimenta nova Magdeburgica.

(b) In Vita HOOKII Operibus ejus posthumis præmissa f. 3.

(c) In Philos. Vet. & Nov. Tom. 4. Phys. gener. Tract. 2. dissert. 3. c. 10. p. m. 234.

(d) In Præf. ad Nova Experim. Phys. Mech. de vi aëris elastica, p. m. 3.

(e) L. c. f.

(f) In Elementis Physica Mathematicis Tom. I. Lib. 2. c. 6. p. 309. Edit. sec.

(g) Physico-Mechanical Experiments. p. I. & seqq.

diquaque contingat, ne ulli moleculæ aëreæ inter eam & embolum locus relinquatur. Tab. I. Fig. 2.

2. Embolus constare debet ex orbibus coriaceis firmiter sibi mutuo appressis, mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum est bubulum, ex quo succingula militum parari solent. Probe autem notandum est, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis suillæ excoctæ permixtum, ne successu temporis indurescat.
3. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ, manubrio NO versato, commode extrahi ac intrudi possit.
4. In B afferruminetur basi cylindri tubulus BFKL cum epistomio GHI, ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico solido I composito.
5. Denique tubulus KL in L instruitur cochlea, ut vasa quorum orificia cochleis foeminis seu matricibus instructa, ad eundem firmari possint. Eodem modo adaptandus est, quoties usus postulat, catinus orichalceus PQ, cui vitra campaniformia commode imponere liceat.

Dico ex vasis ad hanc Machinam firmatis aërem educi posse.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur, epistomio versus antliam AB & tubulum KL aperto, aër in vase contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavi-

Tab. I. tatem expanditur (§. 36). Quodsi Fig. 2. jam epistomium claudatur versus tubulum KL, sit tamen apertum versus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rursus intrudatur; aer per epistomium FH extruditur; consequenter aeris aliqua portio ex vaseeducta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aeris ex vase educitur. Ope adeo Machinæ constructæ aer ex vasis educi potest. Q. e. d.

SCHOLION I.

41. In usu Antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini, & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad constructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum esse; ut embolus facile extrahatur & antliam undequaque arctissime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.

SCHOLION II.

42. In evacuandis vasis rationem habendam esse tantum vis elasticæ, ad quam solam in Demonstratione respeximus experimenta probant. Aërem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri docet expansio vesicæ sub campana suspensæ, firmiter constricto collo & nonnisi pauculo aeris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Aëtis Lipsiensibus (a) ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari posset, atque fornicem vasis evacuandi fere attingentem. Quantum, per hunc tubum, aeris facta qualibet emboli agitatio-

(a) A. 1711. mens. Jan. p. 14.

ne ex vase educeretur, maxima cum circumspeditione notavi: embolo enim intruso, donec aer in antlia contentus eandem cum externo densitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conspiciendos. Mox tubo isto remoto, evacuationem ejusdem vasis denuo tentavi: quam eadem prorsus ratione ut antea contingere didici. Usus autem sum vasis & majoribus, & minoribus eodem semper successu; estque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhe-nanorum. Quoniam vero doctissimis Diarii Trevoltiensis Collectoribus (b), quorum erga me humanitatem ut gratus prædicem fas est, hoc experimentum non sufficere visum est ad vim gravitatis ab evacuatione vasorum excludendam; ideo (§. 47) mox ex natura elateris id demonstrabimus, ut in Aërometria A. 1709 edita. Ceterum hæc ratio est, cur Antliæ situs ad horizontem inclinatus esse possit; nec opus sit ut, quod post GUERICKIUM etiam BOYLIUS & nuper HAUKSBEIUS fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.

SCHOLION III.

43. Aliud Antliæ genus ex duplici cylindro construxit experimentator industrius FRANCISCUS HAUKSBEË, cujus descriptionem exhibent Aëtorum Eruditorum Collectores (c). Eam, pro more suo, in multis immutavit LEUPOLDUS variis inventionibus Mechanicis celebris (d). Sed cum in comprimendo aëre usus ejus sit nullus, qui tamen in experimentis frequens esse solet; nec vasa tam exacte evacuari posse videantur quam Antlia ordinaria utendo: ideo antiquum Antliæ genus huic recentiori præferendum esse judico, nisi accedat medela.

THEO-

(b) Mémoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts. Août. 1711. art. 120. p. 1404.

(c) Supplem. Tom. V. Sect. 9. p. 403. Confer Autores ante, not. f & g, pag. præc. citatos.

(d) Act. Erudit. A. 1713. p. 95.

THEOREMA III.

44. *Aër Telluri circumfunditur; nec uno in loco altior esse potest quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus posterius. Dabitur ergo super aliqua Telluris parte spatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus existat, per spatium illud expandetur (§. 36). Impossibile igitur, ut intra aërem sit spatium aliquod ab aëre vacuum. Tale vero cum necessarium foret ob rotunditatem Telluris, nisi aër eam undique ambiret; necesse est aërem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quod si ponamus aërem uno in loco esse altior, quam in altero; aër vacuo contiguus statim expandetur (§. 36), adeoque non quiescet nisi undique eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

45. Quare si cetera sint paria, duobus corporibus eandem basin habentibus, in aequalibus a centro Terræ distantis, aequalia Atmosphæræ pondera incumbunt; adeoque ab aëre incumbente aequaliter premuntur (§. 42 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

46. In aequalibus itaque a centro Terræ distantis, si cetera fuerint paria, aër eandem densitatem habet; adeoque sub aequalibus voluminibus massas aequales continet (§. 8 *Hydrost.*); consequenter aequalia volumina ejusdem gravitatis existunt.

THEOREMA IV.

47. *In eodem vase, vel etiam in vasis communicantibus, aër ubique eandem densitatem habet, si cetera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet densitatem, aut non. Ponamus aërem in vase uno esse rariorem, in altero densiorem. Illius ergo densitas per pressuram minoris ponderis producet; hujus per pressuram majoris. Ast elater aëris æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo in aëre rariore minor vis elastica, quam in densiore. Quare cum aër uterque vi elateris quaquaversum sese expandere nitatur (§. 26); majore vi aër densior nititur versus rariorem, quam rarior versus densiorem. Ergo rarior cedit densiori (§. 75 *Mechan.*); comprimetur ergo ab elatere densioris (§. 5), & densior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aëri in utroque vase quies, nisi nifus aeris utrinque fuerit idem (§. 75 *Mechan.*), hoc est, nisi eandem densitatem habuerit, *per demonstrata.* Si igitur aër in utroque vase eandem densitatem non habuerit; ceteraque paria fuerint; ad eandem statim reducetur. In vasis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, ceteris paribus, aër ubique eandem densitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

48. Quare si embolo ex Antlia extracto aër ex vase ad ipsam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem Antliæ replet

replet cum eo, qui in vase evacuando residuus, densitatem eandem habet.

COROLLARIUM II.

49. Est ergo massa aëris intra cavitationem Antliæ contenti ad massam aëris in vase evacuando residui, ut capacitas Antliæ ad capacitatem vasis (§. 17 *Hydrost.*).

THEOREMA V.

50. In vase quod per Antliam evacuatur, semper est aër primitivus ad aërem residuum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad eam dignitatem elevatum cujus exponens aequatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam.

DEMONSTRATIO.

Dicatur aër à prima agitatione emboli, residuus aër residuus primus; qui à secunda emboli agitatione restat, aër residuus secundus, & ita porro.

Quoniam aër in vase contentus est ad aërem in Antlia contentum, ut capacitas vasis ad capacitatem Antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aëre in vase & ex aëre in Antlia contento, hoc est aër primitivus, ad aërem in solo vase contentum, hoc est residuum primum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius (§. 190 *Arithm.*). Similiter demonstratur, esse quantitatem aëris residui primi ad quantitatem residui secundi, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius; & in eadem ratione esse quantitatem aëris residui tertii &c. Ergo factum ex aëre primiti-

vo in residuum primum, secundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aëre residuo primo in secundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vasis & Antliæ junctim toties in se ducta emergens quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vasis solius multoties itidem in se ducta enascens (§. 213 *Arithm.*): hoc est, ut dignitas aggregati ex capacitate vasis & Antliæ junctim cujus exponens est numerus agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam (§. 250 *Arithm.*); consequenter aër primitivus ad residuum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 181 *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA II.

51. Dato numero agitationum emboli in Antlia factarum, una cum capacitate vasis & capacitate Antliæ; invenire rationem aëris primitivi ad residuum.

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ, una cum logarithmo capacitatis vasis solius.
2. Logarithmus posterior e priori auferatur, &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus cui in Tabulis respondet numerus indicans quoties aër primitivus contineat residuum quaesitum.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580'', capacitas vasis 460''; erit aggregatum ex utraque 1040''. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aër primitivus ad residuum $6(3.0170333 - 2.6627578) = 2.1656530$, cui in Tabulis respondet numerus $146\frac{4}{10}$. Est igitur aër primitivus ad residuum ut $146\frac{4}{10}$ ad 1, hoc est, ut 1464 ad 10 seu ut 732 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitatis vasis $=v$, capacitas antliæ & vasis simul $=a$, numerus agitationum emboli $=n$, aër residuus $=1$. Quoniam aër primitivus ad residuum, ut a^n ad v^n (§. 50); erit etiam primitivus ad residuum, ut $\frac{a^n}{v^n}$, ad 1 (§. 181 *Arithm.*); consequenter si residuus 1, Logarithmus primitivi est $n(la - lv)$ (§. 341, 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

52. Data capacitate vasis evacuan-
di, & capacitate Antliæ; invenire nume-
rum agitationum emboli ad aërem in
data ratione dilatandum requisitum.

RESOLUTIO.

1. Excerptantur ex Canone logarith-
morum logarithmi aëris primitivi,
aëris residui, capacitatis vasis, & ag-
gregati ex capacitate vasis & capa-
citate Antliæ.
2. Logarithmus aëris residui subduca-
tur ex logarithmo aëris primitivi:
similiter logarithmus capacitatis va-
sis auferatur ex logarithmo aggre-
gati ex capacitate vasis & capacitate
Antliæ.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

3. Differentia prior dividatur per alte-
ram. Dico, quotum esse numerum
agitationum emboli quæsitum.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580'', capaci-
tas vasis 460'', aër primitivus ad resi-
duum ut 1464 ad 10: reperietur nu-
merus agitationum emboli $(3.0656530 - 1.0000000) : (3.0170333 - 2.6627578) = 2.1656530 : 3542755 = 6$.

DEMONSTRATIO.

Sit aër primitivus p , residuus r , reli-
qua sint ut in Demonstratione Proble-
matis præcedentis: erit

$$\begin{aligned} p : r &= a^n : v^n & (\S. 50) \\ lp - lr &= nla - nlv & (\S. 341, 343 \\ & \text{Arithm.}) \\ \hline (lp - lr) : (la - lv) &= n. & Q. e. d. \end{aligned}$$

PROBLEMA IV.

53. Data ratione aëris primitivi ad
residuum, una cum capacitate vasis &
numero agitationum emboli; invenire
capacitatem Antliæ.

RESOLUTIO.

Sit aër primitivus ad residuum $=p:r$,
capacitas vasis $=v$, capacitas Antliæ
 $=x$, numerus agitationum emboli
 $=n$; erit

$$\begin{aligned} p : r &= (v+x)^n : v^n & (\S. 50) \\ \hline lp - lr &= nl(v+x) - nlv & (341, 343 \\ & \text{Arithm.}) \\ \hline lv + (lp - lr) : n &= l(v+x) \end{aligned}$$

Inveniri adeo potest logarithmus aggre-
gati ex capacitate vasis & Antliæ, con-
sequenter ipsum hoc aggregatum. Qua-
re si hinc auferatur capacitas vasis, re-
linquetur capacitas Antliæ.

Q Q

Ex. gr.

Ex. gr. Sit $p:r = 1464:10$, $v = 460''$,
 $n = 6$; erit $l(v+x) = 2.6627578 +$
 $(3.0656530 - 10000000):6 = 26627578 +$
 $3542755 = 30170333$. Ergo vi Canonis
 $v+x = 1040''$, consequenter $x = 580''$.

THEOREMA VI.

54. Numeri agitationum emboli quibus ope duarum Antliarum in eodem vase vel aequalibus vasis aër ad eandem rationem cum aëre primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmi vasis a logarithmo aggregatorum ex capacitate vasis & capacitate Antliarum.

DEMONSTRATIO.

Sit ratio aëris primitivi ad residuum $= p:r$, capacitas vasis $= v$, Antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aëris primitivi ad residuum, in evacuatione per utramque Antliam facta, eadem per hypoth. si numeri agitationum emboli fuerint m & n ; erit $(v+A)^m:v^m = p:r$ & $(v+a)^n:v^n = p:r$ (§. 50); consequenter $(v+A)^m:v^m = (v+a)^n:v^n$ (§. 167 Arithm.). Habemus itaque $ml(v+A) = nlv = nv(v+a) = nlv$ (§. 341, 343 Arithm.); consequenter $m:n = l(v+a):lv = L(v+A):lv$, hoc est, numeri agitationum emboli, quibus aër in eodem vase ope diversarum Antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vasis & aggregati ex vase & Antlia. Q. e. d.

COROLLARIUM.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vase quodam dato, ope Antliæ datæ, aër residuus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorsus educitur; inveniri potest numerus agitationum emboli, quibus ope alterius Antliæ datæ, in eodem vase, aër residuus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorsus educitur.

PROBLEMA V.

56. Invenire pondus unius pedis cubici aërei.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Vasis vitrei aut metallici BC satis capax, figura sphærica, collo oblongo AB & epistomio D præditi, pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aëre ejusdem cum ambiente externo densitatis repletur. Quo facto
2. educatur aër (§. 40), &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore subductum relinquit pondus aëriseducti.
5. Investigetur capacitas vasis (§. 556 Geom.), & ratio aëris residui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aëris residui per Regulam trium innotescet, a capacitate vasis subducendum, ut relinquatur volumen aëriseducti. Quod si Antlia accurate fuerit constructa, & tamdiu exerceatur quamdiu aër evacuatur; volumen aëris residui tantillum reperietur, ut tuto negligi, ipsaque capacitas vasis pro volumine aëriseducti assumi possit.

6. Datis

6. Datis adeo pondere atque volumine aëris educti, per Regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aëris (§. 130 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

57. *Methodo hac primum usus Otto DE GUERICKE (a) & post eum Burcherus DE VOLDER, qui sequentia annotavit (b). Pondus vasis sphaerici vitrei aëre admissso erat 7 libr. 1 unc. 2 dr. 48 gr. aëre educto, 7 libr. 1 unc. 1 dr. 31 gr. aqua admissa 16 libr. 12 unc. 7 dr. 14 gr. Erat igitur pondus aëris 1 dr. 12 gr. seu 77 gr. pondus aquæ 9 libr. 11 unc. 5 dr. 43 gr. seu 74743 gr. consequenter ratio gravitatis specificæ inter aquam & aërem $74743 : 77 = 970\frac{63}{77} : 1$. Jam cum VOLDERUS pedem cubicum aquæ deprehendisset 64 librarum, inferendo ut 970 ad 1, ita 64 libræ seu 1024 unc. ad numerum quartum proportionalem, per Regulam trium pondus unius pedis cubici aërei $506\frac{70}{97}$ seu 507 gr. fere, hoc est 1 unc. 0 dr. 27 gr. reperit. Testatur autem, se usum esse bilance quæ, etiamsi vel 25 aut 30 libræ utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtore, in hanc illamve partem manifeste propenderet.*

PROBLEMA VI.

58. *Dato corporis cujuscunque volumine, una cum pondere ejusdem in aëre; invenire pondus ejusdem in vacuo.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aëris (§. 56).
2. Per Regulam trium, ex eodem & volumine corporis dati, investigetur pondus aëris mole huic æqualis (§. 130 *Mech.*).

(a) *Experiment. de Vacuo* lib. 3. c. 21. f. 101.

(b) In *Quæstionibus Academicis de aëris gravitate*. Thes. 52. P. 35. & seqq.

3. Pondus hoc aëris subtrahatur a pondere corporis dato; quod relinquitur erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55 *Hydrost.*) *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Pondus unius pedis cubici aërei est 507 gr. (§. 57), pondus trium pedum cubicorum aquæ 210 librarum (§. 64 *Hydrost.*) seu 209 libr. 15 unc. 7 drach. 60 gran. Pondus trium pedum cubicorum aëris reperitur 1521 gr. seu 3 unc. 1 dr. 21 gr. Pondus adeo trium pedum cubicorum aquæ in vacuo 209 libr. 12 unc. 6 dr. 39 gr.

PROBLEMA VII.

59. *Data basi columnæ atmosphaericæ; invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Basis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipsi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ (§. 539, 541 *Geom.*).
2. Quærat ad volumina unius pedis cubici, & columnæ illius, atque pondus unius pedis cubici aquæ, numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmosphaericæ æquiponderantis (§. 130 *Mech.*), hoc est, pondus ipsius columnæ atmosphaericæ quæsitum.

Ex. gr. Sit diameter circuli 100^{''}, erit area 7850^{''} (§. 429 *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100^{''} (§. 27); erit volumen ejus 24335^{''}, consequenter, cum 1000^{''} sint 70 fere librarum (§. 64 *Hydrost.*) pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ seu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque cujus diameter unius pedis, ab aëre eadem vi premitur, ac si pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

60. Quodsi diameter sphaeræ fuerit unius pedis, basis columnæ atmosphaericæ incumbētis est circulus cujus diameter unius pedis. Quare cum hemisphaerium inferius ab elatere aëris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemisphaeria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA VII.

61. *Diversa plana premuntur ab aëre in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Pressio enim eadem, quæ foret si aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana subiecta gravitaret (§. 28); consequenter pressiones diversorum planorum ab aëre factæ sunt in ratione planorum istorum (§. 573 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Quare si plana quæ ab aëre premuntur fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

63. Quoniam aër premit secundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), superficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quomodocunque composita, eadem premittur vi, qua premitur planum horizontale eidem subiectum; consequenter pressiones superficierum quarumcunque sunt ut plana horizontalia iisdem subiecta.

SCHOLIUM.

64. *In hypothese Propositionis tacite supponitur situm planorum esse horizontalem: ex Demonstratione autem apparet Theorema cum suis Corollariis ad omnem pressionem a fluido gravi factam extendi posse.*

CAPUT III.

De Compressione Aëris.

PROBLEMA VIII.

65. **A** *Erem intra vas comprimere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. 1. Epistomio IHG respectu vasis clauso, respectu Antliæ vero aperto, embolus ex Antlia Pneumatica extrahatur: quo facto, aër externus in cavitatem Antliæ ruet (§. 36).

2. Converso epistomio, ita ut communicato inter vas & cylindrum de-Tab. I. Fig. 2.
tur, superius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur; aër ex Antlia in vas expelletur, quod cum jam aëre alio sit plenum, novum intrusum recipere nequit, nisi facta utriusque compressione (§. 5). Excipiet vero hospitio suo adventantem hunc hospitem, cum comprimi possit (§. 17).

3. Repe-

3. Repetita igitur hac operatione, aër continuo magis magisque comprimitur. Q. e. f.

THEOREMA VIII.

66. Aër primitivus est ad aërem in vase ope Antlia Pneumatica dato agitationum emboli numero compressum, ut capacitas vasis ad aggregatum ex capacitate vasis & facto capacitatis Antlia in numerum agitationum emboli.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliae = a , capacitas vasis = v , numerus agitationum emboli = n . Erit aër primitivus in antlia ad aërem in vase, ut a , ad v (§. 17 Hydrost.). Incrementum igitur massae in vase, dato numero agitationum emboli n , est ut na ; consequenter aër compressus ut $na + v$. Unde compressus ad primitivum ut $na + v$ ad v . Q. e. d.

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate Antliae 580, & capacitate vasis 260, seu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aëris compressi ad primitivum, ut 6 + 1 ad 1 seu ut 7 ad 1.

PROBLEMA IX.

68. Data ratione aëris primitivi ad compressum, una cum ratione capacitatis Antliae ad capacitatem vasis; invenire numerum agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.

RESOLUTIO.

Sit ratio aëris primitivi ad compressum = $p:c$, ratio Antliae ad vas = $a:v$,

numerus agitationum emboli = x , erit (§. 66)

$$p:c = v:ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv):pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aëris primitivi a compresso in capacitatem vasis, dividatur per factum ex aëre primitivo in capacitatem Antliae; quotus est numerus agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum. Sit ex. gr. $p = 1$, $c = 7$, $v = 1$, $a = 2$; erit $x = 6:2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodsi fiat $p = v$, erit $x = (c - p)v:av = (c - p):a$, hoc est numerus agitationum emboli invenitur, si differentia aëris primitivi a compresso per capacitatem Antliae dividatur. Ita in nostro Exemplo $x = (7 - 1):2 = 3$.

PROBLEMA X.

70. Data capacitate vasis in quo aër comprimendus, una cum ratione quam aër primitivus ad compressum habere debet, & numero agitationum emboli quibus ista compressio effici jubetur; invenire capacitatem Antliae.

RESOLUTIO.

Sit capacitas vasis = v , aër primitivus = p , compressus = c , numerus agitationum emboli = n , capacitas Antliae = x , erit (§. 66)

$$p:c = v:nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv):pn = x$$

Quodsi fiat $p = v$; erit $x = (c - p):n$.

Regula. Factum ex differentia aëris primitivi a compresso in capacitatem vasis, di-

vidatur per factum ex aëre primitivo in numerum agitationum emboli compressionem efficientium ; quotus erit capacitas Antliæ quæsitæ. Quodsi aër primitivus fuerit ut capacitas vasis, ejus a compresso differentia tantum dividenda est per numerum agitationum emboli.

Sit ex. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6$. $290 : 3 = 2$. $290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Est ergo $pn : c - p = v : x$, hoc est, capacitas vasis ad capacitatem Antliæ, est in ratione composita aëris primitivi ad ejus a compresso differentiam, & numeri agitationum emboli quibus ista compressio efficitur, ad unitatem (§. 159 *Arithm.*)

PROBLEMA XI.

72. *Invenire utrum aër comprimat-
tur in ratione ponderum, nec æe.*

RESOLUTIO.

- Tab. I.
Fig. 4.
1. Assumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC sit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.
 2. Brachium minus EC hermetice sigilletur in C, majus in A sit apertum : utrumque in particulas æquales dividatur.
 3. Pars tubi BE mercurio repleatur, ita ut CE sit aëre primitivo plenus.
 4. Hinc ulterius per orificium A successive plus mercurii infundatur ; notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio mercurius successive infusus pertingit.

Dico, si successive fuerint spatia in brachio minore super mercurio, reciproce ut differentiæ altitudinum ad quas in brachio majore mercurius successive

subsistit 28 digitis auctarum, & alti-Tab. tudinum ad quas in minore mercuri-
Fig. rius ascendit ; aërem comprimi in ratione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aër in brachio minore CE a pondere atmosphærico comprimitur (§. 21), quod æquatur cylindro mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium basium sint ut altitudines (§. 573 *Geom.*) ; tum volumina aëris reducti sunt ut altitudines spatiorum a mercurio vacuorum in brachio minore EC, tum volumina mercurii in brachio majore sunt ut altitudines ad quas mercurius ascendit. In aërem vero minori brachio inclusum, præter pondus atmosphæricum, volumina mercurii gravitant, quorum altitudo est differentia inter altitudines ad quas in brachio minore & altitudines ad quas in majore successive pertingit (§. 34 *Hydrost.*). Quare pondera aërem inclusum comprimunt ut differentiæ altitudinum ad quas successive in brachio minore mercurius ascendit ab altitudinibus ad quas in majore successive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18 *Hydrost.*). Quodsi adeo volumina aëris successive compressi in eadem ratione reciproca deprehendantur, aër omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

73. MARIOTTUS (a) notavit mercurium, in brachio majore AB 8 pedum, ad altitudi-

(a) *Essai de la Nature de l'Air* p. 17. & seqq. f. *Opusculum in Batavia recursorum* Tom. 1. p. 153.

itudinem 18 digitorum ascendentem, in minore 12 digitorum, ad 4 digitorum altitudinem substituisse. Aëris itaque volumen cum a solo pondere atmosphærico premeretur, erat 12 digitorum; ast cum aër premeretur a pondere atmosphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc est, a pondere mercuriali 41 digitorum, erat volumen compressi 8 digitorum. Est vero 8 ad 12, ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, si in brachio minori mercurius ad altitudinem 6 digitorum assurgat, altitudinem in majore esse 34. Volumen ergo aëris compressi est 6 digitorum, hoc est, subduplum ejus, quod habebat aër a solo pondere atmosphærico pressus. Ast pondus premens est $28 \div 28$, hoc est, duplum ponderis atmosphærici. Porro advertit, si altitudo mercurii in brachio minore sit 9 digitorum, altitudinem in majore esse 93. Est itaque volumen aëris compressi 3 digitorum, hoc est, subquadruplum ejus, quod habeat a solo pondere atmosphærico compressus. Sed pondus premens tum est $84 \div 28$, hoc est, quadruplum ponderis atmosphærici. Evidens ergo per experimentum MARIOTTI, volumina aëris compressi esse reciproce ut pondera comprimentia.

SCHOLION I.

ab. I. 74. Idem experimentum succedit, si diameter brachii minoris CE multo major fuerit diametro majoris AB (§. 34 Hydrost.): curandum tamen, ut amplitudo illius sit uniformis, cum in demonstratione supponamus partes quantaslibet tubi CE esse cylindros æqualium basium.

SCHOLION II.

75. Probe autem notandum est, præter pondera comprimentia, in voluminibus aëris quæ inter se comparantur, cætera omnia paria esse debere; cavendumque, ne eandem compressionis legem ad diversa aëris volumina applicemus, in quibus, præter pondera comprimen-

tia, aliorum quoque aërem alterantium datur disparitas: quoniam hoc in casu fieri potest, ut elateris; in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem densitatis, vires sint inæquales, adeoque & pondera compressionem aëris in utroque efficientia sint inæqualia (§. 553 Mechan.), consequenter & duo volumina aëris æqualia ab iisdem ponderibus inæqualiter comprimantur. Ex.gr. Ponamus duo volumina aërea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens est, quod paria pondera sustentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rarefiet igitur (§. 23), adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aër ad pristinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aëris inter se æqualia, cumque ab initio eandem densitatem habuerint, per hypoth. ejusdem densitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia sustinent.

SCHOLION III.

76. Vana vero est objectio; quod, admissa hac compressionis lege, sequatur aërem eo usque comprimi posse, ut spatium occupet infinite parvum, ejus respectu quod ante compressionem obtinuerat, pondere scilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad summum compressionis gradum pertingit, ponderi quantocunque prementi resistit; consequenter vi resistendi infinitæ æquipollet. Nec ideo vis elastica aëris in statu summæ compressionis viribus infinite variis æquatur (§. 553 Mechan.); sed minimæ earum a quibus maxima compressio proficisci valet. Est enim vis minor pars majoris (§. 20 Arithm.). Quamobrem si vis elastica aëris in statu summæ compressionis, & vi minori, & majori æqualis esset; pars toti æqualis foret: id quod absurdum (§. 84 Arithm.). Cum adeo vis elastica in statu summæ compressionis infinita non sit, explicandum est quomodo vi resistendi infinitæ æquipolleat. Scilicet si majus pondus aëri incumbere supponamus, quam ad sum-

summam compressionem efficiendam sufficit; accessus ponderis non amplius ad comprimendum aërem, sed ad compressum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellantur corpora aërem compressum ambientia, vi resistendi prædita esse debent, quæ toti ponderi incumbenti æqualur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim qua premit ad aërem compressum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impediencia & vi elastica aëris impressi & vi eidem impressa urgentur, quæ simul sumpta vim ponderis prementis adæquant.

SCHOLION IV.

77. Idem experimentum cum successu repetierunt Robertus BOYLE (a) & AMONTONS (b), hincque in voluminibus aëris majoribus.

THEOREMA IX.

78. Elater aëris compressi est ad elaterem dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi.

DEMONSTRATIO.

Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut pondus isti incumbens ad pondus huic impositum (§. 553 *Mechan.*). Enimvero in ratione horum ponderum est quoque reciproce volumen aëris minus compressi ad volumen aëris magis compressi (§. 73). Ergo & elater magis compressi est ad elaterem minus compressi seu dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi (§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

(a) In Defensione doctrina de elatere & gravitate aëris contra LINUM part. 2. c. 5. p. m. 42. & seqq.

(b) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, A. 1705. p. m. 155. & seqq.

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aëris magis compressi fortior est, quam elater minus compressi.

THEOREMA X.

80. Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ceteris paribus, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine contenti.

DEMONSTRATIO.

Si aër comprimitur in spatium subduplum, subtriplum, subquadruplum &c. erit aëris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in spatio simplici. Ast in spatium subduplum a duplo; in subtriplum a triplo; in subquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 73). Ergo, in æqualibus voluminibus, massæ aëris diversimode compressi in ratione ponderum comprimentium existunt; consequenter cum in eadem ratione sit elater aëris magis & minus compressi (§. 553 *Mech.*); elater aëris magis compressi ad elaterem minus compressi, est ut massa illius ad massam hujus sub æquali volumine (§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA XII.

81. Data ratione voluminis quod replet aëra solo pondere atmospherico pressus ad spatium in quod redigitur ulterius compressus; determinare vim elasticam compressi.

RESOLUTIO.

Cum elater aëris a solo pondere atmospherico pressi æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aëris basin; sed altitudinem 28 digitq.

digitorum habentis (§. 29); si ad volumen compressi, volumen nondum compressi, & pondus istius columnæ mercurialis quæratnr numerus quartus proportionalis, designabit is quantitatem vis elasticæ in aëre compresso (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodsi pondus columnæ mercurialis istius a quantitate vis elasticæ inventa subducatur; relinquitur vis elateris qua resistantiam ponderis atmosphærici superat.

PROBLEMA XIII.

83. Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus, aut in certo compressionis gradu; invenire effectum quem producturus est in alio quocunque compressionis gradu.

RESOLUTIO.

Cum effectus sint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mechan.*) vires vero productrices, in nostro casu, sint reciproce ut volumina in diversis compressionis gradibus (§. 78); si effectus quem elater aëris in certo compressionis gradu producit detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur, inferendo, Ut volumen aëris magis compressi ad volumen minus compressi, ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

84. Idem Problema quoque solvitur per analogiam Theor. 10 (§. 80).

PROBLEMA XIV.

85. Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus; determinare alium compressionis gradum; in quo idem producat intra atmosphæram effectum quemcunque majorem datum.

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aëris minus compressi $= c$, volumen magis compressi $= x$. Cum alter effectus intra Atmosphæram resistantem sit producendus, & integer tamen desideretur; quærenda erit compressio quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu desiderato & effectu quem aër a solo pondere atmosphærico pressus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aëre compresso producendus $= a + b$, consequenter $a + b : a = c : x$, hoc est, ut aggregatum ex effectu aëris a solo pondere atmosphærico pressi & effectu ab aëre in quæsito compressionis gradu intra Atmosphæram producendo ad effectum aëris a solo pondere atmosphærico pressi, ita volumen aëris a solo pondere atmosphærico pressi ad volumen aëris in quæsito compressionis gradu (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur.

SCHOLION.

86. Eodem modo Problema resolvitur ope Theorematis 10 (§. 80).

CAPUT IV.

*De Æquilibrio Aëris cum aliis Fluidis Specificè
gravioribus.*

DEFINITIO IX.

Tab. I. 87.
Fig. 5.

Per Tubum Torricellianum intelligo tubum vitreum AB, mercurio repletum, cuius osculum superius A hermetice sigillatum, inferius B stagnanti in vasculo CD mercurio immersum.

SCHOLION.

88. Vocatur istiusmodi tubus Torricellianus ab inventore TORRICELLIO (§. 29).

DEFINITIO X.

89. Barometrum est instrumentum, quo gravitatem aëris metiri licet. Baroscopium vero est instrumentum, quod variationes gravitatis aëris confuse indicat.

SCHOLION.

90. Vulgo pro synonymis habent has voces: sed mihi necesse esse videtur eas distinguere; cum aliud utique sit saltem cognoscere aërem hoc tempore esse graviolem, quam altero; aliud vero scire, quoties gravitas Atmosphæræ hac die superet gravitatem illius anteriorem: posterius vero constare debet, si gravitatem aëris metiaris (§. 21 Geom.).

THEOREMA XI.

91. In tubo Torricelliano major columna mercurii suspenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.

DEMONSTRATIO.

Columna mercurii suspensa æquatur columnæ aëreæ, cuius eadem cum ista basis, sed altitudo a superficie mercurii in vasculo stagnantis usque ad extremitatem Atmosphæræ exporrigitur (§. 36 Hydrost.). In locis vero altioribus columnæ aëreæ altitudo minor, quam in profundioribus; adeoque & ipsa columna in his gravior, quam in istis: consequenter minor columna mercurii columnæ aëreæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. Q. e. d.

SCHOLION.

92. Veritatem huius Theorematis Experimentia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit PASCALIUS, qui Phenomena tubi Torricelliani maxima cum solertia scrutatus est in Tractatu De Æquilibrio liquorum.

THEOREMA XII.

93. Si in tubo Torricelliano aëris quadam quantitas super mercurio, & in genere in vase quocunque; cuius orificium apertum fluido immersum, super fluido relinquatur: mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem suspenditur quam si vacuum fuerit, & pondus fluidi suspensi æquatur differentia elateris aëris inclusi a pondere atmospherico.

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aëris inclusi elater solus ponderi atmosphærico æquetur (§. 33), mercurius vi gravitatis propriæ descendere incipit. Ast dum descendit, aër inclusus dilatatur (§. 36), adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmosphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur mercurii, aut fluidi cujuscunque alterius, in tubo vel vase remanere debet, quantum differentiæ elateris aëris inclusi a pondere atmosphærico æquilibratur: consequenter mercurius ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus ab aëre vacuus extitisset. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

94. Aër igitur in tubo Torricelliano inclusus rarior ambiente externo, & ejus elater æquatur differentiæ ponderis mercurii suspensi a pondere atmosphærico (§. 36 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

95. Hinc liquet, si vas exiguo orificio instructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorsus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium sit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vase quocunque alio quantumvis amplo, si orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA XVI.

96. Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aëre prorsus vacuo ad altitudinem qua gaudet si tubi aliqua pars aere repleatur, una cum volumine aëris dilatati; invenire volumen aëris primitivi.

RESOLUTIO.

Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo suspensi (§. 33), adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere Atmosphærico (§. 94), pondera vero fluidi sint ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573 *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aëris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

Ex. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aëris dilatati 25, erit volumen primitivi $(28 - 14) 25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$. Quæ prorsus consona sunt experimento MARIOTTI (a).

PROBLEMA XVII.

97. Data altitudine fluidi in tubo vacuo, & ratione voluminis aëris primitivi ad volumen dilatati; invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo = a , altitudo in non vacuo = x , volumen aëris primitivi = b , dilatati = c , erit (§. 96).

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \text{ (§. 193 Arith.)}$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aëris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati, & altitudinem in tubo vacuo.

P p 2

Sit

(a) *Essai de la nature de l'air*, p. 23. & seqq.

Sit ex. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$;
erit $x = (25 - 12\frac{1}{2}) : 28 : 25 = 350 : 25$
 $= 14$.

PROBLEMA XVIII.

98. Datis altitudine fluidi in tubo vacuo, & volumine aëris primitivi; invenire volumen dilatati, & altitudinem fluidi in tubo non vacuo data altitudinis.

DEFINITIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis $= a$, altitudo voluminis aëris primitivi $= b$, dilatati $= x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, consequenter

$$m : m - a + x = x : b \quad (\S. 96).$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc est, si fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4}d^2 \qquad \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2 + bm\right)} = x.$$

Regula. 1. Quadrato semidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis, addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aëris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic addatur semidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aëris dilatati. Ex. gr. sit $a = 29$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}dd = 12\frac{1}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = 12\frac{1}{4} + 350 = 362\frac{1}{4}$, consequenter $\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + bm\right)} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA XIX.

99. Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vasculo stagnantis, & altitudine fluidi in tubo non vacuo; invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$; erit altitudo dilatati $= a - n$; consequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x , quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore, & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi, numerum quartum proportionalem.

Sit ex. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$; erit $x = (39 - 14) (28 - 14) : 28 = 25$.
 $14 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA XX.

100. Determinare quantitatem liquoris effluentis, si vas exigui orificii non plenum invertatur.

RESOLUTIO.

1. Inveniat altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 Hydrost.).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vase, atque altitudo totius vasis per hypoth. reperietur volumen aëris dilatati (§. 98). Unde si
3. subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, si vas invertatur (§. 95).

THEO-

THEOREMA XIII.

101. Si vasis ab aëre prorsus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris Atmosphæraæ æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demersumque aperiatur; liquor ascendens totum replebit: ast si non prorsus evacuatum fuerit; minus spatium liquor ascendens occupabit quam aëris primitivieducti quantitas repleverat.

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vasis demersum a pondere Atmosphæraæ prematur (§. 21), sub orificio autem vasis aperto nulla sit aëris pressura, quia ab aëre prorsus vacuum supponitur; tantum liquoris intra vas ascendere debet, quantum sufficit ad pressuram ei æqualem efficiendam quæ a pondere Atmosphærico efficitur (§. 75 *Mechan.*). Sed vasis altitudo liquoris Atmosphæraæ æquiponderantis altitudinem non excedit. *per hypoth.* Ergo pressura æqualis pressuræ ponderis atmosphærici a liquore intra vas contento effici nequit, nisi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quod si quædam aëris portio residua fuerit, ea super liquore ingrediente constituta rarior sit necesse est quam aër primitivus (§. 94). Majus ergo spatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10 *Hydrost.*). Quoniam adeo nonnisi spatium reliquum a liquore occupatur, evidens est liquorem ascendentem minus spatium vasis replere quam aëris primitivi

educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLIION.

102. SCHOTTUS autor est (a), cum Herbioli Experimentum sæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuisse, ut etiam minore vase adhibito omnem excluderent aërem. Equidem cum aqua in vas irrumpens spumescat, ipse id indicium irruentis aëris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expansione aëris intra aquam latentis idem Phænomenon deducunt, atque hinc aëris super liquore constituti originem derivant. Enimvero quemadmodum fore negari nequit, quod hac ratione aër in vase residuus aliquod capiat incrementum; ita rationi consentaneum videtur non omnem aërem ope Antliæ ex vasis educi, quia aër ad summum expansionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis dispersis ætheri subtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum massulæ metallicæ in fluidis specificè levioribus natare solent; ut taceam massulas aëreas, quæ ab eminentioloris in superficie vitri, non secus ac aliorum fluidorum guttulæ, fulciuntur. Sæpius tamen diverso tempore diversis quoque vasis repetito experimento didici, perexiguum esse aëris quod super liquore constitutum deprehenditur, vase summa cum diligentia evacuato.

PROBLEMA XXI.

103. Data altitudine vasis evacuati, & altitudine liquoris in ipsum ingressi; invenire volumen aëris primitivieducti.

RESOLUTIO.

I. Inveniatur altitudo ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).

P p 3

2. Quo-

(a) In *Techn. Curiosa*. lib. 1. c. 3. p. 24.

2. Quoniam porro datur altitudo vasis evacuati & altitudo liquoris ipsum ingressi, invenietur volumen aëris primitivi (§. 99).

COROLLARIUM.

104. Quodsi quantitas aëris educti quæ-
ratur per Probl. præf. eademque adhuc alia
ratione inveniat (§. 51), atque eadem
utrobique reperiatur; certum id erit in-
diciu, nihil aëris ex aqua irruente in
summitatem vasis ascendisse.

SCHOLIUM.

105. Dubito tamen, num hæ subtilitates
in praxi satis discerni queant.

PROBLEMA XXII.

Tab. I. 106. Si vas quoddam ABCD, aperto
Fig. 6. orificio CD, sub aqua aut alio liquore
perpendiculariter demergatur; quo pro-
fundius mergitur, eo magis aër in co-
dem comprimitur.

DEMONSTRATIO.

Cum enim aër aqua aliisque fluidis
levior existat (§. 57), si vas ABCD
perpendiculariter demergitur, ex co-
dem egredi nequit, quia in aqua de-
scendere deberet, quod fieri nequit
(§. 99 *Hydrost.*). Jam elater aëris inclusi
aquam subjectam eadem vi premit,
qua pondus Atmosphæricum (§. 33);
aqua vero in eadem libella circa orifi-
cium vasis, præter pondus atmosphæ-
ricum, etiam aqua super ea in vase stag-
nante premitur. Magis ergo premitur
circa orificium vasis CD, quam sub eo-
dem: consequenter cum aër intra vas
adhuc compressibilis existat (§. 17) &

in ratione ponderum compressionem Tab. I.
patiat (§. 73); aliqua liquoris Fig. 6.
quantitas intra vas ascendere debet,
eoque major quo profundius mergi-
tur. Q. e. d.

SCHOLIUM.

107. Veritatem Theorematis Experientia
confirmat. Imprimis huc pertinent Phæno-
mena Campanæ urinariæ a STURMIO (a)
enarrata & experimento illustrata.

THEOREMA XIV.

108. Iisdem positis quæ in Propo-
sitione præcedente, elater aëris in vase
ABCD compressi, una cum pondere li-
quoris in ipsum ingressi, æquatur aggrega-
to ex pondere Atmosphæra & pondere
columna ejusdem fluidi quæ eandem cum
fluido ultra libellam orificii CD in vase
FG stagnante altitudinem habet.

DEMONSTRATIO.

Aër in vase ABCD adhuc compres-
sibilis existit (§. 17); tamdiu itaque
vi prementi cedit, donec eadem in flui-
dum sub orificio CD pressura efficiatur
quàm circumcirca efficit aggregatum ex
pondere atmosphærico & columna flui-
di eandem cum vase basin eandemque
cum fluido ultra libellam orificii vasis
CD in vase FG stagnante altitudinem
habente (§. 75 *Mechan.*). Sed pressu-
ra in aquam sub orificio CD fit ab ela-
tere aëris in vase ABCD compressi &
pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10).
Quare elater aëris in vase ABCD com-
pressi, una cum pondere fluidi intrantis,
æquatur &c. Q. e. d.

(a) Colleg. Curios. part. I, Tent. 1. & seqq.

PROBLEMA XXIII.

Tab. I. 109. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vasis CD consistentis, una cum volumine ejus, & volumine aeris primitivi cavitatem vasis ABCD implentis; invenire volumen aeris compressi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fluidi $=g$, ejus volumen $=c$, pondus atmosphæricum $=a$, volumen aeris primitivi $=b$, volumen fluidi in vas ascendentis $=x$, erit volumen compressi $=b-x$. Jam cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmosphærico (§. 33), reperietur elater aeris compressi $=ab : (b-x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas ascendentis $=gx : c$. Habemus ergo

$$ab : (b-x) + gx : c = g + a \quad (\S. 108).$$

$$abc + bgx - gx^2 = bgc + abc - gcx - acx$$

$$x^2 - bx - cx - acx : g = -bc$$

hoc est; si fiat $b+c+ac : g = d$

$$x^2 - dx = -bc$$

$$\frac{1}{4}dd \quad \frac{1}{4}dd$$

$$x^2 - dx + \frac{1}{4}dd = \frac{1}{4}dd - bc$$

$$\frac{1}{2}d - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}$$

$$x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aeris primitivi & volumine fluidi super libellam orificii vasis stagnantis, addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmosphæricum, & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ

femisummæ quadrato subtrahatur factum Tab. I. ex volumine aeris primitivi in volumen Fig. 6. fluidi ultra libellam orificii vasis stagnantis.

3. Ex residuo extrahatur radix quadrata, quæ si 4. a femisumma supra inventa subtrahatur relinquetur volumen fluidi in vas ascendentis.

COROLLARIUM I.

110. Cum pondus liquoris vas intrantis sit $gx : c$, idem substituto valore ipsius x , reperitur $= (\frac{1}{2}d - \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}) g : c$.

COROLLARIUM II.

111. Et quia elater aeris in vase compressi est $ab : (b-x)$, idem substituto valore ipsius x , reperitur $= ab : (b - \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)})$.

PROBLEMA XXIV.

112. *Data profunditate vasis, seu altitudine aeris primitivi in ejus cavitatem contenti; invenire profunditatem ad quam intra fluidum data gravitatis orificium CD deprimendum, ut volumen aeris compressi habeat ad volumen aeris primitivi rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aeris primitivi $=b$, pondus atmosphæricum $=a$, gravitas fluidi $=g$, ejus altitudo super libella orificii $=x$, altitudo aeris compressi $=c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $=b-c$. Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi Atmosphærico (§. 33); reperietur elater compressi $=ab : c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*), erit gravitas fluidi in vas ascendentis $= (bg - gc) : x$. Ergo

$ab :$

Tab. I. $ab : c + (bg - gc) : x = a + g$

Fig. 6. $abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmosphærico in altitudinem aëris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmosphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aëris compressi ad gravitatem fluidi; ita differentia quadrati altitudinis aëris compressi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vasis sub fluido demersi.

SCHOLION.

113. *Hactenus supposuimus aërem, dum comprimitur, cum ambiente externo cetera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aëre ambiente, aër in vase condensatur (§. 24). Dispiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA XXV.

114. *Datis capacitate vasis, hoc est, volumine aëris primitivi, volumine fluidi demersum ingressi, & volumine fluidi supra orificii vasis libellam stagnantis, una cum pondere atmosphærico; invenire rationem voluminis aëris compressi tantum ad volumen compressi & condensati simul.*

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri potest volumen aëris compressi (§. 105), & si volumen fluidi vas ingressi a volumine aëris primitivi subducitur, manifestum est relinqui volumen aëris compressi & condensati simul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compressi tantum, quam volumen aeris & compressi & condensati, illius ad hoc ratio latere nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

115. *Quodsi volumen aëris compressi & condensati subtrahatur ex volumine aëris compressi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condensationem metitur.*

COROLLARIUM II.

116. *Quodsi contingat hanc differentiam esse nullam; vel aër ambiens non erit calidior aqua, vel aër compressus ab isto frigoris gradu nullam patiat necesse est condensationem.*

COROLLARIUM III.

117. *Quodsi differentia aliqua prodeat, evidens est aërem compressum adhuc condensatum, & spatium a compressio in condensatione derelictum a fluido ascendente repletum fuisse. Elater igitur aëris compressi facta condensatione decrevit, & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in spatio derelicto contenti (§. 93).*

SCHOLION I.

118. *Supposuimus in hactenus demonstratis Propositionibus vasa esse cylindrica vel prismatica: alias enim prolixiore subinde opus fuisset calculo.*

SCHOLION II.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in Problemate præsentè de aëre condensato demonstrata sunt ad rarefactum quoque transferri posse, si vas in fluido calidiore quam aër ambiens demergatur.*

THEOREMA XV.

120. *Si pondus Atmosphæra minuitur; mercurius in Tubo Torricelliano descendere; si illud augetur; hic ascendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna mercurialis intra Tubum Torricellianum suspensa æquatur pon-

ponderi atmosphærico (§. 29). Quare si pondus Atmosphærae minuitur, mercurius fortius deorsum nititur quam pondus Atmosphærae resistit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentia ponderis columnæ mercurialis & ponderis atmosphærici æquatur (§. 75 *Mechan.*). Quare si volumen mercurii minuitur, in tubo utique descendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonstratur, pondere atmosphærico aucto, mercurium in Tubo Torricelliano ascendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121. Cum altitudo mercurii in Tubo Torricelliano quotidie variet, experientia teste; aëris quoque gravitas quotidie varietur opus est.

SCHOLIUM I.

122. Mathematici Parisienses maximam mercurii altitudinem $28'' 4'''$, minimam $26'' 4'''$ observaverunt, ut adeo omnis variatio intra $2''$ seu $24'''$ pedis Parisini comprehendatur. A. 1711. d. 23. Dec. apud nos, flante Coro & cælo nubilo, altitudo maxima fuit $30'' \frac{3}{8}$ pedis Londinensis, d. 21. Octobr. h. 7. mat. minima vix excessit 28 digitos pedis Londinensis, flante Zephyro & tempestate pluviali, cum nocte præcedente procella sæviisset. Nec memini, me intra quinquennium ex quo tales observationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem mercurii deprehendisse. Tota igitur variationis scala non excedit $2 \frac{3}{8}$ digitos pedis Londinensis, qui cum deficiat a Parisino $\frac{2}{144}$ (§. 26 *Geom.*); observationes nostræ cum Parisinis satis conspirant.

SCHOLIUM II.

123. Equidem Celeberrimus HALLEIUS (a)

(a) *Philos. Transact.* n. 197. p. 650.

cum globum vitreum, collo tenui instructum & mercurio plenum, aquæ ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus $\frac{1}{74}$ sui crescere observavit, atque adeo hinc constat, mercurium rarefieri, iterumque condensari (§. 6. 8). Quoniam tamen incrementa & decrementa mercurii calori atque frigori proportionalia non sunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, immo maxima plerumque hieme observantur (§. 122); variationes ejus a calore ac frigore minime pendent.

THEOREMA XVI.

124. Si tubus recurvus ABC, in A Tab. I. hermetice sigillatus, in C vero apertus, Fig. 7. ut Torricellianus, mercurio repletur; erit variatio altitudinis mercurii in crure longiore AB, ob variatum pondus Atmosphærae, subdupla variationis altitudinis mercurii in Tubo Torricelliano ex eadem causa contingentis.

DEMONSTRATIO.

Altitudo enim mercurii in brachio majore Atmosphærae æquiponderantis semper computanda est a superficie mercurii in crure minore BC stagnantis (§. 34, 36 *Hydrost.*). Ponamus jam mercurium in crure minore CB consistere ad E, in majore AB ad D, sitque $HD = 26''$. Aucta Atmosphærae gravitate, mercurius ascendat ex D in F (§. 120): tum ex E descendet in G, eritque, suppositis tuborum CB & BA diametris æqualibus, $EG = DF$. Ponamus esse $EG = 1''$, erit $IF = 28''$. Quare si in Tubo Torricelliano mercurius ascendit per $2''$, in tubo recurvo nonnisi ex D in F, hoc est per $1''$, ascendit. Est ergo variatio altitudinis mercurii, ob mutatum pondus atmosphæricum,

ricum, in istiusmodi tubo recurvo contingens, subdupla variationis altitudinis mercurii ex eadem causa in Tubo *Torricelliano* contingentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

125. Quia vasculum, cui Tubus *Torricellianus* immittitur, cruri breviori respondet; evidens est, illud tam amplum esse debere, ut mercurius ex tubo per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non sensibilibiter augeat, ex. gr. non nisi dimidia lineola. Ita enim mercurius in tubo per unam lineam ascensus propter hoc impedimentum non nisi per lineam parte sui quadragesima octava multatam ($1\frac{1}{2} - \frac{1}{48}$) ascendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

COROLLARIUM II.

126. Cum scala integra, per quam mercurius in Tubo *Torricelliano*, vasculo satis amplo, ascendere ac descendere solet, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non nisi 12 linearum seu digiti unius.

PROBLEMA XXVI.

127. *Data integra scala, per quam ascendit & descendit mercurius in Tubo Torricelliano, una cum diametro tubi; invenire diametrum vasculi; in quo si tubus contineatur, mercurius ex eo delapsus non impediat quominus mutationes satis notabiles existant.*

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur quominus mercurius ex tubo delapsus mercurii in vasculo stagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini mercurii in vasculo, ex demonstratione Theorematis 16 (§. 124). Id autem obtinetur, si

ea sit vasculi amplitudo, ut mercurius per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non nisi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque scala mercurialis in Tubo *Torricelliano* = a , diameter tubi = b , erit, supposita ratione diametri ad peripheriam = $d:p$, cylindrus mercurialis intra scalam continendus = $pb^2a:4d$ (§. 541 *Geom.*). Sit porro diameter vasculi = x , cum altitudo cylindri in quem in id delapsus mercurius abire debet, sit dimidiæ lineolæ = m ; erit soliditas ejusdem = $mpx^2:4d$ (§. cit.), consequenter

$$mpx^2:4d = pb^2a:4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2:b^2 = a:m \text{ seu } x:b = \sqrt{a}:\sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi, in ratione subduplicata scalæ mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapsi in vasculo, hoc est ut $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 125), seu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc est, diameter vasculi est media proportionalis inter altitudinem scalæ & diametrum tubi, si mercurius ex integra scala delapsus in vasculo ascendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA XXVII.

129. *Datis diametris tubi & vasculi, una cum altitudine intervalli per quod mercurius in tubo descendit; invenire altitudinem intervalli per quod ascendit in vasculo; & contra.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi = a , diameter vasculi = b , altitudo descensus = c , altitudinis mercurii in vasculo incrementum = x , erit (§. 127)

$$a^2 pc : 4d = b^2 px : 4d$$

$$a^2 c = b^2 x$$

Theorema. Incrementum altitudinis mercurii in vasculo est ad intervallum descensus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi.

COROLLARIUM.

130. Ergo si mercurius descendit per quodcumque intervallum c , erit verum descensus intervallum = $c \pm a^2 c : b^2$.

PROBLEMA XXVIII.

131. *Baroscopium construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. II. Fig. 8. 1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice sigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, mercurio ita repleatur ut nihil aëris super eo relinquantur, nec ulli vesiculæ inter parietes vitri & mercurium locus concedatur: id quod optime succedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari instructi.
2. Orificium tubi ita repleti ut mercurius ex eo redundet, digito fortissime appressio, ne intra eum & mercurium aëris quidpiam remaneat, mercurio in vasculo ligneo, cujus diameter per Probl. 26 (§. 127) determinanda, ita immergatur ut fundum non attingat.

3. Intervallo a superficie mercurii in Tab. II. vasculo stagnantis 26 digitorum Fig. 8. Rhenanorum, affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos divisæ, qui rursus in 12 lineas aut particulas quocumque æquales alias subdividendi.

4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciso indatur, & superius alio tegatur, ut ex conspectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam Tubus hic idem est cum *Toricelliano* (§. 87); Baroscopium utique erit hac ratione constructum (§. 89, 120).

SCHOLION I.

132. Non opus esse ut vasculum ligneum, in quo mercurius stagnat, sit apertum, & evidenti experimento (a) docui, & propria experientia didici. Meum enim Baroscopium non modo vasculum habet undiquaque probe clausum; sed præterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aëris externi ad superficiem vasculi admittenti. Hoc tamen non obstante, mutationes in altitudine mercurii consuecta ratione contingunt.

SCHOLION.

133. Non defuere, qui in eo operam suam collocarunt, ut mutationes sensibiliores efficerent. CARTESIUS primum, postea quoque Tab. I. HUGENIUS commendarunt tubum AB vase Fig. 9. cylindrico CD instructum, & dimidium vasis una cum quadam tubi superioris parte aqua, reliquam vasis partem ac tubum inferiorem mercurio repleti jusserunt. Advertit vero HUGENIUS votis non respondere eventum. Etenim aër in aqua contentus vinculis suis

Qq 2

suis sese liberabat & partem tubi superioris vacuum replebat: quo facto, cum aer inclusus rarefieret & condensaretur (§. 23, 24), depressiones & elevationes mercurii a gravitatis Atmosphære variationibus productæ non amplius discerni poterant. Cum adeo didicisset consultius esse ut mercurius locum vacuo proximum occupet, aliam Baroscopii compositi constructionem excogitavit, quam Problemate sequente explicamus.

PROBLEMA XXIX.

134. *Baroscopium compositum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. 1. Fiat tubus recurvus ADG, in A hermetice sigillatus, in G vero apertus, & duobus vasis cylindricis BC & EF instructus.

2. Vasa BC & EF sint inter se æqualia & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum distent, quanta scilicet est mercurii in media aëris gravitate altitudo in Baroscopio simplici.

3. Baroscopio huic infundatur primum mercurius, dum Baroscopium simplex mediam aëris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC assurgat, reliquo spatio ad A usque vacuo non solum a mercurio, sed ipso etiam aëre crassiore.

4. Postea quoque infundatur aqua communis cum parte sexta aquæ regię permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis constitatur. Ita Baroscopium compositum constructum.

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim, ultra libellam mer- Tab. I.
curii in vasculo EF contenti per tu- Fig. 10
bum AD assurgens, ponderi atmosphærico & liquoris æquilibratur (§. 34 *Hydrostat.*). Aucto igitur Atmosphære pondere, augeri debet columna illa mercurialis: consequenter liquor descendet. Ast imminuto Atmosphære pondere, columna mercurialis quoque imminui debet: consequenter liquor ascendet. Liquoris adeo descensus incrementum gravitatis aëris, ascensus vero decrementum indicat; consequenter instrumentum ita constructum Baroscopium est (§. 89). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

135. *Baroscopium Hugenianum multo minores gravitatis aëreæ mutationes indicare, quam Tubus Torricellianus, attendentibus manifestum est. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamsi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expressi instilletur, liquori innatatura; loco aquæ oleum Tartari per deliquium infundi potest.*

PROBLEMA XXX.

136. *Baroscopium construere, cujus mutationes sint multo sensibiliores quam in Barometro ordinario.*

RESOLUTIO.

1. Tubo recurvo ACD, cujus crus Tab. I.
CD sit ad alterum AC perpendicula- Fig. 11
re, cohæreat vasculum cylindricum B, cujus diameter tanto major esse debet, quanto sensibilius mutationes Baroscopium indicare debet.

2. Crure AC in situm horizontalem incli-

- ab. I. inclinato, mediante infundibulo, Baroscopium repleatur mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua sit; nec metuendum, ne in minima Atmosphaera gravitate mercurius elabatur.
3. Cruri horizontali aptetur scala in suos digitos divisa & in lineas subdivisa. Dico hoc Baroscopium mutationes gravitatis aeris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum pondus Atmosphaerae augetur, mercurius in vasculo tanto intervallo ascendit, quanto in ordinario Baroscopio ascendere solet (§. 120): consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmosphaerici multo minora indicare valet, quam Baroscopium commune sive simplex. Similiter quando pondus Atmosphaerae minuitur, mercurius in vasculo tanto intervallo descendit, quanto in ordinario Baroscopio descendere solet (§. 120): consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo versus officium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmosphaerici multo minora indicat, quam Baroscopium simplex.

Q. e. d.

PROBLEMA XXXI.

137. Data diametro tubi CD; invenire diametrum vasculi AB, ita ut scala descensus mercurii in tubo DC

habeat ad scalam ascensus in vasculo AB rationem datam. Tab. I. Fig. 116.

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, ratio scalarum $b : c$, diameter vasculi $= x$. Cum tantum mercurii in vasculum ascendat, quantum per aeris gravitatem in tubo DC deprimitur, positaque ratione diametri ad peripheriam $= d : p$, quantitas mercurii in tubo recedentis sit $a^2 pb : 4d$, & quantitas vasculum ingressi $= x^2 pc : 4d$ (§. 541 Geom.); erit

$$a^2 pb : 4d = x^2 pc : 4d$$

$$a^2 b = x^2 c$$

$$x^2 : a^2 = b : c$$

$$x : a = \sqrt{b} : \sqrt{c}$$

Theorema. Diameter vasculi, est ad diametrum tubi; in ratione subduplicata reciproca scalarum.

COROLLARIUM.

138. Datis ergo diametro tubi CD, & diametro vasculi AB, una cum scala mercurii in vasculo; invenitur scala in tubo, inferendo, Ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi, ita reciproce scala mercurii in vasculo ad scalam mercurii in tubo.

PROBLEMA XXXII.

139. Datis diametris tuborum & vasculorum, una cum altitudinibus intervallorum per quae mercurius descendit; invenire utrum Baroscopia concordent, nec ne.

RESOLUTIO.

Querantur vera descensus intervalla in eadem mensura (§. 130): quae si utrinque aequalia reperiantur, evidens est, Barometra inter se concordare; sin minus, discordare.

SCHOLIION.

140. Apparet adeo, ad judicandam duorum vel plurium Barometrorum concordiam, aut veram intervallorum ascensus differentiam, non sufficere ut utrique eadem graduatio applicetur, nisi utriusque vasculi (§. 127.) ea fiat amplitudo, ut mercurius ex tubo delapsus, gravitate Atmosphærae imminuta, altitudinem in vasculo stagnantis sensibilibiter non variet.

THEOREMA XVII.

Tab. I. 141. Si Tubus Torricellianus AB in Fig. 12. clinatur, erit cylindrus mercurialis Atmosphæra æquiponderans ad cylindrum mercurialem eidem in situ tubi verticali æquiponderantem, ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmosphærici egressum mercurii ex tubo AB per osculum A impredientis, concipiatur cylindrus mercurialis isti æquiponderans in tubo verticali ad A resistere; erit ejus gravitas ad gravitatem mercurii in tubo inclinato, ut longitudo AB, ad altitudinem BC (§. 34 Hydrost.). Cum itaque cylindro mercurii verticali pondus Atmosphærae æquale sit, erit etiam gravitas mercurii in tubo inclinato ad hoc, ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi, vel subtripla, vel subquadrupla &c. mutationes Baroscopii triplo, vel quadruplo &c. sensibiliores evadunt.

COROLLARIUM II.

143. Si AB sumatur pro sinu toto, erit Tab. CB sinus anguli inclinationis BAC. Est Fig. 1. ergo gravitas mercurii in tubo inclinato ponderi atmosphærico æquiponderantis ad pondus atmosphæricum, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM III.

144. Ergo & scala integra, & singula intervalla ascensus descensusque mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmosphærici ad scalam integram & singula ejus intervalla in tubo verticali, sunt ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipsi BC & FE ipsi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 255 Geom.); consequenter $DE : DF = BA : BC$ (§. 267 Geom.).

PROBLEMA XXXIII.

145. Data longitudine scalæ per quam mercurius nunc ascendit, nunc descendit in tubo verticaliter erecto; invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut scala, per quam mercurius in ipso nunc ascendit, nunc descendit, habeat ad scalam tubi verticalis rationem datam.

RESOLUTIO.

Sit longitudo scalæ in tubo verticali $= a$; quia datur ratio scalæ in inclinato ad scalam in verticali, datur etiam scala ipsa in inclinato, quæ sit $= b$. Sit porro sinus totus $= t$, sinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 143).

C A P U T V.

De Rarefactione & Condensatione, Densitate item & Raritate Aëris.

THEOREMA XVIII.

146. *Calor elaterem aëris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aër vesicæ inclusus eadem vi premit qua aër ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, vesicam distendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75 *Mechan.*). Enimvero vis illa qua vesicam distendit, est elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aëris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aër rarefactus iterum condensatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA XIX.

148. *Vis elastica aëris qua rarefiens expanditur est ad elaterem aëris condensati, uti volumen rarefacti ad volumen condensati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aërem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen quod condensatus obtinuerat: evidens est, tantum ponderis imponi debere, quod vi elasticæ æquatur qua expansus fuit (§. 75 *Mech.*). Erit igitur elater aëris quo rarefiens expanditur ad elaterem condensati, ut pondus illud ad pondus alterum

quo condensatus premebatur (§. 553 *Mechan.*). Est vero pondus rarefacto incumbens idem quod condensato incumberebat, *per hypoth.* Ergo elater aëris quo rarefiens expanditur est ad elaterem condensati, ut pondus quod sustentat a rarefactione ad pristinum condensationis volumen reductus ad pondus quo rarefactus premitur: consequenter ut volumen rarefacti ad volumen condensati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXIV.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis spatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removeatur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem sua veluti sponte in cavitatem vasis ascensurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aër rarefit (§. 23): consequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodsi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas ascendet, dum calor exspirat. Dum enim calor ex-

expirat, ceteris paribus, aëris quæ restat portio rarior est externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 78): consequenter quam ponderis atmosphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmosphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75 *Mechan.*) *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

150. Quodsi prima vice non tantum aëris expulsus fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec necesse est liquorem in priore operatione immissum rursus expelli; cum ipse potius, ob propriam rarefactionem, aëris adhuc residui expulsionem promoveat.

T H E O R E M A XX.

Tab. II. 151. Sit globus vitreus AB, cum Fig. 13. annexo tubo BC, cujus orificium C aquæ immersum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad D: ascendet, si aër ambiens frigidior, vel gravior evadit; descendet, si calidior, vel levior redditur.

D E M O N S T R A T I O.

Si enim aer ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam inclusus adeoque condensatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 147). Cum igitur is constanter æqualis esse debeat differentię ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 93); si minuitur, pondus fluidi, consequenter & volumen ejus (§. 17 *Hydrost.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo ascendat necesse est. *Quod erat unum.*

Similiter, si aer gravior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam sub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur

tur aquæ ascendere debet, quantum sufficit ad æquilibrium cum pondere atmosphærico constituendum (§. 36 *Hydrost.*) *Quod erat secundum.*

Contra, si aër externus calefit; calefit quoque inclusus, consequenter rarefit (§. 23), adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum descendere, si aër levior redditur, eadem ratione demonstratur qua ostendimus illud ascendere, si is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

S C H O L I O N.

152. Celeberrimus HALLEIUS (a) observavit, uti supra de mercurio (§. 123), quod spiritus vini insigniter expansus fuerit, atque ab initio celerius, postea tardius in tubulo ascenderit. Cum spiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus esset, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiat. Vereor autem, ne diversitas spiritus vini expansionis gradum variet. In aqua exiguam expansionem notavit idem HALLEIUS, inprimis sub initium, & ebulliens $\frac{1}{28}$ circiter spatii prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experienciis manifestum sit volumen fluidi calore crescere, frigore decrescere debere, consequenter liquorem ascendere conari, dum ab elatere aëris inclusi deorsum pellitur, & contra, adeoque rarefactionem liquoris obstare descensui ejus, condensationem vero ascensui: experientia tamen constat, hoc obstaculum non impedire quominus elateris aërei effectus sint satis sensibiles, quia aër multo magis rarefit & condensatur quam fluidum quodcunque aliud.

T H E O R E M A XXI.

153. Densitas aëris, ceteris paribus, crescit in ratione ponderum comprimendum.

DE-

(a) *Philos. Transact.* n. 197. p. 650. & seqq.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim densitates ut gravitates specificæ (§. 33 *Hydrostat.*). Gravitates specificæ sunt ut volumina reciproce (§. 29 *Hydrost.*). Ergo densitates sunt ut volumina reciproce (§. 167 *Arithm.*): consequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

154. *Aër inferior densior est superiore.*

DEMONSTRATIO.

Aër superior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aëris quantitas incumbat, quam superiori; inferior quoque magis premitur, quam superior (§. 10). Densitas adeo inferioris major est densitate superioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora densiora sunt graviora rarioribus sub eodem volumine (§. 14 *Hydrost.*), & aër gravis existit (§. 20); aër inferior specificè gravior est superiore.

THEOREMA XXIII.

156. *Densitas aëris inferioris non est ponderi atmosphærico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmosphærici cætera in aëre inferiore omnia essent paria, densitates ejus essent ut pondera atmosphærica (§. 153). Sed calor aërem rarefacit, frigus condensat (§. 23, 24), adeoque a calore & frigore densitas diversimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur causæ eandem similiter alterantes. Cum adeo densi-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

tas aëris inferioris mutari possit, pondere atmosphærico immutato, ista huic proportionalis non est. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

157. *Si aër redditur densior, pondus corporum in aëre minuitur; si rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 33 *Hydrost.*); aër densior specificè gravior est rariori. Corpus igitur aëre specificè gravius in densiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56 *Hydrost.*). Unde si aër redditur densior, pondus corporum minuitur: si rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Si igitur densitas aëris sensibilibiter alteratur; corporum in aëre rariori æquilibratorum, quorum gravitates specificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in densiore, præponderabitque specificè gravius (§. 61 *Hydrostat.*).

PROBLEMA XXXV.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aëris unius pedis cubici, ob variationem ponderis atmosphærici, acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus Atmosphæræ cæteris paribus augetur, aër inferior magis comprimitur (§. 10), adeoque densior evadit (§. 153), consequenter pes cubicus aëris a compressione gravior (§. 9 *Hydrost.*). Sit jam pondus Atmosphæræ minimum = a , maximum = b , pondus aëris a minimo compressi = c ,

R r

pressi

pressi a maximo $= x$. Cum densitates corporum æqualium sint ut pondera. (§. 16 *Hydrost.*): erit

$$\frac{a:b=c:x}{x=bc:a}$$

Ergo incrementum y , quod volumen aëris datum, ob ponderis atmosphærici variationem, acquirere valet, est $bc:a - c = (bc - ac):a$, consequenter $a:b - a = c:y$.

Theorema. Ut pondus atmosphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aëris a minimo compressi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmosphærici acquirere valet volumen aëris datum.

Ex.gr. Pes cubicus aëris in minima Atmosphære gravitate sit 507 granorum (§. 57). Quoniam $a=26$, $b=28$ (§. 122): erit $y=39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aëris ab omni variatione ponderis atmosphærici suscipere valet, est fere $\frac{1}{3}$ ejus ponderis quod ipsi a minimo pondere atmosphærico presso competit.

DEFINITIO XI.

160. *Manoscopium* est instrumentum, quod alterationes densitatis aëris indicat. *Manometrum* est instrumentum, quod easdem metitur.

PROBLEMA XXXVI.

161. *Manoscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab.II. 1. Assumatur bilanx tam accurate constructa ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus est super centro jugi.

2. Ex altero jugi brachio suspendatur globus E ex lamina metallica, ex.gr. cuprea aut orichalcea, construendus,

ne pondus affricum in libra augeat Tab.II. (§. 949 *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes elusurum. Capacitas globi sit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aër (§. 40).

3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B descriptus, ita ut secetur in gradu quadragesimo quinto ab indice BD, si jugum fuerit in situ horizontali.

Dico, Manoscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim si aër densior redditur pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam (*vi* §. *cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix spatium a laminæ, ex qua globus constructus, soliditate repletum occupet, nifus ejus deorsum minus minuitur quam globi (§. 55 *Hydrost.*): consequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis specificæ aëris, in quo hæret, consequenter & densitatis (§. 33 *Hydrost.*) indicat. Est ergo Machina Manoscopium (§. 160). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

162. Quoniam aëris densitas & raritas non modo a pondere Atmosphære (§. 153), sed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23, 24); Manoscopium hoc Baroscopium esse nequit.

SCHOLION I.

163. Equidem OTTO DE GUERICKE (a), & qui ipsum sequitur, BOYLIIUS (b), idem instrumentum pro Baroscopio vendicant: sed non attenderunt, manente eodem pondere, densitatem ac raritatem aëris sapissime variari.

SCHOLION

(a) In *Experiment. de Vacuo* lib. 3. c. 31. f. 114.

(b) In *Historia frigoris*, tit. 17.

SCHOLION II.

164. Neque vero putandum est, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant: Experientia enim contrarium abunde satis confirmat. Certe GUERICKIUS se expertum scribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum secundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit; & imprimis ingravescere globum notavit, si pluat. Nec difficulter idem ratione assequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aërei 39 granorum mutationem, ob variatum pondus atmosphæricum, sustineat (§. 159); bilanx vero unius vel alterius grani accessionem vel ablationem indicare possit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abest globus cum suo contrapondio) oneretur (§. 57); si globus evacuatus pedem aëris cubicum capit, quin variationes densi-

tatis ab Atmosphæra pondere variato pendentes Manoscopium nostrum indicet dubitandum non est. Tanto minus autem dubitare fas est, quod aliæ adhuc densitatis variationes a diverso calore ac frigore aëris factæ, nec istis minores accedant. Didicit nimirum HALLEIUS aërem ordinarium in Anglia a calore æstivo extendi $\frac{1}{3}$ circiter sui voluminis, a maximo autem frigore condensari $\frac{1}{20}$ fere. Cum adeo pondus unius pedis cubici aërei sit 507 granorum (§. 57); erit decrementum ponderis in casu priore 32, incrementum in posteriore 25 granorum.

SCHOLION III.

165. Manometri constructionem dedit Celeberrimus VARIGNONIUS (a): de quo alias nonnulla monuimus (b).

CAPUT VI.

De Motu Aëris.

DEFINITIO XII.

166. **V**Entus est agitatio aëris sensibilis.

PROBLEMA XXXVII.

167. Data ratione gravitatis specificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aëris, una cum spatium quod intra definitum aliquod temporis spatium fluidum istud percurrit ab aëre premente impulsus; determinare spatium quod ipse aër ob æqualem pressionem, intra idem tempus, emetiri debet.

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo ad quam per da-

tam aëris pressionem elevari potest fluidum in medio non resistente = a . Sit porro ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris = $b:c$. Spatium, quod fluidum ab aëre premente impulsus describit, dicatur & denique spatium, quod aër ob æqualem pressionem intra idem tempus emetitur, vocetur x . Quoniam altitudines fluidorum ad quas propter æquales pressionem elevantur sunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36 Hydrost.); si altitudo ad quam aër eandem cum fluido pressionem sustinens evcheretur,

R r 2 modo

(a) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences &c. 1705. p. m. 409. &c. seqq.

(b) In Element. Aërometria p. 284.

modo clatere careret, fiat $=y$; erit $c:b=a:y$, consequenter $y=ab:c$. Sunt vero velocitates quibus fluida ob eandem pressionem eleuantur, in ratione subduplicata altitudinum ad quas ascendunt (§. 87, 322 *Mechan.*), adeoque in casu nostro ut \sqrt{a} ad $\sqrt{(ab:c)}$. Quare cum, ob temporum suppositam æqualitatem, spatia quæ istis temporibus percurreuntur sint ut velocitates (§. 28 *Mechan.*): erit

$$\sqrt{a}:\sqrt{(ab:c)}=s:x$$

$$a:\frac{ab}{c}=s^2:x^2 \text{ (§. 260 Arithm.)}$$

$$ac:ab=s^2:x^2 \text{ (§. 178 Arithm.)}$$

adeoque

$$c:b=s^2:x^2 \text{ (§. 181 Arithm.)}$$

Theorema. Ut gravitas specifica aëris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum spatii quod fluidum hoc quacunque vi impulsus intra quodcunque temporis spatium percurrit, ad quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM I.

168. Ergo $x=\sqrt{(bs^2:c)}$. Unde si ponamus aquam data vi impulsam, intra minutum temporis secundum percurrere spatium 2 pedum; erit $s=2$; cumque gravitas specifica aquæ sit ad gravitatem specificam aëris, ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b=970$ & $c=1$; consequenter $x=\sqrt{970.4}$, $=\sqrt{3880}=627'''$ fere.

COROLLARIUM II.

169. Est etiam $s=\sqrt{(cx^2:b)}$, adeoque spatium quod intra certum aliquod temporis spatium, ob certam quandam impressionem, fluidum quodcunque emetitur determinatur, si ad duos numeros quibus ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravi-

tatem aëris exprimitur, atque quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem intra idem temporis spatium emetitur, numerus quartus proportionalis quærat (S. 302 *Arithm.*), & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*).

SCHOLIUM.

170. MARIOTTUS (a) notat ventum satis violentum ordinarie spatium 24 pedum intra minutum secundum describere. Quodsi ergo quærat spatium quod aqua, ob eandem pressionem quam aër sustinet, intra idem temporis spatium absolvit, erit $c=1$, $x=24$, $b=970$ & reperietur $s=\sqrt{(576:970)}=\frac{24}{31}$.

PROBLEMA XXXVIII.

171. Data altitudine ad quam fluidum quodcunque a pressura aëris elevatur, una cum altitudine per quam corpus grave intra minutum secundum descendit; determinare spatium quod fluidum istud, intra minutum secundum, vi impetus impressi, motu æquabili percurrit.

RESOLUTIO.

Sit altitudo ad quam fluidum ab aëre premente elevatur, $=a$, minutum temporis secundum $=b$, spatium quæsitum $=x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acquisitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322 *Mech.*); vis aëris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquisita ejus est celeritatis qua corpus motu æquabili, intra idem tempus quo decidit, describere valet lineam altitudinis ex qua decidit duplam (§. 92 *Mech.*)

Repe-

(a) *Traité du mouvement des eaux*, p. 226.

Reperietur adeo spatium quod fluidum, intra idem tempus quo decidit, vi cadendo acquisita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea spatium, quod corpus grave descendens intra minutum secundum describit, $= c$. Quoniam tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum a corporibus cadentibus descriptorum; erit tempus quo grave decidit per spatium $a = \sqrt{(ab^2 : c)}$ (§. 87 *Mech.*). Quare si motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34 *Mech.*)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = a : x$$

$$2ab = x \sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2 \cdot ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impressum intra minutum secundum motu æquabili percurrit, est medium proportionale inter altitudinem duplam ad quam idem ab aëre premente elevatur, & altitudinem duplam ejus per quam grave intra minutum secundum decidit.

SCHOLION.

172. Ponamus, mercurium per pressionem Atmosphære in Tubo Torricelliano sustentari ad altitudinem $28''$: erit adeo in Problemate nostro $a = 28''$. Porro $c = 15' 1''$ seu $181''$ (pedis Parisini) (§. 473 *Mechan.*). Ergo x , hoc est spatium quod ob eandem pressionem mercurius motu æquabili tempore unius secundi percurreret, $= 2 \sqrt{181 \cdot 28} = 142''$ quam proxime, seu $11' 10''$. Ponamus mercurium elevari per aëris pressionem nonnisi $2''$. Erit in casu Problematis nostri $a = 2''$, $c = 181''$, adeoque $x = 2 \sqrt{181 \cdot 2} = 38'' = 3' 2''$.

PROBLEMA XXXIX.

173. Data altitudine fluidi ad quam

propter pressionem aëris elevatur; invenire spatium quod tempore unius minuti secundi, ob eandem pressionem, percurrere debet aër in medio non resistente.

RESOLUTIO.

1. Quærat, quantum spatium ob pressionem aëris qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti secundi, motu æquabili emittetur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro
2. investigari potest spatium quod aër in medio non resistente, ob eandem pressionem, percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM I.

174. Per præsens igitur Problema determinari potest spatium quod aër in vas prorsus evacuatum irruens, intra minutum temporis secundum, describit. Si enim vas prorsus evacuatum fuerit, aër irruens pressionem sustinet ei æqualem qua aqua ad altitudinem 32 pedum Parisiensium elevatur (§. 29). Quare spatium quod aqua ob istam pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili percurreret, est $528''$ (§. 171). Jam, cum ratio gravitatis specificæ aquæ ad gravitatem aëris sit $970 : 1$, reperietur spatium quod aër in vas prorsus evacuatum irruens motu æquabili, tempore unius minuti secundi, percurrere debet, 1370 pedum (§. 167).

COROLLARIUM II.

175. Si detur differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aëris contiguus; inveniri potest spatium quod aër, ex volumine fortiori elatere instructo irruens, in volumen elatere debiliore præditum describit.

SCHOLION.

176. Sit ex. gr. differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aëris contiguus ea qua mercurius elevari potest ad altitudinem 2 digitorum; reperietur spatium quod ob

istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet 38" (§. 171). Cum jam gravitas specifica mercurii ad gravitatem aquæ sit ut 14 ad 1 (§. 29), & gravitas aquæ ad gravitatem aëris, ut 970 ad 1; erit gravitas mercurii ad gravitatem aëris, ut 13580 ad 1, adeoque reperietur spatium quod, ob æqualem pressionem, aër emetiri debet tempore unius minuti secundi fere 368 pedum. Irruet ergo aër ex volumine fortiori in debilius ea celeritate qua tempore unius minuti secundi fere 368 pedes percurrere valet. Sit differentia virium elasticarum nonnisi 3''' : reperietur spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet, fere 12'', tandemque spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, aër emetiri debet, 116½ pedum (§. 167). Ea igitur celeritate qua tempore unius minuti secundi spatium 116 circiter pedum percurrere valet, aër ex volumine fortiori in debilius irrui. Quoniam MARIOTTUS (a) observat ventum satis violentum, intra minutum temporis secundum, 24 pedes percurrere; ejus celeritas multo minor est ea qua aër irrui ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elasticarum nonnisi tanta existente, quanta mercurium in Tubo Torricelliano ad altitudinem 3''' elevare valet.

COROLLARIUM III.

177. Quoniam, data ratione voluminum aëris primitivi atque compressi, inveniri potest altitudo ad quam aër compressus mercurium in Tubo Torricelliano elevare potest (§. 83); per Problema præsens determinari etiam potest celeritas qua aër, cessante compressione seu remota vi premente, sese expandit.

PROBLEMA XL.

178. Dato spatio quod aër intra minutum secundum percurrit; determinare pressionem qua celeritatem istam producere valet.

(a) Traité du mouvement des eaux, p. 226.

RESOLUTIO.

Pressionem determinatam esse patet, si constet altitudo ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aëre elevandum tantam pressionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, spatium quod aër intra minutum secundum percurrit $= a$, ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris $= b : c$; altitudo denique per quam corpus grave, intra minutum secundum, descendit $= d$; reperietur spatium a fluido tempore unius minuti secundi percurrendum $= \sqrt{a^2 c : b}$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæsitæ $= a^2 c : 4bd$. Est itaque

$$4bd : ac = a : x.$$

Theorema. Spatium quod aër tempore unius minuti secundi percurrit est ad altitudinem ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum ut pressionem efficiat celeritati qua istud describitur producendæ sufficientem in ratione composita gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris, atque altitudinis quadruplæ per quam corpus tempore primi minuti secundi descendit ad spatium aëris prædictum. Sit ex. gr. $a = 24'$, seu 288'', ratio mercurii ad aërem $b : c = 13580 : 1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 473 *Mechan.*); erit x minor unica linea seu duodecima digiti parte.

SCHOLION I.

179. Apparet adeo, quod exiguas mutationes in Baroscopio, sed subitas, ingentes admodum procellæ subsequi debeant: id quod *Experientiæ consentaneum Theoriam nostram confirmat.*

SCHOLION II.

180. Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac imprimis determinandus erat situs alarum in molen-

dinq

dino alato, qualis nempe requiratur ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus sit principiis generalibus de motu fluidorum quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem universali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixisse videamur, cum plus dicere possemus.

DEFINITIO XIII.

181. *Anemometrum* est instrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA XLI.

182. *Anemometrum construere.*

RESOLUTIO.

- b.II. 1. Construantur alæ A, B, C, D, quales in molis alatis adhiberi solent; multo tamen minores; a plano verticali sub angulo 54. circiter graduum reclinatæ
2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. circumacta deprimat dentes rotæ stellatæ GH.
2. 4. Axi per centrum transeunti infigatur ad angulos rectos brachium satis longum IK, in medio canaliculi instar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L. sursum deorsum libere moveri possit, ipsique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus Y.
5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur, quarum singulæ radio axis æquantur.
1. 6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos insistens,

& extra cistam, cui rota stellata Tab. II. cum cochlea perpetua inclusa, emittens. Fig. 15.

7. Denique ex centro axis, in pariete cistæ exteriori, describatur quadrans circuli in 90 gradus more solito dividendus, ab indice vel ascendente vel descendente indicandus.

Dico, *Anemometrum* esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Manifestum enim, si alæ A, B, C, D, vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi, atque adeo rotam stellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota stellata GH eidem axi infigatur, per construct. ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero distantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat necesse est, quo altius attollitur (§. 796. *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare potest pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipsum elevantis æqualis evadit, motus machinæ sistatur necesse est (§. 75. *Mech.*); & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere potest, ipsa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabique nequit. Index adeo semper indicat, quantus sit angulus elevationis ponderis, ubi eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§. 793. *Mechan.*).

Tab. II. *Mechan.*), atque adeo per Machinam Fig. 15. nostram ratio virium ventorum determinari potest, hoc est, vires venti metiri licet (§. 23 *Geom.*). Est igitur Anemometrum (§. 181). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

183. *Ut hæc Machina, sine ullius adjumento, alas ABCD vento semper obvertat, cistæ ST plano quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus est asserculus POQR figuram trapezii parallelarum basium habens. Ventus enim incidens in asserculum POQR, Machinam circa axem pedamenti mobilem convolvat, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro Machinæ erecti fieri potest, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION II.

184. *Brachio IK contrapondium Y additur, ut instar lineæ gravitate carentis considerari possit, nec tadia calculi præter necessitatem multiplicentur.*

THEOREMA XXV.

185. *Si elater aëris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis; ventus fiat per locum in quo elater imminutus.*

DEMONSTRATIO.

Cum aër per elaterem suum quaquaversum se expandere nitatur (§. 26); si elater uno in loco minor quam in altero, nîsus aëris vi elastica majore præditi adversus aërem vi elastica minore instructum major erit, quam hujus adversus istum. Ergo aër minus elasticus vi minore resistit, quam a magis elastico urgetur: consequenter minus elasticus loco suo pellitur, & magis elasticus in eum succedit. Quod si adeo excessus elateris in aëre magis elastico

super elaterem minus elastici is sit, qui exiguam in Baroscopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aëris expulsi, quam in ipsius locum succedentis sensibilis evadat necesse est (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aër minus elasticus replet (§. 166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

186. Cum aucto pondere comprimente, elater augeatur (§. 553 *Mech.*), aër vero compressus sit densior minus compresso (§. 78): ventus fiat per aërem rariorem ex loco qui densiore repletur.

COROLLARIUM II.

187. Quamobrem, quia aër densior rariore specificè gravior (§. 33 *Hydrost.*); extraordinaria aëris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis seu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM III.

188. Jam descensus mercurii extraordinarius in Baroscopio aëris levitatem extraordinariam indicat (§. 120). Non ergo mirum quod procellas portendat, si subito fiat.

SCHOLION.

189. *Non tamen necesse est, ut aëris levitas semper cum ventis jungatur. Sufficit enim gravitatem aëris subitas pati mutationes. Hinc ventum sat valide flantem hoc ipso temporis articulo experimur, utut in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, mercurius in Baroscopio consistat, nec nisi $\frac{1}{16}$ unius digiti depressior nunc factus, quam heri erat. Immo in maxima depressione ventus sæpe nullus spirat, quia depressio successive, non subito, facta.*

COROLLARIUM IV.

190. Si aër alicubi subito condensatur, elater ejus subito minuitur (§. 148). Quod si ergo

ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in Baroscopio vix indicari possit (§. 176, 178); ventus per aërem condensatum flabit.

COROLLARIUM V.

191. Quoniam vero subito condensari nequit, nisi magnam ante passus fuerit rarefactionem (§. 6, 8); ventus flabit per aërem, dum post æstum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM VI.

192. Similiter si aër subito rarefiat, elater ejus subito intenditur (§. 148), adeoque defluet per contiguum, actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75 Mech.). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aër subito rarefit.

COROLLARIUM VII.

193. Cum vires Solis in rarefaciendo aëre notissimæ sint; Solem in ventorum genesis influere manifestum est (§. 5, 6).

PROBLEMA XLII.

194. Ventum excitare adversus plagam desideratam spirantem.

RESOLUTIO.

- b.II. 1. Construatur vas cylindricum ABDC
g.16. ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major esse debet, quo impetuosior ventus excitandus.
2. Vas ipsum sit undiquaque probe

clausum, solo foramine in E gau-Tab.II.
dens, cui tubus EF utrinque aper-
tus ante immittendus. Fig.16.

3. Per medium cylindrum transeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum alis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas instructus. Habeat vero curriculum 6 vel 7 bacillos.
4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato R 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis R curvatus semel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 conversiones absolvit, adeoque alæ L, M, N, K per aërem inclusum celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus versus plagam desideratam dirigi possit; ventus excitabitur (§. 166) adversus plagam desideratam spirans. Q. e. f.

SCHOLIUM.

195. Cum in molis frumentariis axis ferreus HI cum curriculo C occurrat (§. 975 Mech.); hoc artificio sub lapidibus molaribus facile excitatur ventus, partes a granis frumenti abrasas a nucleo eorum separaturus. Tum vero tubus EF sacci vices sustinet, & basis GF declivis, in G vero foramen esse debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abrasæ a vento per F ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento post triturationem separandas; additis addendis, quæ nunc fusius exponere non est nostri instituti.

CAPUT VII.

De Calore ac Frigore, itemque Humiditate ac Siccitate Aëris.

DEFINITIO XIV.

196. **T**hermoscopium est instrumentum caloris ac frigoris in aëre incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero est instrumentum, quo calorem ac frigus aëris metiri licet.

DEFINITIO XV.

197. *Hygrosopium* est instrumentum, quod humiditatis & siccitatis in aëre incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero est instrumentum, quo humiditatem & siccitatem aëris metimur.

PROBLEMA XLIII:

198. *Thermoscopium construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. II. Fig. 17. 1. Tubo BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur (§. 149) aqua communis regiae permixta & ab orichalco in hac soluto viredine tincta. Opera vero danda est, ut tantum aëris in globo & tubo relinquatur, qui hyeme maximam condensationem passus globum exacte repleat & æstate ad summum rarefactionis gradum perductus non omnem ex tubo BC liquorem expellat.
2. Tubus immittatur vasculo, vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD

apertus, ut aër ejici, iterumque ingredi libere possit, & in quo similis liquor contineatur, qualis in tubum immissus. Tab. II. Fig. 17.

3. Ab utroque latere tubi applicetur scala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër ambiens sit calidior, liquor in tubo descendit: si is frigidior evadit, hic ascendit (§. 151). Incrementa igitur caloris & frigoris indicat hoc instrumentum, adeoque Thermoscopium est (§. 196). Q. e. d.

Aliter.

1. Eodem artificio quo ante, & cum eadem cautione in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne scilicet longior spatium nimis longum occupet nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum mercurii, pisi magnitudinem non excedens. Tab. II. Fig. 18.
2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ scalæ vicem sustineant.
- Accessus mercurii ad globum, frigoris; recessus vero ejusdem a globo, caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ præcedens.

COROLLARIUM I.

199. Quia liquor in Thermoscopio primo & mercurius in altero etiam ascendit, si aer gravior redditur; contra vero descendit, si levior evadit (§. 151): caloris ac frigoris incrementa non satis fideliter exprimit.

COROLLARIUM II.

200. Quoniam tamen mutationes admodum sensibiles sunt; si aliorum corporum calor examinandus, commode Thermoscopio altero utimur: exiguo enim temporis spatio quo experimentum instituitur, gravitas Atmosphæaræ sensibilibiter non mutatur.

SCHOLIUM.

201. Quodsi in Thermoscopio primo liquorem colore intense rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum simplicium atque rubidorum malvæ hortensis arefactis, ut color extrahatur. Quodsi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non sine jucunditate colorem intense rubrum emergendam contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque usi sunt artifices.

PROBLEMA XLIV.

202. Thermoscopium Florentinum construere.

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpendere incommoda, quibus Thermoscopium paulo ante descriptum premittitur (§. 198); mensuram caloris & frigoris quæsiere in rarefactione spiritus vini, ut rarefactione aeris longe minore (§. 152). Thermoscopium vero ab ipsis repertum ita construitur:

1. Frustulis ex radice curcumæ aut anchusæ resectis affundatur spiritus

vini rectificatissimus, seu qui, dum accensus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priori enim radice colore flavo, a posteriore autem rubro tingetur.

2. Postea spiritus vini iterum iterumque filtratur per chartam bibulam, ut particulæ crassiores ex radice extractæ remaneant.

3. Spiritu vini tincto & filtrato impletur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme spiritus omnis in globum descendat, globum immittere juvat nivi multo sale conspersæ, aut (si æstivo tempore Thermoscopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ in qua multum natri solutum, ut spiritus condensatus indicet terminum quem maximo frigore attingere valet. Tab. III. Fig. 19.

4. Quodsi a globo longiore intervallo adhuc distet, aliqua ejus portio rursus expellenda. Ne autem tubus justo longior fiat, globum spiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impositæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.

5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice sigilletur.

6. A latere denique affigatur ut in Probl. præc. scala EF in particulas quotcunque æquales divisa.

DEMONSTRATIO.

Quoniam spiritus vini rarefit & condensatur (§. 152); calore crescente, in tubo ascendet (§. 8); decrescente, descendet (§. 6). Caloris igitur incre-

menta & decrementa instrumentum indicat, consequenter Thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

203. Si spiritus vini per multos gradus scalæ ascendit, calorem multum crevisse constat; si descendit, idem multum decrevisse intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad hesternum non indicatur; instrumentum calorem non metitur (§. 23 *Geom.*), adeoque Thermometrum non est (§. 196).

COROLLARIUM II.

204. Liquor in tubo vi gravitatis suæ deorsum nititur (§. 4 *Mechan.*), adeoque ex globo in ipsum ulterius ascendenti resistit tanto quidem magis, quo altius jam ascendit (§. 10). Præstaret itaque, situm tubi BC esse horizontalem.

COROLLARIUM III.

205. Cum necessario aliquid aëris super liquore in parte tubi vacua existat, is vi elateris deorsum nititur (§. 26), adeoque ascensui liquoris resistit. A liquore ascendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipsius augetur (§. 73), ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 146).

COROLLARIUM IV.

206. Cum experientia constet remissionem caloris gradum facilius cum spiritu vini in globo communicari quam vehementiorem; rarefactiones spiritus vini viribus productricibus proportionales non sunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat quam remissior; cui tamen facilius communicari potest calor quam in globo stagnanti. Thermoscopium adeo Florentinum, accedente inprimis resistantia inæquali (§. 204, 205), Thermometrum non est (§. 196).

SCHOLION I.

207. HALLEIUS autor est, se didicisse ex his qui spiritum vini diu asservarunt, quod

is successu temporis partem vis expansivæ amittat (a). Sed meretur res accuratiori examini subjici, vi eorum quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus (b).

SCHOLION II.

208. Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæsierunt, a quo utriusque gradus reliqui computentur; ut observationes, eodem vel diverso tempore, in pluribus locis factas conferre inter se liceat. Aliqui locum notant in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit; iterumque alterum tempore æstivo, dum butyrum juxta globum Thermoscopii positum liquefit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod divisionis punctum in ipsorum graduatone calori temperato respondet. Partem utramque in 10 gradus subdividunt, tandemque quatuor istiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor item super gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero divisionem fieri Thermoscopio in umbra collocato, & ne observationes turbentur, versus eandem constanter plagam instrumentum dirigi debere quam respiciebat cum divisio absolveretur. Enimvero supponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris, & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris respondere, ac singula Thermoscopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impressiones. Posterius autem fallere non ignorant qui Experientia edocti, Thermoscopia eidem parieti affixa non eundem constanter caloris gradum ostendere, utut eadem utriusque graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne prius cum cura examinaturi contrarium similiter experiantur. Differunt enim aquæ inter se, differunt inter se butyra; id quod vel sola gravitatis specificæ variatio monstrat; ut alia taceamus quæ meditantibus & experimentantibus se offerent.

SCHO-

(a) *Transact. Anglic.* n. 197. p. 650.

(b) *Act. Erudit. A.* 1708. p. 163. & seqq. conf. *Logica* §. 664. & seqq.

SCHOLION III.

209. *Suadent alii, ut globus Thermoscopii nivæ vel glaciæ multo sale conspersæ immittatur, & gradus ad quem spiritus subsistit notetur. Hinc Thermoscopium in cellam profundam transferunt, quorsum aëris externi nihil pertingit, ut actionem aëris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique spatium intermedium in 15 vel plures partes aequales dividunt, etiam supra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra absolvatur. Sed ut non urgeam, quæ in Scholio præcedente jam abunde dicta sunt, quis, quæso, respondeat quærenti: An omni nivæ idem sit frigoris gradus? An omni sali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciæ? Suppono enim frigus a sale nivæ permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciæ & abradis superficieculis earundem interiorem nucleum summe frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION IV.

210. *Celeberrimus HALLEIUS pro termino fixo assumit eum caloris gradum, quo spiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam supra monuimus, quanam ratio sit suspicandi, forte nec hunc gradum esse usque adeo fixum. Et licet post ipsum AMONTONS (a) retinuerit ipsum gradum caloris qui aquæ ebullienti convenit, dum Thermoscopium mercuriale constituit; & postea (b) hujus ope Thermoscopio Florentino talem graduationem applicare docuerit qua ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diversa sit aquarum gravitas specifica, quæ massæ ac texturæ diversitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem sit: unde operæ pretium facient rerum naturalium scrutatores, si, factis accuratis experimentis, inquirent, quinam sit gravitatis fluidorum specificæ ad calefactionem eorundem respectus.*

(a) Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences A. 1702. p. m. 210. & seqq.

(b) Mémoires de la même Académie A. 1703. p. m. 63. & seqq.

SCHOLION V.

211. *Nondum excipere licet istiusmodi minutias in praxi non esse attendendas: neque enim hætenus demonstratum, quod irregularitates a causis memoratis pendentes sint minutiae. Lis adhuc pendens nonnisi pluribus experimentis, a pluribus, præsertim pluribus in locis, factis dirimenda.*

SCHOLION VI.

212. *CAROLUS RENALDINUS (c) tradit modum integram graduationem methodo experimentaliter determinandi, ut habeantur gradus inæquales æqualibus gradibus caloris, dum intenditur, respondentes; quam Collectores Aëtorum Eruditorum Lipsiensium (d) his verbis describunt: „Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, cum annexa bulla, eique infundatur spiritus vini tantum ut sphaerula glaciæ circumdata omnino repleatur, neque tamen aliquid redundet, orificiumque tubi sigilletur hermetice. Deinde parentur sex vasa, quorum quodlibet aquæ libram & aliquid amplius potest recipere, & in primum infundantur aquæ gelidæ uncia 11, in secundum uncia 10, in tertium 9, & sic porro. His peractis, Thermometrum mergatur in vas primum, eique affundatur aquæ ferventis uncia una; observeturque quo usque ascendat spiritus in collo & locus unitate notetur. Porro transferatur in vas secundum, cui injectæ aquæ ferventis uncia duæ; de quoque notetur locus ad quem ascendit spiritus, noteturque binario; & sic deinceps. Quodsi cui placeat ulterius procedere, donec tota aquæ libra sit insumta; perfectius erit instrumentum elaboratum, nempe duodecim numeris, aut asteriscis distinctum, quibus caloris termini denotantur.*

Sl 3;

SCHO-

(c) In Philos. Nat. dissert. 16. sect. 12.

(d) Supplement. Tom. 2. sect. 10. p. 453.

SCHOLIÖN VII.

213. Facile incautis imponere poterat RENALDINUS, ut sibi persuaderent, hac ratione exactam caloris mensuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus, & effectus respondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde vicissim cognoscentur gradus simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus diei ad calorem cujuscunque alterius: consequenter calorem metiri licet (§. 23 Geom.). Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quæso, supposita; ne forte aliquid esse ponamus quod non est, sicque erroneam conclusionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris simplum, si 11 unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, si 10 affundantur duo; triplum, si 9 tres; quadruplum, si 8 quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem simplum vi simpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in spiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, si idem effectus in Thermoscopio a calore aëris ambientis producitur qui ab aqua calida producebatur, aëri eundem competere caloris gradum qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his suppositis verum est. Quod enim primum attinet; concedamus interea calorem aquæ ferventis, si frigida affundatur, per hanc æqualiter distribui. Distribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per 10; tres per 9; quatuor per 8 &c. Si itaque assumamus æqualia istarum aquarum volumina, ex gr. singularum partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto casu &c. Fallit ergo suppositum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in spiritum vini uniformiter agit, id est, eadem vi per omne tempus actionis suæ. Prius experientiam vulgi non fugit,

ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus sit. Posterius facillime ostenditur. Notum nimirum est, requiri aliquod temporis spatium, antequam calorem suum cum spiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis spatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. si vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diversis sub initium immersionis globi esset nunc simplus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aëris non modo in spiritum vini in globo, sed & in tubo contentum agit; adeoque non istum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum constat, num omnia fluida, in quibus idem est gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem suum communicent: nec forte hæc disquisitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri possent. Sufficit satis constare, methodum Renaldinianam suppositis niti partim precariis, partim manifesto falsis; ut adeo ratio nulla sit, cur vulgari divisioni in partes æquales hæc in partes inæquales divisio mechanica præferatur.

SCHOLIÖN VIII.

214. Caterum, quamvis mutationes Thermoscopii Florentini admodum sensibiles existant, ita ut spiritus vini per notabile intervallum ascendat, manu calida admota, iterumque descendat, ea remota: ubi tamen per insigne intervallum tempore hiemali descendit, ascensus intervalla decrementis frigoris non satis respondent. E. gr. hoc ipso (a) anno d. 9 Jan. h. 8 mat. liquor in Thermoscopio meo descenderat usque ad 72^{dum} gradum scalæ frigoris, cum consueta Phenomena frigus intensum loquerentur: sed exm d. 18 Jan. eadem hora tempestate jam multo mitiore ad gradum 80^{mum} subsisteret; hora tertia, qua
nix

(a) Scilicet 1713, quo prima horum Elementorum editio prodit.

nix & glacies ad pristinum fluiditatis statum reducebantur, spiritu ad 72^{dum} hærebat. Scilicet ad eundem sapius gradum depressus cernitur liquor, cum tamen Phenomena alia diversitatem caloris ac frigoris insignem manifesto prodant. Imo interdum depressio spiritus major, cum effectibus frigoris remissioris; minor vero, cum effectibus multo intensioris conjungi solet. Et hæc observantur, etiamsi Thermoscopium collocetur in loco, ad quem aëri externo liber patet aditus. Ratio Phenomeni hæc mihi videtur. Experientia constat, frigore invalescente, multum aëris ex fluidis expelli: id quod testantur vesiculæ tum superficiebus vitrorum in quibus continentur adhærentes. Extra dubium itaque positum videtur, frigore intenso ex spiritu quoque vini in Thermoscopio aërem ejici, & per tubi vacuum partem expandi. Cum adeo aër ambiens calidior rursus redditur, inclusi elater augetur spirituique ascensuro resistit (S. 146). Quoniam vero per experimenta MARIOTTI (a) determinata quadam aëris quantitas in fluido salis instar dissolvitur; aër a frigore expulsus, crescente calore, sensim sensimque spiritui rursus permiscetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes semper erunt justis minores.

EXPERIENTIA VI.

215. Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus, & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exsiccabatur, ad pristinam redibat dimensionem. Multo autem brevior evadebat, ubi sub aqua per aliquod tempus ipsum detinueramus. Huc pertinent, quæ SCHWENTERUM expertum esse in Geometria (b) annotavimus. Et Guilielmus MOLINEUX, Armiger atque Societatis Dublinensis Secretarius, istiusmodi funem humecta-

tum cum appenso pondere suspendit, eumque pro ratione exsiccationis resolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admovisset, ascendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque cessante rursus resolutus. Immo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit, celeriterque resolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito (c).

COROLLARIUM.

216. Sola igitur humiditas aëris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipsosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLION.

217. Humor nimirum dimensionem funis secundum diametrum auget. Sed cum gyri spirales filorum contortorum fere in circulares abeant, autopsia teste, dimensio secundum longitudinem decrescit. Abbreviationis igitur causa non modo ab insinuatione humoris in poros funium, sed & imprimis a spirali eorundem textura petenda.

EXPERIENTIA VII.

218. Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat 1' 14" circiter juxta mensuram Rhenanam, experti sumus. Cum enim eundem, duobus clavis utraque sui extremitate alligatum, juxta fenestram apertam extendissemus, & ope paucule cere Indiculum ligneum applicassemus, per complures dies non sine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum Sole oriente ros decideret; ita ut fere semicir-

(a) Essai de la nature de l'Air, p. 97. & seqq.

(b) S. 129. p. 133.

(c) Philos. Transact. Anni 1685. n. 162. p. 1032. conf. Acta Erudit. A. 1686. p. 389.

micirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus descripsisse notaretur. Ast Solis radiis illustratus nervus iterum resolvebatur, atque Indiculus ultra terminum reducebat, in quo eum sub ortum Solis conspexeramus, cum fenestram cubiculi noctu clausam primum aperiremus. Non tamen singulis diebus aequales Indiculi itus reductusque notavimus. Eundem nervum sub aqua demersum sensibilibiter contorqueri didicimus: satis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non secus ac si duo manibus prehendentes ejus extremitates ipsum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus quam eum eundem aqua immitteremus, & radiis licet Solaribus exsiccatum ad pristinam longitudinem reducturi vires eludebat.

SCHOLION.

219. *Similia se expertum testatur STURMIUS (a). Non ignoro, quod alii (b) contrarium accidere affirmant; sed quid alii experti sint mihi quidem haud constat, cum circumstantias singulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prouti eandem expertus sum.*

PROBLEMA XLV.

220. *Hygroskopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Funem cannabinum, aut nervum
III. fidium, AB, juxta parietem extende
Fig. 20. super rotula B; alterique ejus extre-

(a) In Colleg. Curios. part. 1. tent. 14. phen. 5. p. 124. & seqq.

(b) Traité des Baromètres, Thermomètres & No-
tiomètres, p. 94.

mo D pondus alliga, cui infixus sit Tab. III.
stylus FG.

2. Eidem parieti affigatur lamina me-
tallica HI; in partes quotcunque
æquales divisa. Fig. 20.

Dico Hygroskopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem sensibilibiter abbreviet, humore autem rursus expirato iterum resolvat (§. 215); pondus humore aëris aucto ascendet, imminuto descendet. Et quoniam index FG in lamina HI spatium monstrat per quod pondus ascendit vel descendit, intervalla vero ascensus & descensus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia sunt; instrumentum indicat, num dato hoc tempore aër plus alat humoris, quam alio habuit. Est igitur Hygroskopium (§. 197). Q. e. d.

Aliter.

Si Hygroskopium sensibilibus desideres, funem aut nervum fidium circa
Tab. III. plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Fig. 21.
Perinde vero est, si partes funis AB, AD, DE, EF, FG sint horizonti parallelæ, ut in schemate expressimus, si ad eundem perpendicularis: prouti nempe quolibet in casu commodum visum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum præcedente.

Aliter.

Aliter.

- ab. 1. Funis cannabinus AC aut nervus
II. fidium altera sui extremitate unco
22. ferro A alligetur, altera vero C
in centro tabulae lignae FF hori-
zontaliter positae firmetur.
2. Prope C infigatur pondus plum-
beum D unius circiter librae cum
annexa regula DG.
3. Ex centro C in tabula describatur
circulus in partes quotcunque aequa-
les dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aëris, qualem secum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rursus extemplo resolvatur (§. 215, 218); evidens est quod, humore aëris aucto, Index quantitatem contorsionis vel resolutionis monstrare, consequenter humiditatis & siccitatis incrementa indicare debeat. Est igitur instrumentum Hygroskopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

- ab. 1. Funis cannabinus aut nervus fidium
II. HI altero sui extremo suspendatur
23. ex unco H.
2. Alteri extremitati I annectatur glo-
bus K unius circiter librae.
3. Limbo pedamenti LM inscribantur
duae peripheriae circuli parallelae &
spatium intermedium in partes quot-
cunque aequales dividatur.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

4. Globo infigatur stylus NO, cujus Tab.
extremitas O limbi divisionem fere III.
attingit. Fig. 23.

Dico, hunc indicem incrementa humi-
ditatis & siccitatis aëris ostensurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quae proxime
praecedens.

Aliter.

1. Parentur subscudes fulcatae AB & Tab.
CD ex ligno quercino. III.
2. Intra crenas oppositas aptentur as- Fig. 24.
serculi abietini AEFC & GBDH,
ita ut ultro citroque facillime mo-
veri possint.
3. In extremitatibus subscudium A,
B, C, D clavis firmentur asserculi, &
inter utrumque relinquatur spatium
EGHF, cujus latitudo EG unius cir-
citer digiti.
4. In I firmetur lamina orichalcea den-
tata IK & in L rotula dentata, cu-
jus axi in altera Machinae facie in-
dex inferatur.
5. Tandem ex centro axis in eadem
facie describatur circulus in partes
quotcunque aequales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim, experientia teste, lignum
abietinum humorem aëris facillime im-
bibat ac indeturgescat, humore autem
rursus exspirato tabescat: si aëris humi-
ditas augetur, asserculi AF & BH hu-
more turgescentes propius ad se invi-
cem accedunt; si illa rursus minuitur,

T t

iidem

Tab. iidem afferculi tabescentes denuo a se
III. invicem discedunt. Quoniam vero
Fig. 24. distantia afferculorum nec minui potest
sine rotulæ L convolutione, nec auge-
ri; index monstrabit incrementa humi-
ditatis & siccitatis aëris. Est igitur
machina constructa Hygroskopium (§.
197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Manoscopium superius descriptum
Fig. 14. in Hygroskopium abit, si globo eva-
cuato E substituas spongiam, aut ma-
teriam quandam aliam, quæ humorem
facile imbibit. Solet autem spongia
primum aqua communi, deinde ubi
bonam partem rursus exsiccata fuerit,
aqua, vel aceto in quo aliquid salis
Ammoniæ seu salis Tartari dissolutum
fuerit, macerari atque in loco umbro-
so denuo exsiccari.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër humidus evadit, spon-
gia gravior reddita præponderat; si ille
levior redditur, hæc rursus altius tolli-
tur experientia teste, adeoque index

incrementa & decrementa humiditatis
indicat. Est ergo Hygroskopium (§.
197). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

221. Omnia Hygrosopia, quæ hætenus
descripta sunt, sensim sensimque a perfectio-
ne sua deficiunt, tandemque ab humiditate
aëris parum aut nihil mutationis patiuntur.
Usus ultimi est magis diuturnus, quam cæ-
terorum omnium.

SCHOLION II.

223. In Hygrosopio ultimo GOULDIIUS.
(a) loco spongiæ omnium maxime commen-
dat oleam vitrioli, quod in dies in tantum
augeri observavit, ut intra spatium 57 die-
rum a tribus drachmis ad drachmas novem
& 30 grana ascenderet. Enimvero non an-
notat, num etiam humiditatem tam prompte
rursus dimittat, quam eam attrahit; de quo
valde dubito: adeoque præsentī instituto oleum
vitrioli minime congruum iudico.

SCHOLION III.

223. Ceterum, quilibet, me non monente,
videt structuram Hygrosopiorum multis mo-
dis variari posse.

(a) In *Actis Erudit.* A. 1685. p. 315.

FINIS AEROMETRIÆ.



ELEMENTA HYDRAULICÆ.

P R Æ F A T I O.



N Hydraulica non modo Machinarum quibus aqua elevatur, atque fontium salientium constructio edoceri debet ; sed explicandæ sunt præterea Leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius stupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel soli Libri *Spiritualium* HE-

RONIS aperte loquuntur; ita diffiteri non possumus, in posteriore excolendo posteris adhuc multum relictum esse, utut præclara jam dederint Viri de Hydraulica optime meriti MAJOTTUS, CASTELLUS, TORRICELLIUS, BORELLUS, GUILIELMINUS, MARIOTTUS & imprimis Celeberrimus VARIGNONUS (a). Immo ipsa Machinarum Hydraulicarum constructio Matheseos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod in dies magis magisque excolatur. Si enim Machinas Hydraulicas fontesque salientes spectes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari solet,

T t 2

quod

(a) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* An. 1703. p. 285.

quod non minus prodesse, quam delectare velit. Egregia scilicet vitæ humanæ commoda præstat, dum varias vias ostendit, per quas aqua ad locum datum derivari potest. Mirifice delectat, dum jucunda fontium salientium aliorumque admirandorum spectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad Scientiæ naturalis, tum ad Machinarum perfectionem tendunt: & si quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali distinctius cognoscetur; unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potissimum propositum sit Machinarum Hydraulicarum constructionem exponere, & ad causas suas revocare; non tamen Leges motus fluidorum prorsus insuper habebo, sed eas propositurus sum quæ ad ulteriorem disquisitionem viam sterunt, & præ reliquis scitu necessariæ sunt. Has meditentur imprimis illi, quos rerum naturalium cognitio solidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, nisi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydrostatica, proprietates aëris ex Aërometria perspexerit.



ELEMENTA HYDRAULICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Fluidorum a gravitate pendente.

DEFINITIO I.

1. **H**Ydraulica est Scientia motus fluidorum, præsertim aquarum.

SCHOLION.

2. *Quare cum in Hydrostatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex sublato autem æquilibrio motus nascatur; Hydraulica Hydrostaticam supponit. Unde contigit, ut nonnulli qui de Hydraulica scripsere Hydrostaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO II.

- Tab. I. 3. Per *Tubum* atque *Canalem* intelligitur. 1. ligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO III.

4. *Lumen* est apertura tubi.

DEFINITIO IV.

5. *Epistomium* vel *Clavicula* est instrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri potest.

SCHOLION.

6. *Quoniam in Machinis hydraulicis epistomii creberrimus est usus, non inconsultum ducimus, ut ejus structura hic exponatur.*

PROBLEMA I.

7. *Epistomium vel Claviculam construere.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus ABCD cum gemina tubi parte GH & EF, quantum altera GH cochlea instrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri possit; aut, si cochlea destituantur, tubo vel vasi afferruminetur.
2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti possit cylindrus solidus HI perforatus in K, & in L matrice, in O manubrio instructus, ut per cavitatem cylindri trajectus, mediante cochlea M, in hoc situ firmari, & ope manubrii O huc illucque versari possit.
3. Perforetur similiter uterque tubulus GH & EF.

Quod si enim cylindrum solidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF respondeat; aqua in F effluere potest: si vero idem cylindrus HI soliditatem

foraminibus iisdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, adeoque instrumentum est epistomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLIUM.

8. *Perfēctissimam epistomii constructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumstantiis singularibus, si qua omitti possint. Ita ex. gr. communiter omittitur cochlea M cum matrice, qua cylindrum HI intra cavitatem cubi AC firmandum esse diximus. Neque cochlea F semper adest, & tubus GF sæpius horizontalis est.*

THEOREMA I.

Tab. I. Fig. 3. 9. *Locus A ad quem aqua ex loco alio B, sive per alveum, sive per tubos aut canales derivanda, humilior seu centro Telluris propior esse debet hoc ipso altere.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat nisi vi gravitatis, gravitas vero sit nifus versus centrum Telluris (§. 4 *Mechan.*); per alveum fluere nequit, nisi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere potest. Neceffe igitur est, ut locus ad quem aqua per alveum fluere debet centro Telluris propior sit altero unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodsi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum descendat ex B in C, deinde rursus ascendat ex C in A: sit DE linea horizontalis per C ducta, & BD atque AE ad eandem perpendiculares. Sit jam $AE < BD$, pressio aquæ in tubo BC major est pressione aquæ in tubo AC (§. 35 *Hydrost.*). Ista igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero si $AE > BD$:

quamprimum aqua in tubo AC ascen- Tab. I. dit ad altitudinem ipsi BD æqualem, Fig. 3. alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34 *Hydrost.*), ab ea igitur ad ulteriorem ascensum sollicitari nequit (§. 75 *Mechan.*). Sed vi gravitatis deorsum nititur versus C (§. 4 *Mechan.*), adeoque nec vi intrinseca ascendere potest. Ibi igitur subsistit; consequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, nisi A sit humilior B. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

10. Cum alveus vel tubus BC per quem aqua fluit ex B in C, sit planum inclinat-um (§. 258 *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari possunt, quæ in *Mechanica*, cap. 6, de descensu gravium in plano inclinato demonstrata sunt.

COROLLARIUM II.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diversos tubos fluentium eodem tempore acquisitæ, ut tuborum longitudines reciproce (§. 302 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

12. *Insuper hic & in sequentibus habemus resistantiam, quæ oritur ex affricu in fundo alvei & parietibus tubi (§. 933 *Mechan.*).*

PROBLEMA II.

13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum.*

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§. 911 *Mech.*); hoc est, investigetur quam propior centro Telluris sit locus ad quem aqua derivanda est, altero unde derivatur. (§. 904. *Mech.*).

2. Quod-

2. Quodsi locus ille hoc humilior fuerit; non alia re opus est quam ut aqua, vel per canalem, vel per tubos declives, ex loco excelsiore in humiliorem deducatur; prout vel magna, vel exigua ejus suppetit copia.

3. Ut aqua per intervalla nobis comoda visa effundatur, extremum tubi epistomio muniatur (§. 5).

4. Et quia, experientia teste, fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, sed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipsum assurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, sicque per ipsum celerius fluat.

5. Si tubus vel canalis per intervalla sufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua, remoto epistomio, continuo fluens intra puteum ex saxis exstructum colligatur necesse est; qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.

Tab. I. Fig. 3. 6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapsa rursus ascendere debet; deducenda est per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD. (§. 9).

SCHOLION I.

14. Utimur autem, in deducendis aquis, tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo est 4, 5 vel 6 digitorum, pro quantitate aquæ effundendæ, conjungun-

tur autem annulo ferreo CD. Tubo plumbeo Tab. I. locus est, si aqua in altum elevanda ad fontes salientes; neque vero sanitati conducere deprehensa est aqua quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior superficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, nisi sumtibus parcas. Longitudo eorum est duorum aut unius & dimidii pedum, crassities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commissuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.

SCHOLION II.

15. In alveo quem prope fontem construxisti, ita aptandus est tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex superficie hauriat; quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eundem petentibus, superficiem vero infecta aliæque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad arcendas sordes lumini canalis primo cribrum ferreum, sed stanno obductum apponere, immo ad percolandam aquam turbidam spongiam. Ut aqua conservetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præstat.

SCHOLION III.

16. Ne aer interceptus cursum aquarum in canale intercipiat, sed exitus ei concedi queat, utque canalis ipse purgari possit, quoties opus fuerit; hinc inde est perforandus & obturaculo figuram coni truncati habente foramen obturandum.

SCHOLION IV.

17. Ceterum omni studio in deducendis aquis vitandus est aquarum ascensus; quia aqua ascendens majorem vim infert quam descendens.

PROBLEMA III.

18. Fontem naturalem arte construere.

RESOLUTIO.

I. In loco elevato paretur fossa aggeribus undiquaque cincta, & variis meatibus

tibus ex crustis lapideis excitatis hinc inde distincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine instructum.

2. Fossa hæc desuper silicibus, calculis, & ad duos tresve pedes glareæ operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari potest cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus distillabit aqua, & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLIION.

19. Si intra meatus foveæ sat aqua non contineatur ut perennis fluat; orificio meatus ultimi tubus cum epistomio aptandus.

THEOREMA II.

Tab. I. 20. Si duo tubi æquales altitudines Fig. 5. AB & CD atque æqualia lumina E & F habuerint, fuerintque ambo constanter pleni; æquali tempore æquales aqua quantitates effundent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia sunt, & altitudines aquæ super iisdem etiam æquales, per *hypoth.* aqua luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42 *Hydrost.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum; consequenter si aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus in-

clinati, ubi utriusque altitudo eadem fuerit, ipsique fundi inter se æquantur (§. 47 *Hydrost.*); si tuborum utcunque inclinatorum, modo æque-altorum, lumina fuerint æqualia, tubique constanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA III.

22. Si duo tubi æquales altitudines Tab. I. AB, & CD, sed lumina inæqualia E & Fig. 6. F habuerint, fuerintque constanter pleni; quantitates aquarum effluentium eodem tempore sunt in lumina E & F.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus divisum in plura minora alteri E æqualia: per singulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundetur illi æquales, quæ per lumen minus effunditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effusarum, ut lumen minus ad numerum partium in quas divisum concipitur majus, hoc est, ut lumen minus ad majus (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

23. Si lumina fuerint circularia: quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & constanter plenis effusæ sunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt in ratione duplicata diametrorum. Patet eodem modo, quo Corollarium Theorematis præcedentis (§. 21).

SCHOLIION.

ab. I. 25. Legem hanc experimentis non exacte
 ig. 6. respondere autor est MARIOTTUS (a). Obser-
 vavit enim, si diameter luminis F erat dia-
 metri luminis E dupla, ex tubo minore plus
 quam quartam aquæ ex maiore effluentis par-
 tem eodem tempore effundi, tuborum altitu-
 dine modica existente. Enimvero in Demon-
 stratione abstrahimus ab omnibus obstaculis
 accidentalibus quæ irregularitatem inducere
 solent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet
 altitudo aquæ super lumine, minor quam ad
 latera vasis: aqua enim, in ea voluminis par-
 te quæ lumini respondet, cavitatem assumit,
 cum effluenti non extemplo alia a lateribus
 succedere valeat. Quoniam vero hoc decre-
 mentum altitudinis majus est in tubo maiore
 quam in minore, pressura quoque seu exeundi
 conatus minor erit in maiore, quam in minore,
 (§. 44 Hydrost.) Porro, dum aqua superior ef-
 fluentis locum occupare nititur, vim qua
 premit ad descendendum impendit, non ad
 premendum. Unde denuo conatus ad ex-
 eundum minuitur. Tandem hic quoque ha-
 benda est resistentiæ aëris & affrictus aquæ in
 superficie tubi & orificio imprimis ratio.
 Enimvero omnia illa impedimenta ad certas
 leges nondum revocata; immo hætenus ne-
 quidem constitutum est, quodnam eorum in
 casu quolibet dato prævaleat. DE CHALES
 (b) affrictus unice rationem habens, in aqua
 effundenda prærogativam majoribus luminibus
 tribuit, quia proportionaliter minorem su-
 perficiem habent; cum tamen ex modo dictis
 pateat MARIOTTUM prorsus contrarium ex-
 pertum esse. Ipse vero MARIOTTUS (c) non
 diffitetur dari subinde causas quæ multas
 irregularitates inducant; ita ut nunc majori-
 bus, nunc minoribus luminibus in aqua effun-
 denda tribuenda sit prærogativa, & asser-
 tum suum experimentis confirmat.

(a) Traité du mouvement des Eaux. Part. 3. disc.
 1. p. 267.

(b) In Tract. de fontibus naturalibus, prop. 30.
 f. 132. Tom. 2. Mind. Mathem.

(c) Loc. cit. disc. 2. p. 176.

THEOREMA IV.

26. Si duorum tuborum constanter Tab. I.
 plenorum AB & CD lumina E & F Fig. 7.
 æqualia fuerint; quantitates aquarum
 eodem tempore effluentium sunt ut cele-
 ritates.

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. aquam ex tubo AB
 effluere ea celeritate, quæ sit ad alte-
 ram ex tubo CD effusæ in ratione du-
 pla. Quia hic tantum ratio habetur
 motus instantanei per foramen; motus
 aquæ ut æquabilis considerari potest,
 adeoque celeritates erunt ut spatia eo-
 dem tempore percurfa (§. 33 Mechan.).
 Quod si ergo filum aliquod aquæ in tu-
 bo AB extenderetur usque ad G, filum
 ex altero usque ad I; erunt longitu-
 dines EG & FI in ratione dupla seu ce-
 leritatum. Enimvero quantitates a-
 quarum eodem tempore effluentium
 sunt ut fila ista seu cylindri EG & FI;
 quorum bases E & F cum æquales sint,
 per hypoth. altitudinum EG & FI ratio-
 nem habent (§. 573 Geom.). Sunt
 adeo etiam quantitates aquarum ef-
 fluentium ut celeritates (§. 177 Arithm.).
 Q. e. d.

THEOREMA V.

27. Si duo tubi habuerint lumina
 E & F æqualia, sed altitudines AB &
 CD inæquales, fuerintque constanter
 pleni; quantitas aquæ effluentis ex ma-
 jore AB erit ad quantitatem aquæ ef-
 fluentis ex minore CD eodem vel æquali
 tempore, in ratione subduplicata altitu-
 dinum AB & CD.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Cum vires aquas per lumina E & F Fig. 7. expellentes sint gravitates absolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem, *per hypoth.* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia sunt vires mortuæ (§. 9 *Mechan.*), si quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & a, celeritates ut C & c; erunt vires ut A. C ad a. c. (§. 278 *Mechan.*), consequenter A. C ad a. c = AB : CD (§. 167 *Arithm.*). Est vero etiam A : a = C : c (§. 26), adeoque [cum porro sit A : a = A : a] A. C : a. c = A² : a² (§. 185 *Arithm.*). Quare A² : a² = AB : CD (§. 167 *Arithm.*) & hinc A : a = √AB : √CD (§. 124 *Analys. finit.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium sunt in ratione duplicata ipsarummet aquarum eodem tempore effusarum.

COROLLARIUM II.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium sunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione subduplicata altitudinum.

PROBLEMA IV.

30. Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum AB & CD, una cum altitudine unius; invenire altitudinem alterius.

RESOLUTIO.

I. Quærat ad numeros qui rationem aquarum effluentium exprimunt;

& radicem altitudinis datæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).

2. Ducatur is in seipsum: erit factum altitudo CD quæsita (§. 28).

SCHOLION I.

31. Cum ex altitudine data rarissime radicem perfectam extrahere liceat; ut altitudo quæsita exacte inveniatur, per regulas *Arithmeticae irrationalium* operandum. Sit ex. gr. ratio data 3 : 5, altitudo data 7, reperietur radix altitudinis quæsita $5\sqrt{7:3}$. Unde habetur altitudo ipsa quæsita $\frac{25}{9} \cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION II.

32. Quod si cui leges *Algorithmi irrationalium* non fuerint perspectæ, is faciat; ut 3 ad 5, ita 7 altitudo data ad numerum quartum proportionalem $\frac{35}{3}$, & porro ut 7. ad $\frac{35}{3}$, ita $\frac{35}{3}$ ad altitudinem quæsitam; quæ ut ante $= \frac{5 \cdot 35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. Sit enim universaliter 3 : 5 = a : b, 7 = c; reperietur per resolutionem *Problematis* altitudo quæsita = b² c : a². Sed quarta proportionalis ad a, b & c est bc : a & tertia proportionalis ad c & bc : a est ut ante b² c : a². Unde patet inferri posse, ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæsitam: id quod etiam ex demonstratione *Theorematis quinti* (§. 27) liquet. Atque hac analogia commodissime utuntur, qui a tricis *Algorithmi irrationalium* sibi metuunt.

PROBLEMA V.

33. Data ratione altitudinum tuborum constanter plenorum & per æqualia lumina aquas effluentium, una cum quantitate aquæ ex uno effusa; invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.

RESOLUTIO.

RESOLUTIO.

1. Quærat^{ur} ad altitudines datas, & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effusæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque si radicem quadratam extrahas (§. 269 *Arithm.*), prodibit ipsa quantitas aquæ quæsitæ.

Ex. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effusa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(9.25 : 9)} = \sqrt{25} = 5$.

THEOREMA VI.

- b. I. 34. Si duorum tuborum constanter plenorum altitudines AB & CD fuerint inæquales, lumina E & F itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione composita ex simplici luminum & subduplicata altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & l habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sint P & q. Porro altitudo tubi tertii $= A$, lumen $= L$, quantitas aquæ dato temporis effluentis Q; erit

$$P : q = L : l \text{ (§. 22).}$$

$$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a} \text{ (§. 27).}$$

$$\text{Ergo } PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a} \text{ (§. 213 } \textit{Arithm.}).$$

$$\text{Unde } Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a} \text{ (§. 180 } \textit{Arithm.}) \text{ Q. e. d.}$$

COROLLARIUM.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$; consequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299 *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260 *Arithm.*); hoc est, si quantitates aquarum ex duobus tubis constanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina sunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

THEOREMA VII.

36. Si altitudines duorum tuborum Tab. I. constanter plenorum AB & CD æquales Fig. 6. fuerint; aqua per lumina E & F utcumque inæqualia eadem celeritate effluunt.

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet, si præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia; aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adsit disparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus divisum in partes quotcunque, quæ singulæ minori lumini æquales sint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur ac si per reliquas nihil fluere, cum impetus rotus pendeat a pressione perpendiculariter imminentis aquæ evidens est, eandem in singulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit qua per minus. Q. e. d.

THEOREMA VIII.

Tab. I. 37. Si altitudines tuborum constan-
Fig. 7. ter plenorum AB & CD, itemque lu-
mina E & F inæqualia fuerint; celeri-
tates aquarum effluentium sunt in ratione
subduplicata altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum a , a
& A, lumina eorundem L, l, & L,
velocitates aquarum effluentium u , v
& c . Quia $L = L$; erit $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$
(§. 29). Est vero $a = a$, per hy-
poth. adeoque $\sqrt{a} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c$
 $= \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168 Arithm.) Porro
ob $a = a$, per hypoth. etiam $u = v$ (§.
36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168
Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

38. Cum, altitudinibus inæqualibus exi-
stentibus, aquarum per æqualia lumina
fluentium celeritates similiter sint in ratio-
ne altitudinum subduplicata (§. 29), hæc
vero ratio æqualis sit, si altitudines æqua-
les: patet in genere celeritates aquarum
ex tubis constanter plenis effluentium esse
in ratione altitudinum subduplicata.

COROLLARIUM II.

39. Quadrata igitur velocitatum sunt
ut altitudines (§. 260 Arithm.).

SCHOLION.

Tab. I. 40. MARIOTTUS (a) multiplici experimen-
Fig. 8. to docuit, si ad vas ABCD applicetur tubus
EF, plus aquæ per tubum æquali tempore ef-
fluere quam per idem lumen vasis E, tubo re-
moto, & motum aquæ eo magis accelerari,
quo tubus EF longior. Cum altitudo vasis AC
esset unius pedis, tubi vitrei EF longitudo
trium pedum, diameter luminis trium linea-
rum; intervallo unius minuti effundebantur

(a) *Traité du mouvement des eaux*, Part. 3. disc.
6. p. 269. & seqq.

6 $\frac{1}{2}$ sextarii aquæ, tubo autem remoto nonnisi Tab. I.
4 circiter. Cum longitudo tubi EF esset 6 pe- Fig. 8.
dum, diameter luminis F unius digiti, aqua
omnis intra 37 minuta secunda effluxit. Cum
vero tubi dimidium FH rescinderetur, vas
integrum intra 45''; tubo prorsus remoto in-
tra 95'' evacuatum est. Tubo nimirum ap-
plicato, altitudo aquæ incumbentis & egressum
orificio tubi proxime urgentis major est, adeo-
que motus aquæ magis acceleratur.

THEOREMA IX.

41. Si duo tubi AB & CD fuerint Tab. I.
ejusdem altitudinis & lumina E atque Fig. 5.
F æqualia habuerint; tempora quibus
deplentur sunt in ratione basium.

DEMONSTRATIO.

Sit basis tubi CD dupla basis tubi
AB. Quoniam altitudines æquales sunt
per hypoth. quantitates aquarum in tu-
bis contentæ basium rationem habent
(§. 573 Geom.), adeoque ex hypothesi
aqua in tubo CD dupla est aquæ in
tubo AB. Concipiatur altitudo utrius-
que tubi in partes infinite parvas di-
visa, erit cylindrulus ejusmodi altitu-
dinis in tubo majore CD duplus cylin-
druli in tubo minore AB. Uterque
autem in utroque tubo eadem celeri-
tate per lumen ejicitur (§. 36), & quia
lumina æqualia sunt per hypoth. eadem
quantitates aquæ eodem instanti fluunt
per utrumque lumen. Ergo, eodem
tempore quo cylindrulus HI effluit,
nonnisi dimidium alterius LK ejicitur:
ut adeo alterum dimidium expellatur
opus est instanti altero. Tempuscula
itaque, quibus cylindruli HI & LK ef-
fluunt

Tab. I. fluunt, sunt in ratione subdupla, nempe ut bases tuborum AB & CD. Idem cum de ceteris eodem modo demonstraretur, patet tempora quibus integri tubi evacuantur esse in ratione basium (§. 187 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA X.

Tab. I. 42. *Vasa cylindrica & prismatica*
Fig. 1. ABDC ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus aequalibus effluentium decrescant secundum numeros impares ordine retrogrado sumptos.

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG descendens continuo decrescit in ratione subduplicata altitudinum decrescentium (§. 38). Velocitas gravis descendens crescit in ratione subduplicata altitudinum crescentium (§. 87 *Mechan.*). Talis igitur est motus libellæ FG ex G in B descendens, ac si inversa ratione ex B in G descenderet. Sed si ex B in G descenderet, æqualibus temporibus spatia crescerent secundum numerorum imparium progressionem (§. 86 *Mech.*). Ergo secundum eandem progressionem inverse sumptam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decrescunt. Q. e. d.

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege descendit, qua vi impressa per altitudinem ipsi GB æqualem ascenderet (§. 329 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

44. Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonstrari possunt, quæ nunc brevitate gratia omittimus.

PROBLEMA VI.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes singulis temporibus vacuandas; dato tempore quo depletur totum, itemque tempore quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes singulis horis evacuandas.

1. Fiat, Ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12, ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vasis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime superiores horæ penultimæ, quinque posteriores horæ decimæ &c. 13 denique postremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora crescant in serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. altitudines vero, si numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, crescant in serie numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9 &c. (§. 42); erunt altitudines ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1, 4, 9, 16, 25, &c. (§. 110 *Analys. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144 complectitur omnes altitudinis vasis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 est quadratum ipsius 12 (§. 246 *Arithm.*), consequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo

do dividenda, secundum seriem numerorum imparium per horarum interval-
la æqualia distribuendus (§. 42).

Q. e. d.

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vasis substituere liceat vasa minora ipsis æqualia; data altitudine vasis intra datum temporis spatium deplendi, inveniri potest altitudo vasis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. Patet ergo methodus Clepsydras construendi, quibus Veteres usos esse constat.

THEOREMA XI.

48. Aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium.

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vasis vi solius gravitatis absolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam qua egreditur ab aqua supra orificium consistente pressa, in ratione subduplicata altitudinis istius aquæ tempusculo infinite parvo per foramen exeuntis, seu, quod perinde est, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ supra orificium (§. 37). Enimvero si aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ supra orificium æqualem; celeritas cadendo acquisita foret itidem ad eam qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione subduplicata altitudinis aquæ supra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87 *Mechan.*). Aqua igitur per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam ca-

dendo ex altitudine aquæ supra orificium acquireret (§. 177 *Arithm.*).
Q. e. d.

THEOREMA XII.

49. Si aqua per tubum KE descen-
dens per lumen G, cujus directio ver-
ticalis, profiliat; ad eam altitudinem
GI ascendit ad quam libella aquæ LM in
vase ABCD consistit. Tab. I. Fig. 9.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipsius celeritas est quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48); consequenter ea ipsi vis est qua ad altitudinem ipsi EN æqualem ascendere valet (§. 322 *Mechan.*). Quare cum directio luminis sit verticalis *per hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis existat, nec quicquam sit quod eandem mutet extra tubum; aqua sursum feratur necesse est ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vase consistit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

50. Experientia constat, aquam per lumen G proficientem elevari ad altitudinem ipsa GI minorem. Constat præterea, lumen G eo minus esse debere, quo minor est altitudo libellæ LM in vase ABCD. Immo propriis experimentis didici, minus esse debere lumen si mercurius salire debet, quam ut aqua saliat; consequenter si fluidum majore vi urgetur, quam si minore. Inde vero non concluditur Theorematis falsitas; sed tantum colligitur, subesse impedimenta quædam quæ ascensui resistant. In ea igitur inquirendum.

SCHO-

SCHOLION II.

51. Plerique præcipuam resistentiæ causam aërem allegare solent, per quem aqua saliens ascendit. Enimvero quamvis non negem aëris resistentiæ inter impedimenta locum aliquem esse concedendum, quæ obstant quominus ad eam præcise altitudinem ascendat unde decidit; causis tamen aliis majorem resistentiæ totalis partem tribuendam esse, mihi quidem satis probabile videtur. Aquas enim in vase ab aëre evacuato (S. 40 Aërom.) salientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aëre, ubi altitudo ascensus unius circiter pedis sit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua saliens longe infra libellam ascensum sisteret. Illud autem observare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramulosque dividi, in quot in aëre dispergitur; sed fere unitam versus eam plagam defluere, versus quam lumen G parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter salien-

tis magis ab aëre resistente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen salibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aëris resistentiam sensibilio-rem esse puto. Ipsa enim aquæ in guttulas ramulosque divisio fieri nequit, nisi aliqua celeritatis parte imminuta; quemadmodum ex Regulis motus abunde constat.

SCHOLION III.

52. Caterum hinc mirum non est, quod regula MARIOTTI defectum altitudinis a perpendiculo aquæ computandi, quam resistentia aëris potissimum superstruxit (a), & qua defectus isti in ratione duplicata altitudinum esse perhibentur, non satis exacte experientiæ respondeat. Quoniam tamen ejus aliquis esse potest usus; ideo non piget Tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum salientium altitudines tuborum per quos delabuntur, juxta illam assignantur, in pedibus quidem Parisinis & ejus digitis seu partibus duodecimis.

Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.	Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.
5'	5' 1"	55	55' 12 1"
10	10 4	60	60 144
15	15 9	65	65 169
20	20 16	70	70 196
25	25 25	75	75 225
30	30 36	80	80 256
35	35 49	85	85 289
40	40 64	90	90 324
45	45 81	95	95 361
50	50 100	100	100 400

SCHOLION IV.

53. Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ ascendenti, quia observavi quod argenturæ vivum ad minorem altitudinem elevetur quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus si languescit, posteriores in

eas incurrentes retardantur: id quod ipsismet oculis suis videre poterit qui aquas salientes attentius contemplare voluerit. Atque inde est, quod, si lumen G angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua saliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, saltus altitudo statim major evadat. Huc pertinet, quod

TOR-

(a) Traité du mouvement des eaux, Part. 4. disc. 1. p. 304. & seq.

Tab. I. TORRICELLIUS (a) à se observatum annotavit.
 Fig. 9. „ Quando, inquit, opposita manu foramen G
 „ penitus occluditur, deinde, retracta quam
 „ citissime manu, repente aperitur; videban-
 „ tur primæ & præeuntes guttæ altius perve-
 „ nire, quam sit deinceps culmen postquam
 „ aqua deorsum fluere cæperit. Addo quod
 dispersionem in guttulas ipsa gravitas aquæ
 juvet.

SCHOLION V.

54. Maximum autem impedimentum in
 affrictu positum est: unde lumen seu orificium
 G optime levigatum requiritur.

SCHOLION VI.

55. Quamvis autem lumen non nimis in-
 gens esse debeat, ut sufficiens aquæ copia
 constanter affluere possit; cum alias saltus non
 modo minuatur, sed prorsus impediatur; idem
 tamen nec nimis exiguum sit necesse est. Ex-
 perimur enim, aquæ salientis altitudinem ma-
 jorem esse si lumen majus, quam ubi minus
 fuerit. Certe MARIOTTUS (b) observavit
 aquam salientem per lumina in eadem linea
 horizontali sita & in eodem tubo facta, quo-
 rum diametri erant 1, 4, 6, 10, 12 &c.
 linearum; notavitque altius ascendere eam
 quæ per majora egreditur, quam quæ per mi-
 nora ejicitur.

THEOREMA XIII.

Tab. I. 56. Aqua per tubum inclinatum AB
 Fig. 10. vel per tubum quomodocunque inflexum
 CD descendens, per lumen G ad eam al-
 titudinem in L vel M ascendit ad quam
 aqua in vase HK subsistit.

(a) De motu projectorum, Lib. 2. Oper. Geometr.
 p. 192.

(b) Traité du mouvement des eaux, Part. 4. disc.
 1. p. 303.

DEMONSTRATIO.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato Tab. I
 AB, vel inflexo CD, eadem vi impelli- Fig. 10
 tur, qua impellitur ad lumen G in tubo
 NO (§. 34 Hydrost.). Sed vi impres-
 sa per lumen istud ascendit ad altitu-
 dinem altitudini libellæ ML æqualem
 (§. 49). Ergo etiam per lumen tu-
 borum reliquorum saliens ad eandem
 altitudinem ascendere debet. Q. e. d.

SCHOLION.

57. Veritatem Theorematis experimento
 confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea
 stanno obducta vas HK figuram parallelepi-
 pedi habens. Ad fundum afferruminari jussi
 quatuor tubos, quorum duo NO & ST sunt
 ad fundum perpendiculares, sed inæqualium
 diametrorum, tertius AB est inclinatus, quar-
 tus vero CD ex pluribus partibus diversi-
 mode inclinatis compositus; omnes una ad
 fundum pelvis RZ aquam salientem excipien-
 tis afferruminati. Denique in M & L ad
 vas aptati sunt tubuli inclinati, ut, si per
 canalem a b plus aquæ affluat, quam per
 lumina tuborum G salit, & superflua per
 eos effluat: quo artificio quoque utendum,
 si experiri volueris quæ in antecedentibus
 de motu aquarum in tubis constanter plenis
 demonstrata sunt. Quamdiu igitur aqua ean-
 dem libellam ML tuebatur, altitudo salientium
 per omnes tubos erat eadem; neque augebatur,
 unius, duorum vel trium luminibus obturatis.
 Quodsi vero libella ML vel descenderet, vel
 obturatis tubulis in M & L ascenderet, sa-
 lientium quoque altitudines omnes æqualiter
 decrescebant, vel augebantur.

THEOREMA XIV.

58. Aquarum per lumen horizon-
 tale vel ad horizontem inclinatum
 D sa-

Tab. I. *D salientium longitudines DE & DF, vel Fig. 11. IH & IG, sunt in ratione subduplicata altitudinum in vase vel tubo AB & AC.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impressa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71 *Mechan.*), vi gravitatis autem deorsum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), nec vis una alteram impedire potest, quia directiones non sunt contrariæ; aqua a premente AB impulsam eodem tempore pervenit ad rectam IG ipsi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulsam eandem attingit, suntque rectæ IH & IG spatia, quæ interea vi impetus impressi descripsissent eadem aquæ. Sunt vero spatia IH & IG, quia motus per DF est uniformis (§. 490 *Mechan.*), ut celeritates (§. 33 *Mechan.*); celeritates in ratione subduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata salientium sunt

in ratione subduplicata altitudinum (§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

59. Cum in medio non resistente omne corpus, vel horizontaliter, vel oblique projectum, Parabolam describat (§. 480, 482 *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum saliens Parabolam describit.

COROLLARIUM II.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, saliens arcuatum opus efficit, sub quo citra periculum madescendi deambulare licet; impetu quo abripiuntur guttæ descensum impediens.

SCHOLION I.

61. *Fecundum admodum spectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis solaribus illustrati Iridis coloribus superbiunt.*

SCHOLION II.

62. *Equidem tum aëris resistentia, tum aquæ facilis divisio impediunt, quominus arcus sint exacte parabolici; sed qui spectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

C A P U T II.

De Motu Fluidorum vi Aëris contigui producendo.

PROBLEMA VII.

Tab. I. 63. *Construere Vas ad hortos irrigandos idoneum.* Fig. 12.

RESOLUTIO.

1. Fiat Vas cylindricum ABCD, ex *Welfii Oper. Mathem. Tom. II.*

Tab. I. *quo orificio E instructum, ut digito appposito claudi possit.* Fig. 12.

2. Fundus vasis CD constet ex lamina exiguis foraminulis pertusa.

Vel.

Tab. I.
Fig. 13. Fiat vas sphaericum HB collo tenui HE instructum, & hemisphaerium DCB sit, ut ante, foraminulis pertusum.

Dico, si utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fundi intrare; si digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ effluere; si tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula instar roris stillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi posse.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vase cum ambiente in eadem libella existat (§. 34. *Hydrost.*). Ast si digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua sint, ut juxta aquam effluentem aëri in vas aditus denegetur; aër ambiens impedit, quominus quidpiam aquæ effluere possit (§. 95. *Aërom.*). Si digitum removeas, aëris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem Atmosphæræ extensa in aquam in vase contentam & una cum aqua in aërem ad fundum AB gravitat. Quare cum pressio aëris per orificium in aquam æqualis sit resistentiæ aëris ad fundum (§. 34. *Hydrost.*); aquæ pondus hanc superabit, adeoque ea per fundum vasis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

64. *Siphonem construere, hoc est, instrumentum cujus ope liquor ex vase hauriri potest.*

RESOLUTIO.

Construatur vas FE, cujus pars me- Tab. I.
dia ABCD figuram cylindri, extre. Fig. 14.
mæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: sintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora, quam quæ digito appposito commode claudi possunt.

Dico, si vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etsi superius orificium F exstet; si digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat; si denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

Aliter.

Cum globo AB connectantur duo Tab. I.
tubuli graciles CD & EF arbitrariæ Fig. 15.
longitudinis, quorum lumina D & E sint aperta.

Dico, si tubuli EF extremum liquori immergas & aërem ex vase per tubulum CD exsugas, liquorem in globum AB assensurum. Quod si jam digito ad lumen D applicato siphonem extrahas, fore ut nihil effluat; ast si digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rursus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aërem exsugis, perinde est ac si vasis ab aëre evacuati orificium

b. I. cium F in liquorem demergas, adeo-
 15. què liquor in globi AB cavitatem ascen-
 dere debet (§. 101 *Aërom.*). Quodsi
 digito ad orificium D applicato siphonem
 extrahas, liquor ex eo per lumen
 F effluere nequit (§. 95 *Aërom.*).
 Quamprimum vero digitum ab orifi-
 cio D removes, cum in F tantum
 resistat pondus atmosphæricum, liquor
 autem præter vim gravitatis ab eodem
 pondere atmosphærico per tubulum
 DC impellatur; resistantia a vi majore
 utique vincetur, adeoque liquor per F
 effluet. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

65. Siphone secundo commodo utimur ad
 fluida specificè leviora a gravioribus quibus
 innatant separanda: unde Chymicis subinde
 non contemnendum præbet usum.

PROBLEMA IX.

66. Siphonem construere ejus ope
 totus liquor ex vase quolibet in aliud
 quodcunque educi potest.

RESOLUTIO.

b. I. Fiat tubus recurvus ABC, ita ut,
 16. orificio A in plano horizontali posito,
 altitudo minoris DB 31 pedes nun-
 quam excedat. Ad communes usus al-
 titudo dimidiæ, aut unius, vel alterius
 pedis sufficit. Quodsi brachium minus
 AB liquori immergatur, & per lumen C
 aër exsugatur; liquor ex vase tamdiu
 per tubum BC effluet, quamdiu lumen
 A sub liquore constituitur.

DEMONSTRATIO.

Quando aërem ex Siphone ABC
 exsugimus, in eo residuus dilatatur (§.

37 *Aërom.*), adeoque elater ejus de-Tab. I.
 bilior evadit (§. 79 *Aërom.*). Quare ^{Fig. 16.}
 cum antea ponderi atmosphærico æ-
 quaretur (§. 34 *Aërom.*); nunc eodem
 minor est. Aqua igitur in tubum AB
 impellitur, donec elater aëris inclusi
 cum fluidi ascendens gravitate pondus
 Atmosphærae iterum adæquet (§. 93
Aërom.). Quodsi ergo non tanta
 fuerit altitudo BD, ut aqua intra tu-
 bum AB contenta, vi gravitatis, respec-
 tivæ qua in Atmosphæram aquæ su-
 perficie extra tubum incumbentem
 gravitat (§. 28 *Aërom.* & §. 34 *Hy-*
drost.), defectum elateris suppleat; in
 tubum BC descendet. Si jam orifi-
 cium C infra libellam aquæ cui alte-
 rum A immersum est subsistit; gra-
 vitas aquæ respectiva in crure BC est
 ad gravitatem respectivam aquæ in cru-
 re AB, ut altitudo BE ad altitudinem
 BD (§. 41, 47 *Hydrost.*). Quoniam ita-
 que nisus aëris in superficiem aquæ cir-
 ca orificium A gravitantis & aquam
 ad ascensum urgentis continuatur per
 aquam in tubo BC contentam, utpote
 quæ ad descensum isto aëris nisu urge-
 tur; aër ad orificium C resistens ur-
 getur vi ponderis atmosphærici & gra-
 vitate respectiva aquæ, quæ est ut al-
 titudo BE. Et eodem modo patet aë-
 ris nisu prope orificium A resisti vi
 ponderis atmosphærici [quo lib ob exi-
 guam siphonis altitudinem BE pro eo-
 dem habere licet] & gravitate respec-
 tiva aquæ in tubo BA, quæ est ut al-
 titudo BD. Cum igitur aëri ad orifi-
 cium A minus resistatur quam ad ori-
 ficiū C; nisus illius ibidem prævalet,
 X x 2 atque

Tab. I. atque adeo aqua continuo per AB ascendit & per alterum BC descendit, quamdiu orificium A sub fluido demersum & alterum C sub libella constituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmosphærici aqua nonnisi ad altitudinem 32 pedum Rhenanorum elevari potest (§. 27 Aërom.); altitudo cruris AB, nempe BD, minor esse debet 32 pedibus Rhenanis, ut aqua per siphonem fluat.

SCHOLION I.

68. Evidens adeo est, recte rejici artificium HERONIS ope Siphonis per montium vertex in oppositam planitiem aquas deducendi. Jubet enim HERON, ut extremitatibus Siphonis applicentur epistomia & ad nexum crurum infundibulum per quod aqua infundi possit, utrique siphonis cruri implendo sufficiens. Quoniam itaque aëris auxilio non modo est opus ad primum aqua in crus minus ascensum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non potest ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmospherico elevari solet. Suffragatur experientia: notum enim nobis est artificium HERONIS irritum successu fuisse tentatum, ubi altitudo major fuerat 32 pedibus Rhenanis.

SCHOLION II.

Tab. II. Fig. 17. 69. Illud quoque notatu dignum est, figuram siphonis ad arbitrium variari posse, modo orificium C sit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, si ex fluido extrahitur orificium A, fluidum omne per lumen inferius C egreditur, & quod in minore crure AB continetur, secum veluti trahit. Quod si siphonem plenum ita constituatur ut lumen utrumque A & C sit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Vi-

dentur adeo fluida in siphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans descendens instar catenæ secum trahat levio-rem.

SCHOLION III.

70. Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire Tab. II. volueris, tabulæ lignæ AB infige alterum Fig. 20. siphonis orificium C, quæ aqua innatans & cum imminuta descendens id constanter ad eandem profunditatem demergat.

SCHOLION IV.

71. Denique notandum, fluere aquam per Tab. II. siphonem etiam interruptum, si nempe crura Fig. 18. AD & EC conjungantur mediante tubo capaciore DE aëre pleno.

PROBLEMA X.

72. Diabetem construere; hoc est, vas quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.

RESOLUTIO.

Fundo vasis AFGB afferruminetur Tab. II. Siphonem inversum CDE, ea lege, ut crus Fig. 21. longius DE ultra basin vasis exporrigatur, aut minimum ejus orificium sit in basi vasis; crus vero minus CD eandem non prorsus attingat; altitudo denique siphonis minor sit altitudine vasis AG.

Aliter.

Fundo vasis AFBG afferruminetur Tab. II. tubus DE, qui cruris majoris vicem Fig. 22. sustinet; loco autem cruris minoris imponatur tubus alius capacior DC in C apertus.

Dico, si vas AFBG aqua vel alio liquore impleas; quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 21. 22. Dum enim aqua infunditur, in tubo DC seu crure minore siphonis, ad eandem altitudinem ascendit, ad quam in vase consistit (§. 34 *Hydrost.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE seu cruris longioris subsistit, consequenter per hoc nihil ejus effluere potest. Quamprimum vero plenum extiterit; ultra orificium D subsistit, adeoque vi gravitatis propriæ per tubum DE descendit; dumque semel fuit per siphonem CDE, tamdiu fluere debet quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immersum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

73. Quodsi vas non fuerit plenum, ad orificium E ore applicato aërem ex siphone CDE exsugas; liquor itidem omnis ex vase effluet (§. 66).

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 23. 74. Hinc construi potest poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis; postquam sufficienter vinum hausisti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta; donec nihil amplius effluere sentis. Tum poculum KL alteri porrige, & jube ut ore ad orificium I applicato liquorem exsugat. Ubi igitur haustu absoluto poculum ab ore remove- rit, vinum adhuc fluens vestem madidabit.

SCHOLION I.

Tab. II. Fig. 22. 75. Si tubus CD vitreus fuerit, aërem in suprema ejus parte residuum una cum aqua fluente per tubum DE successive abripi observabis. Facundum imprimis spectaculum, ubi aërem per tubulum vitreum fundo vasis in E infixum magna celeritate cum aqua

defluentem conspicias. Hoc Phenomenon pri- Tab. II. mus observavit R. P. DE LA ROCHE (a), Fig. 22. cumque experimentum repeterem, varias ad- huc circumstantias annotavi, unde usus in praxin redundat (b). Expertus inter alia sum, quod, cum diameter orificii D esset 6 li- nearum seu digiti dimidii, diameter vero in- ferioris E unius saltem lineæ, aër, tubum DE per superius D ingressus, per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impedi- verit. Hinc vero jam constat ratio, cur in diabetis istiusmodi aquæ fluxus interdum sistatur, an- tequam omnis effluerit; continuandus tamen aliquantisper, si tubus DC elevetur; atque hinc manifestum mihi videtur, quod luminis tam superioris D, quam inferioris E, diame- ter eadem esse debeat, nec ipse tubus lumi- bus capacior.

SCHOLION II.

76. Quodsi altitudo tubuli DE major fuerit altitudine vasis AG, hoc non obstante; aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat; digito ad E appposito, tubus DC attol- latur, ita enim aër in tubo DE contentus di- latabitur, ac, elatere ejus imminuto (§. 78 Aërom.), aqua intra tubum DC altius assur- gens in tubum DE sese præcipitem dabit. Quodsi itaque poculi KL operculo K tubus Tab. II. afferruminetur; ubi bibere volueris, non Fig. 23. opus est ut sugas, sed operculum attolli- sufficit.

PROBLEMA XI.

77. Aquam per siphonem interrup- tum elevare.

RESOLUTIO.

I. Duo vasa æqualia AB & IK in ea- Tab. II. dem planitie collocentur, quorum Fig. 24. unum AB sit apertum, alterum vero clausum, utrumque aqua plenum.

XX 3:

2. Ex

(a) Vid. Diarium Trevoliense A. 1709 art. 86. p. 1709.

(b) In *AE's Eru. lit.* A. 1711. p. 13.

- Tab.II. 2. Ex vase tertio QR undique claufo,
Fig.24. & ab aqua vacuo, tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, sed non major quam 31 pedum esse potest) in vasa AB & IK, quorum prior fundum vasis AB fere attingit, alter SH operculo vasis IK afferruminatur.
3. Denique vasi IK afferruminetur tubus alius LN epistomio M instructus, & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN descendit, epistomio M aperto, aliam ex vase AB in vas QR per tubum DC ascendere debere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim gravitas aëris in tubo SH contenti, respectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla sit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde est ac si tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed in hoc casu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN descendit, per alterum DC ascendit (§. 66). Ergo etiam in altero casu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vase QR jungitur, aqua per DC ascendere debet, dum per LN descendit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

78. Poterat idem eodem modo demonstrari, quo ascensum & descensum aquæ continuum in cruribus siphonis communis supra evicimus.

COROLLARIUM.

79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem ele-

vabitur, si in eadem altitudine collocentur Tab.II. plura vasa A, B, C, D &c. & in locis edioribus alia E, F, G &c. vasaque G & D, F & C, E & B tubis Pa, Mb, Ic, vasa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vasis D, C & B tubi R, S, T cum epistomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores sint. Epistomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollit, atque ita porro.

SCHOLION.

80. Aut magnum requiritur precipitii perpendicularum, aut ingens vasorum apparatus, si ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem si in vasa B, C, D, mercurius infunderetur, tubus BT 27 digitorum responderet tubo AE 31 pedum (§. 29 Aërom.); sed hac ratione elevatio aquæ nimis sumtuosa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum respondet.

THEOREMA XV.

81. Fluidum per siphonem ABC eo-Tab. I. dem modo acceleratur, quo acceleratur Fig.16. fluidum per foramen vasis effluens a fluidi intra vas ad altitudinem profunditatis orificii C cruris longioris BC infra libellam fluidi AD, cui crus siphonis minus BA immersum, æqualem consistente.

DEMONSTRATIO.

Patet ex Demonstratione Problematis 9 (§. 66), vim qua fluidum per siphonem urgetur esse ut gravitatem fluidi absolutam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris supra libellam fluidi cui immersum; consequenter ut altitudinem

I. dinem DE (§. 34 *Hydrost.*), quæ est excessus istius profunditas infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per siphonem accelerari debet quo acceleratur fluidum per vasis foramen effluens, si intra ipsum ad altitudinem DE consistat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

82. Quoniam aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium (§. 48); celeritas qua eadem per siphonem fertur eadem est, quam acquireret cadendo per profunditatem orificii extra aquam infra ipsius libellam DE.

COROLLARIUM II.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diversis vasis erumpentium celeritates sunt in ratione subduplicata altitudinum earum super foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diversos siphones fluentium erunt in ratione subduplicata profunditatum orificiorum per quæ effluunt infra libellam aquarum quibus crura minima siphonum immersa.

COROLLARIUM III.

II. 84. Eodem modo patet, in siphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N. effluentis eam esse, quam acquireret cadendo per altitudinem quæ est æqualis differentiæ tubi LN. & partis tubi DC ultra libellam aquæ in vase contentæ (§. 77).

COROLLARIUM IV.

85. Similiter patet, per diversos siphones interruptos aquam fluere in ratione subduplicata earundem differentiarum tuborum LN. & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vase AB computata.

SCHOLIUM.

86. Hinc prout alveo fluunt alia in Theoria & Praxi siphonum utilia, quæ antecedentium gnarus sua sponte inde inferet.

PROBLEMA XII.

87. *Aquam vi elastica aëris compressi Tab. II. movere.* Fig. 26.

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio assurgat tubus EF fundum non prorsus contingens, sitque apertura aliqua in G epistomio ad arbitrium obturanda. Quodsi jam per aperturam G. sive ope follis, sive syringis, sive Antliæ Pneumaticæ, sive flatu oris vehementiore aërem intruseris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aër comprimetur in parte vasis reliqua (§. 17 *Ærom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 78 *Ærom.*). Cum adeo elater externi ambientis minor sit, si clauso epistomio G epistomium E aperias, aqua ex vase AD per tubum EF ab aëre sese expandente expelletur.

SCHOLIUM.

88. Si aër ope Antliæ comprimitur, non opus est epistomio G, sed sufficit cochlea muniti aperturam. Tubus vero FE in cochleam desinit, ut ad Antliam firmari possit.

PROBLEMA XIII.

89. *Vi. aëris loco suo expulsi aquam Tab. II. movere.* Fig. 27.

RESOLUTIO.

- I. Sit vas quodcunque BQ per diaphragma RH in duo receptacula distinctum.
2. In superiori sit cātinus DB foramine in K pertusus, quod cochlea obturari possit.

Tab. II. 3. Per ejus medium transeat tubus AC
Fig. 17. diaphragma RH non prorsus attingens & epistomio I munitus.

4. Fundo catini conferruminetur tubus DEL, ultra diaphragma ad fundum fere vasis inferioris HQ protensus, tuboque AC longior.

5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere assurgens.

Dico, si receptaculum superius BR aqua repleas per foramen K, & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo superiore BR ejiciatur, & per tubulum DL in inferius descendat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aer in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17 *Aërom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 78 *Aërom.*). Quod si ergo epistomium I aperias, elater aeris inclusi fortior magis premit aquam in vase BR, quam externus ad A resistit. Aquam igitur ex vase BR per tubum AC expellit. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

90. Quod si tubulus AB exiguo lumine fuerit instructus, ut aqua ex eo saliat; ingeniosa hæc machina ab inventore HERONE Alexandrino FONS HERONIS appellatur. Patet ex demonstratione aquam hic urgeri ad saltum vi elastica aeris compressi, quemadmodum in Problemate præcedente: consequenter fontem HERONIS pendere a modo ingenioso aërem intra vas vi structuræ fontis comprimendi.

PROBLEMA XIV.

91. Aquam per rarefactionem aeris expellere.

RESOLUTIO.

1. Sint duo vasa ABCD & CDEF per Tab. diaphragma CD a se invicem separata, habeatque superius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipso capacitatis.

2. Ex diaphragmate CD ascendat tubulus IK fundum catini non prorsus attingens.

3. Per fundum catini exsurgat alius tubulus LM, cujus lumen L à diaphragmate exiguo intervallo distet.

Dico, si vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF supponentur, fore ut aqua ex vase AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aer in vase CEFD incallescit, rarefit (§. 23 *Aërom.*) ejusque elater intenditur (§. 146 *Aërom.*). Elater igitur aeris inclusi fortius premit aquam in vase AD contentam, quam externus ad M resistit; consequenter aqua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

92. Si aqua vi aeris compressi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur quo acceleraretur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem primitivi, seu ejus qui ad orificium tubi resistit.

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aëris compressi per tubum ejicitur, vis quæ impenditur ad eam ejiciendam est excessus vis elasticæ aëris compressi supra vim elasticam aëris ad orificium tubi resistentis, reliqua ad vincendam resistentiam insumta. Quoniam igitur perinde est, siue aqua ejicienda urgeatur vi elastica aëris, siue vi gravitatis aquæ eidem æquali; motus ejus eodem modo accelerari debet quo acceleratur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ejus qui ad orificium tubi resistit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam constituta aqua æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis servat (§. 48).

COROLLARIUM II.

94. Et si diversimode compressus aër ejicit aquam, celeritates quibus ejicitur sunt in ratione subduplicata altitudinum, ad quas constituta aqua cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis æquilibrium servat (§. 38).

COROLLARIUM III.

95. Quoniam elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine (§. 80 *Aërom.*); si aër primitivus in vase, antequam comprimitur, fuerit idem cum exteriori ad orificium tubi per quem aqua ejicitur resistente, vis qua aqua ejicitur est ut differentia massarum aëris compressi & primitivi.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA XVII.

96. Si aqua vi aëris compressi salit, ad eam altitudinem ascendit ad quam constituta aqua æquilibrium servat cum excessu elateris aëris compressi supra resistentiam aëris ad orificium tubi.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aëris compressi saliens ea celeritate ejicitur quam acquireret cadendo per altitudinem ad quam constituitur aqua æquilibrium servans cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis (§. 92); dum vi aëris compressi urgetur, perinde est ac si per illam altitudinem descendisset. Enimvero si per eam ascendisset, ad altitudinem saliret isti æqualem (§. 322 *Mechan.*). Ad tantam igitur etiam salire debet, dum vi aëris compressi impellitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

97. Quia in fonte HERONIS vis elastica aëris in vase PR compressi æquilibratur columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem salit ad altitudinem æqualem altitudini orificii D a libella aquæ in vase HQ.

COROLLARIUM II.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL descendit, quantum per orificium A ejicitur, adeoque altitudo orificii D supra libellam aquæ in vase HQ continuo decrescit; altitudo quoque saltus continuo decrescit.

Y y

COROL.

COROLLARIUM III.

Tab.II. 99. Et cum in vase AD aër continuo
Fig. 26. magis magisque dilatetur, dum aqua per
tubum EF salit (§. 7 *Aërom.*), ac præ-
terea, aquæ libella in eodem vase AD con-
tinuo descendente, resistentia aquæ in tu-
bo EF crescat (§. 34 *Hydrost.*); altitu-
do quoque aquæ salientis continuo de-
crescere debet (§. 95).

SCHOLIUM.

100. Nimirum gravitas aquæ in tubo EF
ultra libellam in vase AD consistentis su-
peraccedit resistentiæ aëris ad orificium F &
cum eadem unita agit, ita ut resistentia tota-
lis quam experitur vis elastica aëris com-
pressi aquam in vase ad ascensum per tubum
urgens, componatur ex elatere aëris ad orifi-
cium F resistentis & gravitate aquæ in tubo
FE ultra libellam in vase consistentis eleva-
tæ. Sed quoniam, aqua in aëre saliente, resisten-
tia ista æquatur columnæ aquæ 32 pedes
Rhenanos altæ (§. 28 *Aërom.*), tubus ve-
ro EF vix dimidii vel unius pedis in vase
vacuo existit; resistentia aquæ in tubo vulgo
non attenditur.

PROBLEMA XV.

101. Data ratione aëris primitivi
ad compressum; invenire altitudinem
saltus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

I. Quoniam aër comprimitur in ra-
tione ponderum (§. 73 *Aërom.*),
vis autem elastica aëris primitivi

æquilibratur columnæ aquæ 31 pe-
dum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*);
ex data ratione aëris primitivi ad
compressum inveniri potest altitudo
aquæ cum compresso æquilibrium
servantis in vacuo (§. 302 *Arithm.*).

2. Quodsi ergo aqua in aëre libero
salit, cum resistentia aëris prope ori-
ficiū æquetur columnæ aquæ 31
pedum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*);
altitudo inventa multiplicanda est 31
pedibus Rhenanis, ut relinquatur al-
titudo saltus.

Ex. gr. Sit aër compressus duplus aëris
primitivi, adeoque ratio primitivi ad com-
pressum ut 1. ad 2.; reperietur columna
aquæ compresso æquilibratæ 62 pedum
Rhenanorum. Quodsi ergo aqua in aë-
re libero salit, resistentia est 31 pedum,
adeoque altitudo saltus itidem 31 pedum.
Eodem modo patet, si aër compressus sit
triplus vel quadruplus primitivi; fore al-
titudinem saltus in casu priore 62, in po-
steriore 93 pedum, & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis
aëris rarefacti ad volumen condensati seu
primitivi, datur ratio elateris quo rarefiens
expanditur ad elaterem primitivi (§. 148
Aërom.); eodem modo inveniri potest al-
titudo saltus, si constet quantum eo gra-
du caloris qui aëri incluso inest, idem
dilatari possit.

SCHOLIUM.

103. Ex his principiis alia bene multe
deducere licet: sed nobis dicta sufficiant.

C A P U T III.

De Machinis quibus Aqua elevatur.

DEFINITIO V.

104. **V**alvula seu Assarium est obturaculum vasis vel tubi, quod introrsum aperiri potest; ast quo magis contra fundum seu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

105. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regressum vero impedit.

PROBLEMA XVI.

106. Valvulam seu assarium construere.

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.29. Valvulae simplicissimae C conficiuntur ex corio, habentque figuram circularem, & ansula D clavis affigitur fundo vasis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur.

Tab.II. Fig.30. Fieri etiam possunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compressis AB & foraminibus circum circa pertusis; quae alio orbiculo orichalceo CD sursum deorsumque mobili teguntur.

Tab.II. Fig.31. Parantur porro ex lamina cuprea E, & corio tenui obducuntur, circa cardinem in H mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G instruuntur.

Quemadmodum vero haecenus descriptae valvulae embolis potissimum

conveniunt, ita in fundo vasorum vel tuborum sequente utendum:

1. Foramen A torno excavetur, tantisper in conum desinens. Tab.II. Fig.32.

2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum, & clavo aut tigillo transverso D impediatur ne invecti possit.

Vel foramen hemisphaericum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA XVII.

107. Syringem, hoc est, Machinam construere, ex qua aqua attracta violenter expelli potest.

RESOLUTIO.

1. Construatur cylindrus ABDC ex materia solida, intus cavus, inferius tubulo CDE instructus. Tab.III. Fig.33.

2. Immittatur embolus K ex corio, vel alia materia quae humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipsum & cylindrum aëri vel aquae nullus concedatur transitus.

Quodsi tubulo F aquae immisso, embolum K extrahas, in cavitatem ab aëre vacuum ea ascendet (§. 101 Aërom.). Embolo igitur intruso, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM I.

108. Impetus aquae eo major, ipsaque aqua per longius spatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM II.

109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius spatium aqua propellitur.

PROBLEMA XVIII.

110. *Construere Antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi potest.*

RESOLUTIO.

Tab. 1. Paretur cylindrus cavus ex materia solida in aqua verticaliter erigendus, cujus inferior basis I valvula introrsum hianti instruatur (§. 106).
III.
Fig. 34.

2. Immittatur embolus EK valvula sursum hianti in L instructus.
3. Pro ejus faciliori extractione & depressione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam I elevat & in cavitatem cylindri seu tubi AD ruit (§. 101 *Ærom.*). Quodsi ergo idem rursus deprimatur, valvula I aquæ exitum negante (§. 104), valvula L aperitur & aqua ultra embolum ascendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIX.

111. *Construere Antliam, quæ per meram expulsionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.

Tab. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata est, divisus in aqua collocetur.
III.
Fig. 35.

2. Embolus F valvula G instructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi possit. Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depresso, valvula G aperitur (§. 104), & aqua in cavitatem cylindri BC ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed dum rursus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (§. 104), & sic aqua vi emboli, agitatione sæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si quod vitium contrahit hoc Antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, si vis sufficiens in K applicetur: ea enim attolli aquam palam est.*

PROBLEMA XX.

113. *Construere Antliam, quæ aquam attractam violenter aliorsum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in fundo valvula L instructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.
2. Immittatur embolus K sine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumescit, tornatus, & corio vel stupa vestitus.
3. In H afferruminetur tubus alius NH cum valvula sursum hianti I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (§. 105) & in cavitatem

Tab. III. Fig. 36. cavitatem cylindri ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed cum rursus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLIION I.

114. Ingeniosa hujus machinæ inventor fuit CTESIBIUS, qui primus de aqua Antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis Mechanicis & Hydraulicis suo avo celebris, VITRUVIO autore (a). Ab eo Antliæ dicuntur Machinæ CTESIBIANÆ.

SCHOLIION II.

Tab. III. Fig. 37. 115. Ejus vires, sublato affricu, multiplicare studuit diu multumque in Theoria & Praxi aquarum elevandarum versatus MORLANDUS (b). Virga nimirum ferrea D inter trochleas B & C, evitandi affricus gratia, sursum deorsum movetur (§. 956 *Mechan.*) & ponderibus E, F, G, H oneratur, ut aquam fortius per tubum plumbeum IV. expellat embolus LM ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad basin superiorem NO cylindri orichalcei RN dextre aptatum sine omni fere frictione mobilis; ad quam tollendam & duodecim annorum studium, & multum argenti se impendisse fatetur laudatus inventor.

PROBLEMA XXI.

116. Aquam ope catenarum situlis instructarum elevare.

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 38. 1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut prisma sexangulare MN circa axiculum ferreum mobile. 2. Eo in loco quo aqua elevari debet, constituatur cylindrus aut prisma simile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.

(a) Lib. 10 c. 12. conf. lib. 9. c. 9.

(b) *Elevation des Eaux* c. 4. art. 1. p. 35. & seqq.

3. Situlæ S catenis connectantur, quæ Tab. III. Fig. 38. utrumque cylindrum vel prisma ambiant. Alii situlas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod sæpius accidit) catenis dissiliantibus fundum aquæ petant.

Quod si cylindrum superiorem OP convertas, inferior similiter convolvitur & situlæ per aquam trajectæ aquam hauriunt superius effundendam.

SCHOLIION.

117. Quoniam situlæ utrinque vacuæ in æquilibrio sunt; pondus elevandum est aqua in situlis ex altera parte contenta, ubi ab affricu discesseris, quæ in his Machinis non exigua est.

PROBLEMA XXII.

118. Rosarium construere ad elevandam aquam.

RESOLUTIO.

1. Tubus ligneus AB in aqua constituatur tantæ altitudinis, ad quam Tab. III. Fig. 39. aqua elevanda. 2. Tum sub aqua, tum in superiori loco quo aqua elevanda, collocentur ut in Problemate præcedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles. 3. Ad funem, cujus extremitates inter se connexæ, circa cylindros GH & ED circumductum, aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor sit frictio) hæmisphæria circulo coriaco tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Tab. Dum enim cylindris circumvolutis
III. globi aut hemisphæria per tubum AB
Fig. 39. trahuntur, aquam binis interjectam
una attollunt, in L effluentem.

S C H O L I O N.

Tab. 119. Alii utuntur prismatibus quadratis
III. loco tuborum & tabulis ligneis quadratis loco
Fig. 40. globulorum. Immo & in tubis nonnulli or-
biculos ligneos catena connexos globulis sub-
stituunt. Cæterum hæc Machina usum quo-
que habet in fossis & fluminibus a sæcibus
purgandis. Ingens tamen affrictus esse solet,
quem parum curare solent, ubi virium ad
aquam elevandam compendium quæri necessi-
tas nulla jubet: id quod & de aliis machi-
nis, in quibus ingens affrictus est, notan-
dum.

P R O B L E M A XXIII.

120. Aquam tympano vel rota situ-
lis instructa elevare.

R E S O L U T I O.

Structura admodum variari solet pro
diversitate quantitatis aquarum elevan-
darum, & altitudinis ad quam eve-
henda.

Tab. Si magna aquæ quantitas ad exi-
IV. guam altitudinem elevari debet; tym-
Fig. 41. panum construitur AB in 8 cavitates
divisum, quæ aperturas habent tum in
peripheria tympani C ad hauriendum
aquam, tum ad tubum DE, qui axis
vices sustinet, ut aqua per ejus fora-
mina E in cistam G effundi possit.

Tab. Si minor aquæ quantitas ad majorem
IV. altitudinem elevanda, situlæ ligneæ pice
Fig. 42. obductæ A ad peripheriam rotæ aptan-
tur, quæ aquam hauriunt, dum per
eam trajiciuntur, rota circumacta, &
superius in B effundunt.

Quodsi rotæ palmulas non in fron- Tab.
te gerant, spatium binis interjectum IV.
hinc inde clauditur, nonnisi foramine Fig. 43.
in palmula superiori A relicto, per
quod aqua hauritur, & apertura B ad
latus facta, per quam rursus effunditur.

Sunt qui situlas congiales A vel Tab.
(quod præstat, ne scilicet tantum aquæ IV.
perdatur) capfas quadratas unico fora- Fig. 44.
mine instructas B ad latus rotæ aptant:
sunt & qui helicibus CD à peripheria Fig. 45.
ad centrum fere tendentibus instruunt.
Alios modos silentio præterimus.

S C H O L I O N.

121. Rotæ istiusmodi structura plurimum
inter se variant: non tamen omnes ejusdem
notæ. Sunt enim, quæ multum aquæ inuti-
liter dissipant, antequam in receptaculum
commune effundatur. In praxi tamen ejus
non semper habetur ratio, modo aquæ suffi-
ciens copia elevari possit.

P R O B L E M A XXIV.

122. Cochlea ARCHIMEDIS aquam
elevare.

R E S O L U T I O.

1. Circa cylindrum AB circumvolvi- Tab.
tur tubus plumbeus ea lege, qua IV.
helicem in cochlea designare solemus Fig. 46.
(§. 854 Mech.).

2. Cylindrus inclinetur ad horizontem
sub angulo 45 circiter graduum,
sitque orificium tubi B sub aqua
demersum.

Quodsi cochleam ita circumagas ut
orificium B contra aquam volvatur,
aqua per helicem ascendet tandemque
in A effundetur.

Aliter.

Aliter.

Tab. 1. Basis cylindri tam superior, quam inferior, dividitur in 4 vel 8 partes æquales, & puncta divisionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c. in superficie cylindri descriptis, in quas transfertur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividuntur in tot partes æquales, quot sunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HI partes duæ, in CK tres &c. transferantur, ut adeo tota cylindri superficies in areas quadratas sit divisa.

2. Anguli diagonaliter oppositi connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenso facile designantur, & juxta harum ductum helice fulcetur cylindrus.

Tab. 3. Ad helicem firmentur asserculi admodum tenuës, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.

4. Basibus denique circum circa affigantur asseres tenuës & annulis ferreis minuantur, totaque superficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION I.

123. Peripheria basium cylindri dividi potest in quotcunque partes æquales, & in lineas verticales puncta divisionum conjungentes transfertur distantia helicum, quoties fieri potest, in tot partes æquales subdividenda quot sunt lineæ verticales, ut inde divisiones earum determinentur, quemadmodum in resolutione Problematis præcepimus.

Si diameter totius cochleæ 18 digitorum diameter axis 6 vel 4, distantia helicum 9 digitorum esse solet.

SCHOLION II.

124. *Hac Machina exigua vi multum aqua attolli posse, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non sufficit; sed quæ ab una effunditur, haurienda est ab altera, & ita porro.

PROBLEMA XXV.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelsoiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requisiverit.

2. Intra turrim seu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis situlis instructæ (§. 120), vel sitularum catenis connexarum (§. 116), vel rosarii (§. 118), vel cochlearum Archimedearum (§. 122), vel antliarum (§. 110, 111), viribus vel animatis vel inanimatis legitime applicatis, juxta regulas C. 17 *Mechanicæ* (§. 876 & seqq.) traditas.

3. Aqua effusa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati sint tubi per quos iterum descendet.

4. Ne aqua ultra latera aheni unquam assurgat, unus alterve ad summitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluxum refluat unde hauritur.

5. Hi tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defossis, & ad eum usque locum protentis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in quos hient lumina horizontalium epistomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti possit (§. 5).
- Aperto enim epistomio aqua in tubo verticali ascendet (§. 34 *Hydrost.*).

S C H O L I O N.

127. Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inseritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochlea ARCHIMEDIS, ac cylindri superiores rosariorum & catenarum situlis instructarum instruuntur rotis radiatis, quibus aliæ dentatæ occurrunt.

Ex. gr. Ponamus rosarium calcando moveri debere. Construendum igitur erit tympanum ingens (§. 886 *Mechan.*), cujus axi una infigenda rota stellata, occurrens radiatæ, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiatæ verticalaris ad conservandum impetum. Quodsi equus eandem Machinam movere deberet, axi verticali temone instructo (§. 888 *Mechan.*) infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodsi homo partim trahendo, partim deprimendo, aquam ope rosarii elevare teneretur, tympano substitueretur axis cum scytalis & rota verticalari (§. 882 *Mech.*). Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vetus homodromi versando (§. 884 *Mech.*) infigenda rota radiata, quæ circumagat stellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentatæ dentes in plano, axem cum cylindro rosarii communem habenti, occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis casibus fieri debeat, modo Problemata Mechanica de potentiæ ad Machinas applicatione fuerint perspecta.

C A P U T IV.

De Fontibus Salientibus.

P R O B L E M A XXVI.

128. **C**onstruere fontes salientes.

R E S O L U T I O.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiore (§. 110 & seqq.) & intra vas satis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rursus descendat.
2. Cum tubis hisce connectantur alii horizontales sub terra defossi, per

quos aqua usque ad originem fontium salientium deducatur.

3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo sit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum prosiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 56).

S C H O L I O N I.

129. Quodsi aqua saliens ad altitudinem datam ascendere debet, quæsito satisfieri potest per Schol. 3, Theor. 12 (§. 52).

S C H O L I O N II.

SCHOLIION II.

130. *Quodsi desideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per Theor. 3 Cor. 1 (§. 23), & per Theor. 5 (§. 27).*

SCHOLIION III.

131. *Si denique aquarum ex diversis unius fontis tubis salientium altitudines inæquales requirantur; quæsito potiemur per Theor. 12 (§. 49) & Theor. 13 (§. 56): ubi & observasse juvabit quæ superius in Scholiis Theor. 12 (§. 50 & seqq.) monuimus.*

PROBLEMA XXVII.

132. *Fontem construere, ex quo aqua erumpens pilam aeneam projiciat, descensumque parantem continuo repellat.*

RESOLUTIO.

b.V. 1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate sua impetum impressum eludat.

2. Tubus, per quem aqua salit, BC sit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquæ sufficiens copia ex insigni altitudine in tubum BC deducatur. Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum, & descendentem constanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus sit ad horizontem exacte perpendicularis, per *hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter ascendit. Quoniam vero ex insigni altitudine delapsa, per *hypoth.* & ex tubo ea celeritate erumpit quam cadendo per istam altitudinem acquireret (§. 48), magna quoque celeritate movetur (§. 91, 473 *Mechan.*), adeo-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

que globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari ascendendi (§. 534 *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit ad quam vi impressa ascendere licet (§. 317 *Mech.*), vi gravitatis suæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215 *Mechan.*). In descensu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impresso, ut ante, ascendere cogit. Quamobrem globus in aëre pendulus sursum deorsum feretur, quamdiu aqua ex tubo saliens satis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi ascensum descensumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem substituere licet, ex. gr. avem cum alis expansis.

SCHOLIION.

134. *Quoniam globus, ut ex alto rursus descendens in aquam salientem incurrat, in eadem constanter linea perpendiculari ascensus descensusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime exposita.*

PROBLEMA XXVIII.

135. *Construere fontem, quæ aquam versus diversas plagas projiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB aquam advehens ver-Tab.V.
ticalis & ipsi infixi sint alii horizonta-*Fig. 50.*
les DE & GH, alii, ad horizontem
versus diversas plagas inclinati OP &
MN, alii denique infra horizontem
versus plagas illis intermedias reclinati,
ut FL.

ZZ

Quo-

Tab.V. Quoniam aqua directionem luminis
Fig.50. per quod prorumpit retinet; per lumen A saliens perpendiculariter ascendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diversæ amplitudinis (§. 59), & ad diversas plagas tendentes describet. Fons igitur aquam versus diversas plagas ejicit.

Aliter.

Tab. Tubus AB per quem aqua salire
IV. debet sit superius clausus in A, & lumen
Fig.51. minis loco vel undiquaque, vel in dimidia superficiei parte, foraminulis exiguis pertusus.

Quodsi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis; aqua versus omnes plagas per foramina saliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapsus (§. 58) satis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodsi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere assurgentem epistomio C instruas; eo aperto, spectatores veluti ab imbre improvise madidati recedent.

SCHOLION.

137. Probe autem tenendum est, lumen per quæ aqua egreditur diametros ipsorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aëris resistentia aliæque impedimenta (§. 50 & seqq.) impetum aquæ statim eludant. Ipsi quoque fontes sufficientem aquæ copiam suppeditare; aquæ impetu sufficiente gaudere debent.

PROBLEMA XXIX.

138. Fontem construere, ex quo aqua instar pluvie profiliat.

RESOLUTIO.

Tab. Tubo, ex quo aqua salire debet,
IV. afferruminetur globus, vel corpus
Fig.52. lenticulare ex duobus segmentis sphæri-

cis compositum AB, ex lamina metallica confectum, cujus superior superficies minimis foraminulis pertundatur. Tab. IV. Fig.52.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu versus superiorem laminam AB propulsa sub forma tenuissimorum filamentorum in varias guttulas mox dispergendorum profiliat.

PROBLEMA XXX.

139. Fontem construere, ex quo aqua profiliens ad modum lintei expanditur.

RESOLUTIO.

Tubo AB afferruminentur duo segmenta sphærica C & D, quæ fere se invicem tangant &, mediante cochlea E, ad eum situm facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat, prout usus postulaverit. Tab. IV. Fig.53.

Alii vel in tubis lumine destitutis, vel in corporibus sphæricis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam saliens ad modum lintei expanditur, si impetus fuerit sufficiens.

PROBLEMA XXXI.

140. Fontem construere, quæ aquam spumescens jucundo spectaculo ejiciat.

RESOLUTIO.

Sit tubus AB & paulo infra lumen Tab.V. in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari possit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur. Fig.54.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens spumescet, ac fere nivis aërem opplentis floccos æmulabitur.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

141. *Fontem construere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque sitos derivari possit, & directionem luminis retineat; non alia re opus est, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abscondantur, quorum orificia hient per eas partes unde aqua proflire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquae salienti figuras varias conciliare licet, concipi potest. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.*

PROBLEMA XXXIII.

143. *Construere fonticulum salientem, qui, ubi salire desit, clepsydra instar inverteri potest.*

RESOLUTIO.

- Tab.V. Fig.55. 1. Fiant duo vasa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua saliens consumere debet; tantoque majori intervallo PN a se invicem remota quanto major aquae salientis altitudo desideratur (§. 49).
2. Sit BAC tubus recurvus in C epistomio instructus, & DEF tubus alius itidem recurvus in D epistomio munitus.
3. In I & K sint tubuli alii utrinque aperti, & fundos vasorum NO & LM fere attingentes: quousque similiter tubi QR & ST pertingunt.

Quodsi jam vas LM fuerit aqua ple-
num, aperto epistomio C, ea profiliet
fere ad K, & delapsa per tubulum I
apertum in vas NO, ruet aëremque con-
tentum per tubum QR expellet. Ubi
vero aqua omnis ex vase LM effluxerit;
machina inversa, delapsa ex vase
NO salientem efficiet.

COROLLARIUM.

144. Si vasa LM & NO tantam aquae copiam contineant, quae intra horae spatium tota effluat; Clepsydram habebimus salientem in suas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA XXXIV.

145. *Construere malluvium cum fonticulo saliente.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vasis, cui
aqua infunditur. Tab.V. Fig.56.
2. Ex vase descendat tubus ab L usque ad M, ubi versus I inflectitur.
3. In K applicetur epistomium, quo aperto aqua profiliet fere ad L usque (§. 49).
4. FG sit catinus aquam excipiens; mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, si aquae salienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia superius exposita (§. 135. & seqq.).*

PROBLEMA XXXV.

147. *Flatu oris aquam salientem efficere.*

RESOLUTIO.

1. Sit AB sphaera vitrea vel metalli-
ca, & Tab.V. Fig.57.

Tab.V. 2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C instructus, & in D infimum sphaeræ punctum fere attingens. Dico: si aërem per tubulum CD exsugas, & orificium C in frigidam statim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in sphaeram ascendat. Quod si iteratis suctionibus ultra medietatem fuerit repleta, & ore in C applicato aërem per tubulum infles, remoto ore aqua profiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aërem exsugis, in sphaera AB inclusus rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerso tantum fere aquæ ascendere debet, quantum aëris fuerit eductum (§. 149 *Aërom.*). Quod si vero per tubulum CD aërem infles, is per aquam specificè graviolem (§. 57 *Aërom.*) ascendet (§. 99 *Hydrost.*); consequenter aër inclusus comprimetur (§. 5 *Aërom.*). Saliat ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

148. Quod si hanc sphaeram aquæ ebullienti immittas; aër rarefiet (§. 23 *Aërom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD salire debet.

SCHOLIUM.

149. *Fenticulus hic ab inventore HERONE nomen Pilæ HERONIS sortitus est.*

PROBLEMA XXXVI.

150. *Fonticulum construere accensis candelis salientem.*

RESOLUTIO.

Tab.V. 1. Ex lamina metallica fiant duo vasa cylindrica AB & CD.

2. Jungantur tubis utrinque apertis KL,

ut aër ex superiore in inferius descendere possit. Tab.V. Fig. 58.

3. Tubis afferruminentur candelabra H;
 4. operculo vero basis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epistomio G instructus, & ad fundum fere vasis protensus.
 5. In Q sit foramen cochlea munitum; ut aqua in vas CD infundi possit.
- Dico, candelis in H accensis, aquam per tubum EF salire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis 14 (§. 91).

SCHOLIUM.

151. *Hoc eodem artificio efficies statuam ad præsentiam Solis, vel candelis accensis, lachrymas effundentem. Neque enim alia re opus est, quam ut ex cavitate in qua aër rarefit tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.*

PROBLEMA XXXVII.

152. *Fontem intermittentem construere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vasis AB ascendat tubus EF utrinque apertus, foramine in M exciso. Tab.V. Fig. 59.
2. Tubus hic afferruminetur tam vasi superiori in H, quam inferiori in E.
3. Vas superius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi possit; in basi autem inferiore multa foraminula, per quæ destillare queat.
4. In vase inferiore sit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat nisi ad altitudinem EM constituta.

Dico.

Tab.V. Dico, aquam ex hoc fonte per inter-
Fig.59. valla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine M aperto aëri externo per tubum EF in vas superius AB aditus pateat; aëris inclusi elater æqualis est ponderi atmosphærico (§.33 *Ærom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vase contentæ ipsi juncta pressio- nem majorem efficit, quam resistentia ponderis atmosphærici ad foraminula, adeoque aqua destillare debet. Quam primum vero aqua delapsa foramen M occludit, ut nullus amplius aër in lo- cum aquæ delapsæ succedere possit; perinde est, ac si vas quoddam exi- guo orificio instructum inverteres, adeo- que fluxus aquæ per foraminula siste- tur (§.95 *Ærom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque assurgit, per foramen G in cavitatem vasis CD de- scendit. Ea igitur defluente, foramen M rursus aperitur, aërique aditus in vas superius AB denuo conceditur. Unde patet aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus adeo fontem intermittentem. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Quodsi fonticulum per intervalla sa-
Fig.60. lientem desideres, fiant omnia ut ante, nisi quod loco foraminulorum aptandi sint tubi recurvi PQT & RSV.

Aliter.

Tab.V. 1. Sit tubus EF aquam advehens in ca-
Fig.61. vitatem vasis AB.

2. Ex hoc vase descendat siphon GHI in minus CD lumine conveniente in L instructus.

Quamprimum aqua ultra siphonem in Tab.V. AB ascenderit, per siphonem fluet, do- Fig.61. nec vas exhauriatur, (§.72) adeoque tamdiu per lumen L saliet. Quodsi igitur efficias, ut plus aquæ per lu- men L saliat quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermit- tentem.

SCHOLIUM I.

153. Hoc posteriori artificio haud difficul- ter efficias, ut statua aquas evomant ex im- proviso in adstantes.

SCHOLIUM II.

154. Priori autem superstructa est lam- pas, quam in gratiam amici inventam publi- ci deinde juris feci (a), & in sequenti Pro- blemate denuo exhibeo.

PROBLEMA XXXVIII.

155. Lampadem construere, quæ ean- dem quantitatem olei ellychnio constan- ter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.

RESOLUTIO.

1. Fiat vasculum cylindricum ACDB, Tab. 1. cui oleum infundi possit; & ipsi affer- VI. ruminetur aliud minus formam pa- Fig.62. rallelepidi habens FED, & rostro FH instructum pro recipiendo el- lychnio.
2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam a fornici AC.
3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vasculi AB parietis adhæreat, quem *Tracheam* appello.

ZZ 3

Ejus

(a) In *Actis Erudit.* A. 1711. p. 30. & seqq.

Tab. VI. Fig. 62. Ejus osculum superius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O superficiem olei ad libellam HI constituti lambit.

4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque similiter apertus & ad eandem olei libellam HI protensus.

5. Fundo vasis DB afferruminetur tubulus QR, cujus osculum superius Q ultra libellam olei tantillo emineat, & transeat per matricem cochleæ qua vas ABDC ad pedamentum VTX firmatur.

6. Intra hoc fiat vasculum cavum *ab* & in G foramen exiguum, per quod aëri externo in cavitatem DKLB pateat aditus.

7. Denique in fornice fiat foramen cochleæ S munitum, ut lampas (si quando opus fuerit) a sordibus purgari queat.

Dico, si lampas a pedamento avulsa invertitur &, digito ad foramen G applicato, oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingressum per tubulum NM, vase in latus DC inclinato, in proprium receptaculum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rursus firmata munere suo, ut decet, fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI consistit, ne guttula quidem una per MN effluere potest, vi eorum, quæ ad Problema præcedens demonstrata sunt (§. 152). Insensibili autem ejus

quantitate absunta, aër per tracheam OP ingreditur & oleum per MN destillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas constanter ellychnio affundit.

Quod erat unum.

Quodsi lampas in locum calidum deferatur, aër supra oleum rarefit (§. 23 *Aërom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91); quod cum ultra libellam HI assurgat, per tubulum QR in vasculum *ab* defluit, consequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi potest.

Quod erat secundum & tertium.

SCHOLIUM.

156. Ut demonstratio ocularis evaderet; vas ABCD ex vitro fieri curavimus, observavimusque Tracheam PO non nimis arctam esse debere, si desideres ut olei vel minima quantitas absunta statim refundatur. Etenim gutta olei aëri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, nisi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas ACKL abripiatur. Unde simul colligitur operam dandam esse ut orificium tracheæ sit bene politum.

PROBLEMA XXXIX.

157. Construere fonticulum salientem, in quo avicula tantum aquæ sorbeat, quantum ex illo profluit.

RESOLUTIO.

1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates divisum, quarum superior AEPD in duas alias AC & CB per diaphragma CN subdividitur.

2. In Q, R, & S fiant foramina cochleis munienda ut aqua infundi & effundi possit, prout usus postulaverit.

3. Ex

Tab. VI. Fig. 63. 3. Ex vase AC in vas DF descendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum vero hujus non prorsus contingens, atque clavicula P instructus.

4. Ex vase DF in vas BC assurgat tubus KI basi illius superiori afferruminatus, hujus vero basin superiorem non prorsus attingens.

5. A fundo fere vasis CB ascendat alius tubus LM, transiens per fundum phialæ O aquam salientem exipientis, epistomio T instructus.

6. Denique per rostrum, corpus & pedes aviculæ vasi CA insistentis ducatur siphon inflexus ZV.

Dico si epistomia P & T aperias, vasis AC & BC aqua repletis & rostro aviculæ aquæ immerso, fore ut aqua per tubulum LM saliat & avicula eam sorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum, epistomio P aperto, aqua per tubulum GH, ex vase AC in vas DF descendit; aqua ex phiala per rostrum avis ascendere debet (§. 77). Dum vero per siphonem ZV semel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhausta (§. 66). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH descendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM salire debet (§. 89). Habemus ergo fonticulum salientem, & aviculam tantum aquæ sorbentem quantum ex illo profluit. Q. e. d.

SCHOLIUM.

158. Eadem prorsus structura est fontis Kircheriani, in quo avis tantum aquæ sorbet quantum a serpente in poculum exspuitur. Absconde enim tubum LM intra corpus serpentis & eum inflecte, ut lumen

M per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircheriani mutabitur.

PROBLEMA XL.

159. Fontem construere in vase vitreo clauso salientem.

RESOLUTIO.

1. Sit sphaera vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum. Tab. VI.
2. Per cochleam transeat tubulus DC, exiguo lumine in C, sed ampliore in D instructus, cujus pars major sit extra vitrum. Fig. 64.
3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, sed altero CD multo longior EF.
4. Sint duo vasa IK & LM mediante tubo HN inter se connexa & basi superioris IK afferruminetur tubulus GH,
5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, si vas IK & aliquam sphaeræ A partem aqua repleas, aquam ex sphaera per tubulum EF in vas LM descenduram & per tubulum DC in sphaeram ascensuram, per lumen exiguum C saliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF descendit, aer in sphaera dilatatur (§. 36 Aërom.), adeoque elater ejus minuitur (§. 78 Aërom.). Quare cum inclusus ante dilatationem ponderi atmosphaerico æqualis existeret (§. 33 Aërom.), quo aqua in vase IK premitur (§. 21 Aërom.); inclusus post dilatationem ad lumen C minus resistit, quam externus aquam in vase IK premit. Aqua igitur per tubulum DC ascendere & quia

Tab. VI. quia lumen C exiguum *per hypoth.* salire debet (§. 55). *Quod erat unum.*

Fig. 64. Cum vero fonticulus hic saliens sit siphon interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ salientis continuatio intelligitur per ea quæ de continuatione motus fluidorum in

siphonibus demonstrata sunt (§. 66). *Quod erat alterum.* Tab. VI.

Fig. 64.

SCHOLIUM.

160. Ex demonstratione apparet aquam per tubulum DC salire debere; modo orificium D in aquam immergatur, orificio F extra eam constituto. Unde structura fontis multis modis variari potest.

CAPUT V.

De variis Machinamentis Hydraulicis.

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. 161. **F**Ores construere, quibus apertis aqua conspergatur ingrediens.

Fig. 65.

RESOLUTIO.

1. Ad latera valvarum juxta superliminare collocentur vasa AB & CD aqua plena, quibus
2. tubus recurvus EFGH ita adapteatur, ut pars FG sub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epistomia, cum valvis P & Q ita connexa ut iis apertis & ipsa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L profiliet & ingredientem madidabit (§. 49).

SCHOLIUM.

162. Eodem artificio riscum construes, quo aperto, facies aperientis aqua conspergatur.

PROBLEMA XLII.

163. Efficere, ut in horto vel crypta deambulans subito aquis ex terra profusis conspergatur.

RESOLUTIO.

1. Sub terra ita abscondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depressa embolus movetur, paulo ultra ipsius superficiem promineat. Tab. VI. Fig. 66.
 2. Embolus F sit valvula instructus, & ita apretur ut a pede calcantis depressus a lamina elastica H rursus attollatur.
 3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
 4. Fundo antliæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra superficiem terræ paulo promineat.
- Dico, aquam per M profilire debere, si pede in G insistas.

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in superiorem antliæ AB partem delapsa urget valvulam E, quæ, cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc transitum concedit, in tubo LM usque ad N ascensuræ (§. 34 Hydrost.). Quod si jam pede calcantis embolus

ab. bolus F deprimatur, valvula E clausa
VI. aquæ regressum in superiorem antliæ
.66. partem impedit (§. 104), quare per
tubum LM cum impetu ejicitur. Re-
moto autem pede ab embolo GF, pi-
stillum situi suo restituitur ope elateris
H. Saliet itaque aqua ex M, quoties
pes calcantis admoveatur embolo G.
Q. e. d.

SCHOLION I.

164. Cum aqua ex altitudine quadam de-
lapsa, ad eam fere rursus ascendat (§. 49);
quæ tubo CD advehitur, ex vase intra ter-
ram defosso & in planitie replendo illuc de-
rivari debet.

SCHOLION II.

165. Quodsi vero aqua per tubum CD
advecta ex altitudine quadam fuerit delapsa;
in I aptanda valvula, cui deprimenda solum
aquæ pondus non sufficiat: vel totum Machi-
namentum alia ratione construi deberet.

PROBLEMA XLIII.

166. Construere Machinam, quæ
aquam insigni cum impetu elevet.

RESOLUTIO.

- ab. 1. Construatur antlia compressiva AB
I. (§. 113).
7. 2. Ex ea transeat tubulus CD in vas
cylindricum HI, cujus ex orichal-
co parati altitudo sit 2 pedum, dia-
meter octo digitorum.
3. Tubus CD sit valvula in D instru-
ctus, quæ in cavitatem vasis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus
recurvus KL, mediante epistomio O
pro arbitrio claudendus & aperien-
dus.

Dico, hanc Machinam aquam ad in-
signem altitudinem elevaturam. Tab.
VI.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, va'l'vula
G aperitur & aqua in antliam AB af-
cendit (§. 107): quo rursus depres-
so, illa clauditur, & valvula D aper-
ta aqua per tubum CD in vas HI eji-
citur (§. 105). Quo facto, cum epi-
stomium O sit clausum, aër in cavitare
vasis HI comprimitur (§. 17 *Aërom.*).
Quodsi itaque sufficienter fuerit com-
pressus; aperto epistomio, aqua insigni
cum impetu per tubum KL prorum-
pet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli con-
tinuata, aër in eodem compressionis gra-
du conservari potest; hæc Machina aquam
continuo ejicit.

PROBLEMA XLIV.

168. Hydraconstiterium, hoc est;
Machinam construere, quæ aquam ad
incendia restinguenda ad datam altitu-
dinem & in datum locum evomat.

RESOLUTIO.

1. Fiat cista AB figuram parallelepipedi Tab.
habens, & rotis C instructa, ut com- VII.
mode ad locum incendii advehi pos- Fig. 68.
sit. Sunt & qui cistam trahæ impo-
nunt, firmitatis gratia, quia non tam
facile damnum patitur, quam rota.
2. Intra cistam firmetur Machina Cre-
libiana cum gemino cylindro (§.
113).
3. Ad agitando embolos applicentur
vectes DE cum axe curvato, ita ut
embolus alter deprimatur, dum unus
attollitur.

Tab. 4. Tubus per quem aqua ejaculatur,
VII. immittatur alteri mobili GH, qui
Fig. 68. ad locum desideratum commode
dirigi potest.

Si enim continuo aqua in cistam AB
infundatur, & emboli nunc eleventur,
nunc deprimantur; aqua per tubum
GH ad locum desideratum ejaculabi-
tur (§. cit.). Machina igitur ad restin-
guenda incendia commode utimur.

SCHOLIION I.

169. Belgæ alique ipsorum exemplo exci-
tati tubo mobili GH substituunt tubum lon-
gum, flexilem, ex materia velorum vel co-
rio factum, qui manu arreptus ad quævis
loca incendio infestata trahitur ab homine ex
conclavi uno in alterum libere deambulante,
prout necessitas postulaverit. (Vocatur tu-
bus istiusmodi Germanis ein Schlauch.) Unde
apparet, hac ratione hydracontisteriis esse
locum, etiamsi flamma in conclavibus adificii
tantum sæviat, nec per tectum ac fenestras
foras erumpat.

SCHOLIION II.

170. Non inutiliter Machina Ctelibianæ
substituere licet alteram in Probl. 43 (§.
166) descriptam, quia aquam non per inter-
valla, sed continuo ejaculatur.

PROBLEMA XLV.

171. Efficere, ut ad speculum aut
objectum aliud accedens aqua ex impro-
viso conspergatur.

RESOLUTIO.

- Tab. 1. Sit AB cista aqua plena, cujus fundo
VI. afferruminetur tubus recurvus CDEF,
Fig. 69. 2. Pars tubi intra cistam AB paulo in-
fra embolum elevatum foraminibus
nonnullis pertundatur.
3. Denique embolus G ita immittatur,
ut cessante vi deprimente, per ela-
terium rursus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum Tab.
CD defluet, ac in tubo EF eo usque VI.
ascendet, donec in eadem altitudine Fig. 69
subsistat, ad quam aqua intra cistam
AB constituitur (§. 34 Hydrost.).
Quodsi vero embolum in H pede de-
primas, aquam per F ejiciet, adeo-
que eadem ex improvviso conspergeris.
Q. e. d.

SCHOLIION.

172. Quodsi aqua ex alto delabatur, suffi-
cit, ut pede deprimatur valvula, quæ aquæ
aditum in tubum EF concedat (§. 165).

PROBLEMA XLVI.

173. Construere speculam, in qua spe-
culator constitutus sonum ingentem car-
nu edat.

RESOLUTIO.

1. In superiore loco speculæ constitua- Tab.
tur vas aqua plenum AB, & in in- VI.
feriore aliud aëre plenum CD, Fig. 70
contra omnem vero aëris accessum
optime munitum.
2. Ex vase superiori AB in inferius CD
transeat tubus EF epistomio L in-
structus.
3. Ex vase inferiori CD ascendat tu-
bus HG per vas, pedem, corpus &
os speculatoris, cui cornu K sit af-
ferruminatum.
Etenim laxato epistomio L, aqua ex
vase AB per tubum EF descendit,
& ingenti celeritate aërem ex vase CD
per tubum HG expellit, qui dum per
cornu egreditur eundem sonum parit,
qui aëre in cornu inflato audiretur.

SCHOLION I.

174. Simili artificio sonos alios produces. KIRCHERUS (a) cantum singularum fere avicularum notis musicis exprimere, & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerptit SCHOTTUS (b) quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.

SCHOLION II.

175. Huc referenda quoque sunt Organa Hydraulica jam veteribus nota & a VITRUVIO (c) descripta, a PERRALTIO in notis schematismo nitido egregie illustrata: de quibus, cum non amplius in usu sint, hic dicere non attinet.

PROBLEMA XLVII.

176. Ventum excitare ad flammam conservandam aptum.

RESOLUTIO.

- Tab. 1. Ad basin dolii superiores AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut sex pedum, amplitudo VII. ca, ut tota aqua continuo affluente repleatur. Fig. 71.
2. Tubus EC hinc inde instruendus est tubulis F, aut, si mavis, foraminulis, ut ab aqua descendente aer una in dolium abripiatur.
3. In basi inferiori CG, e regione luminis E, sita sit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.
4. In G aptetur tubus I angustior eo per quem aqua delabitur, ut delapsa ex dolio iterum effluat.
5. Denique in H sit tubus ad eum locum protensus, quo ventus spirare debet.

(a) Musurgia lib. 9. part. 5.

(b) In Magia Universali Naturæ & Artis, Part. 2. lib. 6.

(c) Lib. 10. c. 13. f. m. 325.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac dispergitur, aer ingenti impetu per tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide spirantem (§. 166 Aërom.).

SCHOLION I.

177. Franciscus Tertius DE LANIS (d) autor est, se vidisse hoc artificio ventum majorem fuisse excitatum, quam qui foliibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.

SCHOLION II.

178. Enimvero opus non est, ut tubus CE sit rotundus & vas ABCG figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, ex. gr. quadrata fieri potest. Unde quidam, loco Dolii, cameram ex lateribus construunt. Opera tantummodo danda, ne aer ex vase ABCG ullibi, quam per tubum H erumpere possit.

SCHOLION III.

179. Succedit etiam artificio, si nullum adfit dolium; sed aqua per tubum quadratum AB nullis spiraculis instructum tantum delabatur, ad quem aptatus sit tubus GH, unde ventus spirat. Quod si usus postulaverit ut ventus interrumpatur; obturato orificio H, aperiat aliud I vento exitum concedens. Tab. VII. Fig. 72.

PROBLEMA XLVIII.

180. Duo vasa construere, quorum unum, utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, nisi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ Vasa concordia vocantur.

RESOLUTIO.

1. Sint AB & CD duo Vasa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter se communicent. Tab. VII. Fig. 73.

Aaa 2

2. In

(d) In Magisterio Naturæ ac Artis, lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

Tab. 2. In utroque vase aptetur ad fundum
VII. diabetes (§. 72), ita ut orificium
Fig. 73. tubi minoris I sit infra orificia E & H
tubi recurvi EFGH.

Quodsi vas AB vino repleatur, donec
lumen I sit in libella ejus; nihil effluet
(§. 72). Sed si vas alterum CD aqua
adimpleas totum; per tubum EFGH
vas alterum AB ingreditur (§. 34 *Hy-*
drost.), & quantitatem liquoris ibidem
auget. Quare cum jam utrinque li-
quor ultra orificium I ascendat; per M
omnis aqua ex vase CD, per L vero
vinum omne ex vase AB effluet (§.
72). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLIX.

181. *Vas construere, quod tantum
vini effundit, quantum aquæ infunderis.*

RESOLUTIO.

- Tab. 1. Fiat Vas ADBC in duas cavitates;
VII. per diaphragma GF divisum, & un-
Fig. 74. diquaque contra accessum aëris pro-
be munitum.
2. Operculo AC afferruminetur tubu-
lus HI per cavitatem unam GB ad
fundum fere vasis CB pertingens.
 3. Cavitates duæ inter se communicent
tubo recurvo LFK;
 4. Denique cavitati alteri immittatur
tubulus NM, & utraque cavitas in-
struatur foramine cochlea munito,
ut, si opus fuerit, liquor infundi &
rursus effundi possit.

Quodsi enim cavitatem AF vino re-
pleas, nihil infusi per MN effluet (§.
34 *Hydrost.*). Enimvero si per tu-
bulum HI aquam cavitati alteri affun-

das; aër per tubum KFL in cavitatem Tab.
alteram propellitur, adeoque vinum VII.
per tubum MN expellit. Fig. 74.

PROBLEMA L.

182. *Vas construere, quod liquorem
excipit donec fuerit plenum, si constan-
ter eum affuderis; sed ne guttam amplius
admittit, ubi semel cessaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in duas Tab.
cavitates ACD & CDB dividatur, VII.
quarum superior aperta esse potest. Fig. 75.
2. Ad diaphragma in cavitate superio-
re AD aptetur diabetes GF: sub
diaphragmate autem in cavitatem
inferiorem hiet tubulus H.

Quodsi aquam constanter affundas, ea
per diabetem GF defluet in cavitatem
inferiorem BCD, aëremque per tubu-
lum H expellet (§. 72). Sed si ali-
quamdiu desistas, aër tubum longio-
rem diabetæ replebit, excepta parte
FE aquæ immersa. Nihil ergo amplius
per tubum istum in cavitatem BCD
defluet.

PROBLEMA LI.

183. *Vas construere, ex quo per idem
orificium, vel aqua, vel vinum fluit,
prout desideraveris, vel etiam mixtum
ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in Tab.
duas cavitates divisum. VII.
2. In operculo vasis AE fiant duo fo- Fig. 76.
ramina F & G, per quæ aëri in
utramque cavitatem aditus patet.

3. In

Tab. VII. Fig. 76. 3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB descendere possunt.

4. Ex tertia hac cavitate procedat tubulus M.

Quodsi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini ces-

sabit; fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodsi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

SCHOLIION.

184. Ex his principiis innumera alia derivare licet.

CAPUT VI.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIO VI.

185. **A**lveus Fluminis est cavitas in superficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO VII.

186. *Alveus naturalis* est, qui a natura effectus est. *Alveus vero artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLIION.

187. *Istiusmodi alveos artificiales* parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas (§. 924 Mech.). Germanico idiomate *alveus naturalis* der Wilde Bach, *alveus autem artificialis* der Muhlgraben appellatur.

DEFINITIO VIII.

188. *Sectio alvei* est planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur.

SCHOLIION.

189. Ponamus aquam intra alveum totam subito abire in glaciem, & secari plano ad fundum alvei perpendiculari. Quæ hinc prodit sectio, erit ea quæ nobis h'c sectio alvei vocatur.

DEFINITIO IX.

190. *Sectio naturalis* est sectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* sectio alvei artificialis.

SCHOLIION.

191. *Definitio adeo sectionis Fluminis, quam dedimus cum de molendinis ageremus* (§. 913 Mech.), est *sectionis artificialis*, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.

COROLLARIUM I.

192. Quoniam constat alveos naturales figuram habere prorsus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commodè reduci nequit; sectio naturalis figura plana irregularis est.

COROLLARIUM II.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedum habent; sectio artificialis est rectangulum parallelogrammum (§. 162 Geom.).

SCHOLIION.

194. *Qualis figura sit sectio artificialis jam ostendimus alibi*, (§. 914 Mech.). Potest vero figura quæcunque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus basis latitudini fluminis æqualis. Unde in sequentibus per sectionem intelligemus rectangulum, cujus

latitudo eadem cum latitudine fluminis, nisi res ipsa loquatur posse quamcumque sectionem supponi.

DEFINITIO X.

195. *Sectiones dicuntur aque veloces, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero sit velocitas seu celeritas media, commodius docebitur deinceps.*

DEFINITIO XI.

196. *Sectio velocior est, per quam aqua celerior fluit; Sectio tardior, per quam fluit tardior.*

DEFINITIO XII.

197. *Flumina in statu manente sunt, si superficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, sed eadem manet in eodem loco profunditas.*

SCHOLION.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi sit profundius, alibi minus profundum.*

DEFINITIO XIII.

199. *Flumen intumescit, si superficies aquæ intra alveum attollitur; desumescit, si eadem deprimitur.*

THEOREMA XXVIII.

200. *Aqua libere fluentis in alveo declivi cursus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter pressionem quam inferior sustinet a superiori.*

DEMONSTRATIO.

Aqua enim fluidum grave est & quidem gravitatis eximiæ (§. 64 *Hydrost.*). Sed gravia per declivia, seu ad horizontem inclinata, motu accelerato deorsum ruunt (§. 284 *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu acce-

lerato ruere debet, atque adeo cursus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem assurgit; inferiori incumbit superior. Enimvero motus aquæ, ob pressionem quam à superiore sustinet, perinde ac cadendo per aliquam altitudinem acceleratur (§. 48). Ergo cursus fluminis acceleratur quoque per pressionem quam aqua inferior a superiore sustinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

201. Quo declivior adeo fundus alvei est, eo celerius aqua per eundem decurrit.

COROLLARIUM II.

202. Quo profundior aquæ in alveo horizontali altitudo est, ad quam intra alveum assurgit, eo celerior cursus fluminis.

COROLLARIUM III.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur quam ab eo remotior; quo fundo propior, eo cursus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM IV.

204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquisita est ut Tab. VII. radix altitudinis AD (§. 288 *Mechan.*); Fig. 77. aqua etiam, si libere fluit per canalem declivem AB, in B eandem celeritatem acquirere debet quæ est ut radix altitudinis AD.

COROLLARIUM V.

205. Quod si aqua per foramen B egrederetur ex vase in quo ad altitudinem BF ipsi AD æqualem consisteret; ejus quoque celeritas esset ut radix altitudinis BF sive AD (§. 48). Aqua igitur per canalē inclinati sectionem eadem velocitate movetur, ac si fluere ex vase per lumen sectioni

con-

congruens a superficie aquæ tantundem remotum, quantum sectio ab horizontali per initium canalis ducta distat.

THEOREMA XXIX.

206. *In qualibet sectione canalis inclinati, celeritas aquæ libere fluentis major est in fundo quam in superficie.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Ducatur per originem canalis A lineæ horizontalis AE, sitque sectio, per Fig. 77. quam aqua fluit BC, quæ est ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipsi DB parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230 Geom.) & $FG = EC$ (§. 238 Geom.); consequenter $FB > FG$ vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea est quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB haberet (§. 303 Mechan.), Major igitur celeritas in B quam in C (§. cit.). Q. e. d.

SCHOLION.

207. Sequitur ex iis quæ demonstrata sunt, fluminis cursum continuo celeriores fieri debere, quo longius juxta fluvium progredieris: id quod tamen experientia parum convenire videtur. Tenendum itaque, & ripas, & fundi inæqualitates causari resistentias, per quas celeritas continuo imminuitur, immo modo acquisita rursus extinguitur. Sed de his impedimentis accidentalibus nostrum jam non est dicere. Id tantummodo inculcandum esse censemus, cum declivitas fundi exigua sit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam esse; cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad descensum impediatur (§. 261 Mech.).

DEFINITIO XIV.

208. Per *celeritatem*, seu *velocitatem mediam*, intelligo eam quasi aqua flueret omnis per sectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. Hinc intelligitur, cur sectiones æqueveloces definiverimus per eas per quas aqua eadem celeritate media fluit (§. 195). Quoniam enim aqua inferior celerior fluit superiori ob diversam pressionem, & fundi declivitas diversa diversæ quoque celeritatis causa est; per sectiones eadem celeritate variabili non fluit aqua, nisi eadem & æquales, & similes fuerint, adeoque Theoremata de sectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem quam habere possunt, nisi variabilis celeritas ad mediam quandam constantem reduceretur.

THEOREMA XXX.

210. Per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.

DEMONSTRATIO.

Per sectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195). Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per sectionem fluat, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208), & sectiones æquales sint per hypoth. per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt. Q. e. d.

COROLLARIUM II.

211. Quodsi ergo sectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris

joris æquetur (§. 20 *Arithm.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem: consequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM II.

212. Et quoniam per sectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplam quadrupla aquæ quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210); Quantitates aquarum per æqueveloces sectiones fluentes eodem tempore sunt inter se ut sectiones.

THEOREMA XXXI.

213. *Per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates media.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ sectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate qua fluit per A. Concipiatur sectio infinite parvæ crassitie, & huic respondens aqua transeat tempusculo infinite parvo per sectionem A. Quoniam celeritas media in sectione B dupla est *per hypoth.* dum aqua a sectione A distat intervallo crassitie isti respondente, altera a B duplo istiusmodi intervallo distare debet (§. 33 *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ, tempusculo infinite parvo eodem, fluit per sectionem B. Jam cum tempus quodcunque in istiusmodi tempuscula æqualia resolvi possit, & singulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonstrata*; evidens est quod, omnibus istis tempusculis simul sumtis, hoc est dato quocunque tempore, aquæ per sectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum qua-

cunque; per sectiones æquales eodem tempore fluentes æquæ sunt ut velocitates media. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

214. *Si sectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes sunt in ratione composita sectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per sectionem S, celeritate media C, quantitas aquæ Q; & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque sectionem *s*, alia quacunque celeritate *c*, quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per sectionem S, celeritate *c*, quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per sectiones inæquales *s* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eadem in ratione sectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales sectiones S, diversa celeritate C & *c* fluunt; erunt eadem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus adeo $Qm = SC : sc$ (§. 213 *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : sc$ (§. 181 *Arithm.*): consequenter quantitates aquarum Q & *q*, per sectiones inæquales nec æqueveloces, fluentes sunt in ratione composita sectionum S & *s* atque celeritatum mediarum C & *c* (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

215. Si $Q = q$, erit $SC = sc$, adeoque $S : s = c : C$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si eodem tempore quantitas aquarum per inæqua-

inæquales sectiones diversa celeritate media fluunt, erunt sectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM II.

216. Quodsi præterea fuerit $S = f$, erit etiam $C = c$, adeoque si quantitates aquarum eadem per æquales sectiones fluunt; celeritas media eadem est: consequenter sectiones æqueveloces sunt (§. 195).

COROLLARIUM III.

217. Quodsi ponatur $C = c$; erit etiam $S = f$, adeoque si celeritas media eadem, & quantitates aquarum eodem tempore per utramque sectionem fluentes æquales; consequenter si sectiones æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fundunt (§. 195); æquales sunt.

COROLLARIUM IV.

218. Quoniam $Q: q = SC: sc$ (§. 214); erit $qSC = Qsc$ (§. 297 *Arithm.*) & hinc $C: c = Qf: qS$ (§. 299 *Arithm.*) hoc est, celeritates mediæ sunt in ratione composita ex reciproca sectionum & directâ quantitatum aquarum quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA XXXIII.

Tab. VIII. Fig. 78. 219. Si fluvius fuerit in statu manente; per omnes sectiones quomodocunque inæquales AB, CD, EF, GH aqua eadem quantitas eodem tempore fluit.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per sectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere quam per sectionem AB; inter sectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, adeoque fluvius in alvei ABCD parte continuo intumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197). Hoc cum sit contra hypothesein, aquæ per sectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Ponamus ex adverso per sectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, adeoque fluvius in parte alvei ABCD continuo detumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197) *contra hypothesein*. Aquæ igitur per sectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Quoniam itaque, per sectionem inferiorem aliquam nec minor nec major quantitas fluere potest, quam per superiorem quamcunque; per omnes omnino sectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

220. Quoniam sectiones AB, CD, EF, GH inæquales sunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per singulas fluunt; aqua per sectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

COROLLARIUM II.

221. Flumen igitur coarctando, aquæ celeritas augetur: consequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altius assurgere (§. 205), adeoque fluvius intumescere debet (§. 199).

B b b

COROL.

Tab. VIII. Fig. 78.

COROLLARIUM III.

222. Ex adverso, flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur : consequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aquæ ibidem altitudo imminui (§. 205), adeoque fluvius detumescere debet (§. 199).

COROLLARIUM IV.

223. Quoniam in quibuscunque fluvii sectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§. 219), sectiones vero inæquales sunt *per hypoth.* celeritates mediæ in duabus quibuscunque fluminis sectionibus sunt ut sectiones reciproce (§. 215).

SCHOLION.

224. Quæ Corollariis tribus prioribus continentur, experientiæ consona sunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorē esse, ubi minor est fluvii latitudo : ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, nisi forsan ex accidente adsit quædam vorago. Usu quoque in praxi receptum est, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.

THEOREMA XXXIV.

225. Si fluvius intumescit ; aqua fluens per quamlibet sectionem dato quodam tempore est ad aquam quæ ante intumescētiā ibidem fluxerat, in ratione composita sectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad sectionem & celeritatem mediā pristinā.

DEMONSTRATIO.

Dum enim fluvius intumescit, aqua intra alveum fit altior, consequenter non modo sectio, verum etiam celeritas mediā (§. 199, 205) augetur. Nova igitur sectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam pristinā. Quoniam vero sectio major

jam facta & pristina spectari possunt instar sectionum duorum fluminum, per quas aqua diversa celeritate fluit ; cum fluvius intumescens a seipso differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, sed ejusdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit ; aqua fluens per sectionem auctā celeritate mediā auctā, erit ad aquam fluentem æquali tempore per sectionem pristinā celeritate pristina, in ratione composita sectionis auctæ ad sectionem pristinā, & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediā pristinā. (§. 214).

Q. e. d.

COROLLARIUM I.

226. Erit adeo augmentum aquæ fluentis ad aquam pristinā æquali tempore fluentem, ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in sectiones ad factum ex sectione pristina in celeritatem (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

227. Quodsi sectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit ; cum parallelogramma ejusdem basis altitudinum rationem habeant (§. 389 *Geom.*), augmentum aquæ fluentis post intumescētiā erit ad aquam fluentem ante eandem, ut differentia factorum ex altitudine aquæ auctæ in celeritatem mediā auctā & ex altitudine pristina in celeritatem pristinā ad factum posterius ; id quod in alveo artificiali semper locum habet (§. 193).

SCHOLION.

228. Quando de altitudinibus sectionum vel aquæ in alveo fuerit sermo, per eam intelligitur ea perpendiculi a superficie aquæ infundum demissi pars per quam aqua continuo fluit, ita ut, si fluxus omnis protinus cessare ponatur, nulla aqua in defluentis locum succedente, nihil prorsus aquæ in ea remanere in-

telligi-

telligatur. Etenim aquæ in cavitatibus fundi stagnantis nullam in fluxu habenda ratio est, cum perinde sit ac si prorsus abesset, fundo plano existente. Vulgo Autores, qui de aquis currentibus scripsere, perpendicularum istud per quod aqua fluit, Altitudinem vivam vocare solent, quod sit altitudo aquæ viæ: aqua enim currens ad differentiam stagnantis viva appellari solet (§. 10 Mech.).

THEOREMA XXXV.

Tab. VIII. 229. Si fuerit AB canalis declivis, & BC altitudo sectionis continuetur do- Fig. 79. nec lineæ horizontali AL per initium ejus A ducta ubi superficies aquæ canalem secat in L occurrat, & circa axem LB describatur Parabola quæcunque LGH; semiordinata CG exponet celeritatem aquæ in C, BH celeritatem fundo proximam, & semiordinatæ intermediae inter CG & BH celeritates quæcunque in perpendiculari BC inter C & B intermedias.

DEMONSTRATIO.

Celeritas enim aquarum in C & B sunt in ratione subduplicata rectarum EC & FB (§. 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL per hypoth. erit CE ipsi BF parallela (§. 256 Geom.). Quamobrem cum sit $LC:LB = CE:BF$ (§. 268 Geom.); celeritas in C & B etiam in ratione subduplicata rectarum CL & LB existunt (§. 124 Anal. fin. & §. 156 Arithm.). Enimvero semiordinatæ Parabolæ CG & BH sunt itidem in ratione subduplicata rectarum CL & BL (§. 402 Analys. fin.). Ergo etiam celeritates in C & B sunt ut semiordinatæ CG & BH (§. 156 Arithm.), adeoque semiordinatæ CG

& BH celeritates in C & B exponunt. Tab. VIII. Et quoniam de singulis semiordinatis intermediis idem eodem modo constat; Fig. 79. semiordinatæ quoque intermediae celeritates intermedias exponunt. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

230. Si ergo BC fuerit perpendicularum sectionis fluminis; spatium Parabolicum CGHB est complexus omnium velocitatum istius sectionis.

COROLLARIUM II.

231. Quoniam $CG^2: BH^2 = CL: BL$ (§. 402 Anal. fin.), adeoque $BH^2 - CG^2: BH^2 = BC: BL$ (§. 193 Arithm.); sunt vero celeritates aquæ in B & C, ut BH ad CG, perpendiculari sectionis existente CB (§. 229); datis celeritatum in C & B ratione, ac altitudine sectionis BC, inveniri potest axis Parabolæ BL.

COROLLARIUM III.

232. Cum ducta IG ipsi BC parallela sit $CG = BI$ (§. 238 Geom.), adeoque IH differentia semiordinatarum CG & BH, consequenter ut BC ad HI ita $CG + BH$ ad parametrum (§. 404 Anal. fin.); datis CG & BH in eadem mensura qua datur perpendicularum sectionis BC, in eandem quoque mensura reperietur parameter parabolæ mensurantis celeritates & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA LII.

233. Dato angulo inclinationis alvei seu canalibus ABD, una cum altitudine seu perpendicularo sectionis BC, & celeritatum in C & B ratione; invenire distantiam fundi ab horizontali AL per initium alvei ducta, atque distantiam AF ab initio alvei, una cum hujus longitudine BA.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

- Tab. VIII. Fig. 79. 1. Quoniam BD parallela ipsi AL *per hypoth.* angulus BAL angulo inclinationis ABD æqualis est (§. 233 *Geom.*). Et quoniam rectus ABL recto FBD æqualis; dempto communi ABF; erit FBL angulo inclinationis ABD æqualis (§. 91 *Arithm.*). Dantur itaque in triangulo BFL, præter rectum ad F, anguli obliqui FBL & FLB, itemque in triangulo ABF præter rectum ad F obliqui BAF & FBA.
2. Ex datis CG & BH, una cum BC, inveniatur axis seu altitudo Parabolæ BL (§. 231). Unde porro.
3. calculo trigonometrico definietur recta BF (§. 36 *Trigon.*) & hinc tandem
4. recta AF, atque AB (§. cit. *Trig.*).

THEOREMA XXXVI.

234. Si semiordinata Parabola mensurantis celeritates aquæ intra minutum secundum seu tempus quodcunque datum per perpendicularum sectionis fluentis CG & BH sint æquales spatiis quæ aqua per extrema perpendiculari sectionis BC fluens dato tempore describit, & in partibus hujus assignentur; spatium Parabolicum BCGH definiet quantitatem aquæ per sectionis perpendicularum BC tempore isto fluentem.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur perpendicularum sectionis BC divisum in particulas infinite parvas; quæ designabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC constitutas. Quoniam vero semiordi-

natæ ad BC applicatæ sunt æquales spatii, intra tempus datum veluti minutum secundum, descriptis ab iisdem particulis aquæ; arcus Parabolicus GH terminabit omnem aquam quæ initio hujus temporis in BC constituebatur: consequenter spatium BCGH definit quantitatem aquæ per perpendicularum BC intervallo unius minuti secundi fluentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

235. Quoniam spatium parabolicum $GCL = \frac{2}{3} LC$. CG & BLH $= \frac{2}{3} BL$. BH (§. 104 *Anal. infin.*), BCGH vero illorum spatiorum differentia; si ex datis spatiis, quæ aqua per extrema perpendiculari sectionis fluens intra tempus datum describit, quæatur axis parabolæ (§. 231); quantitas aquæ intra tempus datum per perpendicularum fluens determinari potest.

COROLLARIUM II.

236. Quoniam in sectione artificiali perpendiculara omnia æqualia sunt (§. 193); aqua fluens per totam sectionem reperitur, si quantitas fluentis per perpendicularum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri possit (§. 235); etiam quantitas per totam sectionem artificialem fluens definiri potest.

DEFINITIO XV.

237. Velocitates aquæ transeuntis per extrema C & B perpendiculari sectionis dico brevitatis gratia *celeritates terminales*. Dantur autem celeritates terminales per spatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C describit.

PROBLEMA LIII.

238. Datis celeritatibus terminalibus; una cum perpendiculo sectionis; invenire celeritatem mediam.

RESOLUTIO.

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 79. 1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis, investigetur quantitas aquæ per perpendiculum istud tempore dato fluens (§. 235).

2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendiculum sectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculi sectionis. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis investigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendiculum istud BC fluens, spatium parabolicum BCGH prodit (§. 234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fuit eodem tempore, quæ variabili fuit (§. 208); & ob celeritatem eandem in singulis perpendiculi partibus, etiam infinite parvis (§. cit.), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendiculum sectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media basis, æquatur spatio parabolico BCGH. Quamobrem si area spatii hujus parabolici dividatur per perpendiculum sectionis BC; prodibit celeritas media quæsitæ (§. 375 Geom.). *Q. e. d.*

PROBLEMA LIV.

239. Datis celeritatibus terminalibus CG & BH, una cum sectionis perpendiculo LC; punctum K in eodem definire per quod aqua celeritate media fluit.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quærat celeritas media (§. 238) Tab. VIII. Fig. 79.
2. Ex semiordinata Parabolæ velocitates exhibentis BH quæ maximam celeritatem repræsentat, resecetur recta BM mediæ æqualis.
3. In M erigatur perpendicularis MO secans Parabolam in O.
4. Denique ex puncto O demittatur perpendicularis ad axem Parabolæ OK, quæ erit semiordinata puncto O respondens (§. 370 Anal. fin.): atque adeo BK est distantia puncti perpendiculi a fundo, in quo aqua celeritate media movetur.
5. Hinc porro calculo definitur profunditas puncti K, in quo aqua movetur celeritate media, inferendo (§. 404 Anal. fin.) ut parameter quam ex datis reperire licet (§. 232) ad aggregatum ex celeritate minima CG & media KO, ita harum celeritatum differentia MI ad profunditatem quæsitam KC.

PROBLEMA LV.

240. Data longitudine canalis inclinati AB, una cum angulo inclinationis BAF, & perpendiculo sectionis BC; invenire celeritates terminales, atque mediam, una cum axe Parabolæ celeritates mensurantis BL, & verticis L ab initio canalis A distantia.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB, & angulo inclinationis BAF, invenitur in triangulo ABF distantia fundi ab horizontali BF, & in

Tab. VIII. Fig. 79. triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188), distantia verticis Parabolæ ab initio canalıs AL, una cum axe Parabolæ BL (§. 36 Trigon.).

2. Subducta altitudine sectionis BC ab axe Parabolæ BL modo invento, relinquatur CL. Unde datis abscissis LC & LB reperitur semiordinatarum CG & BH ratio (§. 402 Anal. fin.); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque
3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri potest (§. 238).

AXIOMA I.

241. *Eadem vi, uno eodemque momento, duplex motus produci nequit.*

Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe si simul agat in B & C, pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito absurdum habetur.

SCHOLION.

242. *Veritas hujus Axiomatis per Experimenta Hydrostatica confirmatur. Etenim corpus grave in fluido specificè leviori descendit excessu ponderis sui supra pondus fluidi mole æqualis (§. 88 Hydrost.); quod vim gravitatis reliquam impendat in pressionem fluidi motui resistentis (§. 114 Hydrost.), Experimentorum consensu. Vis igitur qua fluidum subiectum premitur, non simul impenditur in descensum; nec vis qua motus descendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam subiectam.*

THEOREMA XXXVII.

243. *Aquæ per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob pressionem quam inferior a superiori sustinet.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob pressionem quam inferior a superiori sustinet, ita ut inferior celerior moveatur quam vi descensus per declive acquisivit (§. 284 Mech.). Quoniam motus per declive descendentis acceleratur gravitate respectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§. 261 Mech.); aut vis illa, qua agitur in planum inclinatum simul impendi deberet ad descensum, aut vis qua acceleratur motus descendentis simul impendenda esset pressioni aquæ subiectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, seu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod absurdum (§. 241). Q. e. d.

SCHOLION I.

244. *Alii ita adstruunt veritatem Propositionis præsentis. Si aqua in B omnem habet celeritatem quam descensu per planum inclinatum AB acquisivit, ea est, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino A ad eandem horizontalem DB, nempe per altitudinem AD vel BF acquisivisset (§. 303 Mech.). Ponamus jam aqua B motum quoque accelerari ob altitudinem incumbentis superioris: erit ergo major celeritas ea quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc absurdum existimant, cum fluxus aquæ sit effectus gravitatis quæ in descensum*

Tab. VIII. Fig. 79.

sum perpendicularem tota insumitur. Sed evidentia hujus demonstrationis pendet ab Axiomate nostro. Tacite enim supponitur in descensu perpendiculari nullum esse effectum aquæ superioris in inferiorem, sed quamlibet aquæ guttam ita accelerari ac si sola descenderet in medio non resistente. Id vero recte supponi, ex eo intelligitur quod vis quæ ad accelerandum motum guttæ superioris impenditur, non una impendi possit in pressionem qua inferioris guttæ acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua superior vel quiescit, vel lente admodum descendit, inferioris motu per foramen accelerato. Hic enim vis quæ ad motum per pressionem accelerandum impenditur, non una consumitur in descensu prementis.

SCHOLIUM II.

245. Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur quam in superficie; propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in superficie & in fundo; major vero cum ibidem sit resistentia quam prope superficiem, magis quoque retardetur.

SCHOLIUM III.

246. Inprimis autem notandum est, quod MARIOTTUS (a) annotavit aquam in alveo naturali fluminis, ob eam quam patitur resistentiam (§. 207) brevi temporis spatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro infert, si declivitas alvei imminuatur, celeritatem denuo successive, sed brevi temporis spatio imminui, ut per istam alvei partem lentius fluat aqua quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari possit, ut in sequente alvei parte aqua celerius fluat quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diversis alvei naturalis partibus diversa sit aquæ fluentis celeritas.

(a) *Traité du mouvement des Eaux*, Part. 4. disc. 4. p. 430. Oper.

SCHOLIUM IV.

247. Nulla in hoc difficultas posita est, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo (§. 221), Experientia suffragante (§. 224). Etenim tum initium canalís, ob altitudinem aquæ auctam cui pars alvei naturalis respondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalís inclinati A Tab. VIII. ibi statuitur, ubi planum inclinatum ejusdem BA concurrit cum superficie aquæ AC, Fig. 79. quemadmodum ex Demonstrationibus anterioribus intelligitur; ut determinari possit descensus perpendicularis EC aquæ in superficie. Etenim aqua in C dici nequit descendisse intervallo EC, nisi aliquo tempore fuerit in A. Sed idem mox ostendemus apertius (§. 249).

SCHOLIUM V.

248. Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque assumi posse aquam per perpendicularum sectionis eadem celeritate moveri; non tamen assumere licet quod per totam sectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem resistentiam tardior esse soleat quam in medio. Quodsi istiusmodi canales inclinati, quales in Theorematis antecedentibus supponimus, essent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret sine ulla immutatione.

THEOREMA XXXVIII.

249. Si in canale inclinato AB sectionio BC obstruatur, ut aqua nonnisi Tab. VIII. per partem BI fluere possit; aqua in- Fig. 80. tumescet & ad statum manentem redacta celerius fluet per sectionem BI quam ante; initio canalís G ultra priorem A promoto.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 80. Etenim dum sectio BC ex parte obstruitur, per partem residuam apertam BI pristina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit quæ ad sectionem BC nondum obstructam ferebatur; necesse est aliquid ejus continuo remanere, adeoque altitudinem fieri majorem, consequenter aqua intumescit (§. 199). *Quod erat primum.*

Enimvero quando ad statum manentem reducitur, non amplius intumescit (§. 197), adeoque per sectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Necesse igitur est ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat secundum.*

Jam dum aquæ superficies AC attollitur in OG, *vi num. 1.* evidens est, quod ea canalem BA non amplius in A, sed in G secet. Initium adeo canalisis G ultra terminum pristinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

250. Quoniam ibi vertex Parabolæ FKE, ubi sectionis perpendiculum BI productum horizontalem GF per initium canalisis declivis AB secat, & semiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores sunt rectis BD & IL, quæ ante intumescentiam aquæ seu obstructionem sectionis easdem in iisdem punctis exponent (§. 249); Parabola FKE quæ metitur celeritates in perpendiculo IB majoris amplitudinis est, quam altera HLD quæ metitur velocitates in perpendiculo majorem sectionis BC.

COROLLARIUM II.

251. Quodsi impedimentum quo obstruitur sectio fuerit minor IO, veluti IN; Tab. VIII. Fig. 80. aqua ad O usque intumescere nequit, adeoque per NO supra impedimentum effluit.

COROLLARIUM III.

252. Celeritas aucta aquæ per sectionem minorem fluentis BI, in B ea est quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas pristina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquisivisset (§. 303 Mech.). Quare cum celeritates per BN & BM acquisitæ sint in ratione subduplicata rectarum BN & BM (§. 87 Mech.); erit celeritas aucta in B ad celeritatem pristinam, ut radix rectæ BM ad radicem alterius BN.

THEOREMA XXXIX.

253. Aqua per sectionem canalisis horizontalis eodem modo fluit, qua fluit ex vase pleno cujus eadem quæ sectionis altitudo.

DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali cum nulla sit declivitas, aqua non fluit nisi quatenus sustinet pressionem inferiora superiori. Ex vase aqua pleno per foramen similiter fluit aqua vi pressionis ejusdem; quod utrumque per se manifestum est. Quodsi ergo lumen vasis sit sectioni canalisis æquale ac simile, & altitudo fluidi utrobique eadem sit; cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adest diversitatis ratio. Quamobrem aqua per sectionem canalisis horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vase pleno, cujus eadem quæ sectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

254. Sane si canalem horizontalem tegas quodam operimento, convenit is cum vase pleno, cujus eadem quæ sectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo quæ ante: consequenter pressio ab eadem pendens nullo modo varietur.

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 255. In sectionis adeo perpendiculo BC canalis horizontalis AB, quodlibet punctum, D, E, vel B eandem celeritatem habet quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis; nimirum aqua in B habet celeritatem quam acquisivisset cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset; & similiter aqua in D celeritatem habet quæ cadendo per altitudinem DC acquiritur.

COROLLARIUM II.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC, (§. 86 *Mechan.*), seu celeritates ipsæ in ratione subduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87 *Mechan.*).

COROLLARIUM III.

257. Quare si circa altitudinem sectionis BC describatur Parabola CFGH; exponent semiordinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, C (§. præc. & §. 402 *Anal. fin.*).

COROLLARIUM IV.

258. Quodsi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi sectionis BC determinetur; spatium parabolicum BCH quantitatem aquæ exhibet quæ eodem tempore per sectionem fluit quo aqua per B fluens describit spatium BH; id quod eodem modo patet, quo supra idem in canale inclinato evicimus (§. 234).

COROLLARIUM V.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

perpendiculum BC, eo tempore quo aqua Tab. per B fluens ex B in H progreditur, est VIII. æqualis rectangulo ex BH in duas tertias Fig. 81. partes altitudinis sectionis BC, vel ex BC in $\frac{2}{3}$ BH (§. 104 *Anal. infin.*); consequenter in ratione composita ex ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium.

SCHOLIUM II.

260. Hinc jam porro eodem quo supra modo determinantur alia fluxum aquæ in canali horizontali concernentia.

SCHOLIUM III.

261. Resistentias quas patitur cursus fluminis, cum ab obstaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.

SCHOLIUM IV.

262. Ceterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta sunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vasorum lateribus insculpta applicari possunt atque solent (§. 48).

THEOREMA XL.

263. Si aqua per canalem horizontalem fluit; celeritas media est ad maximam ut 2 ad 3.

DEMONSTRATIO.

Aquæ enim quantitas est ut $\frac{2}{3}$ BH.BC (§. 259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum fluentis, si $BI = \frac{2}{3} BH$ (§. 375 *Geom.*); eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, si per singula puncta eadem celeritate BI moveatur. Est igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero $BI = \frac{2}{3} BH$ per demonstrata. Ergo $BI : BH = \frac{2}{3}$. $1 = 2 : 3$ (§. 178 *Arithm.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 264. Quoniam aucta altitudine sectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine sectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM II.

265. Similiter quia imminuta altitudine sectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine sectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM III.

266. Si ex semiordinata maxima Parabolæ celeritates aquæ per sectionem canalis horizontalis fluentis BH resecetur BI $= \frac{2}{3}$ BH, & super BI construatur rectangulum CBIM, cujus latus IM Parabolam in K secatur; demisso ex K in altitudinem BC perpendiculari KL, erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM IV.

267. Quodsi jam porro inferatur, ut Tab. VIII. Fig. 81. quadratum spatii BH, quod aqua celeritate maxima fluens dato tempore emittitur, ad quadratum spatii LK quod celeritate media describit eodem tempore, ita altitudo sectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L per quod aqua celeritate media fluit infra superficiem aquæ LC (§. 402 Anal. fin.).

SCHOLION.

268. Punctum istud a nonnullis Centrum velocitatis appellari solet; quia velocitas ipsi conveniens in locum omnium velocitatum inæqualium assumi potest.

CAPUT VII.

De Percussione Fluidorum.

DEFINITIO XVI.

269. **P**ercussio fluidi est actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus, sive fluidum sive solidum, impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum est alias (§. 523, 526 *Mechan.*).

COROLLARIUM I.

270. Quoniam percussio dato aliquo tempore absolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu sunt; tota illa quantitas impingit, adeoque corpus percutit quæ tempore isto affluit, ac ideo percussio fluidorum successiva est.

SCHOLION.

271. Fluida nempe considerata veniunt instar multitudinis globulorum, quorum diversa series sibi mutuo succedentes in corpus quod percutitur impingunt. Ut adeo appareat pro diversa densitate variari globulorum simul incurrentium, pro diversa celeritate serierum sibi invicem succedentium numerum.

COROLLARIUM II.

272. Quoniam plus massæ simul impingit, si fluidum fuerit densius, quam si fuerit rarius; plus autem massæ in densiore sub eodem volumine contineatur quam in rariore (§. 8, 10 *Hydrost.*); in percussione fluidorum habenda est ratio densita-

densitatis fluidi, seu cæteris paribus major fit percussio a fluido densiori quam a rariori.

COROLLARIUM III.

273. Quoniam dato tempore quo percussio successiva absolvitur, plus massæ in corpus percussum incurrit, si fluidum aliquod celerius, quam si tardius moveatur; in determinanda massa percutientis non solum densitatis, (§. 272), verum etiam celeritatis ratio habenda; seu, densitate existente eadem, major est massa percutientis si fluidum celerius moveatur quam si tardius; massæ scilicet in ratione celeritatum sunt.

COROLLARIUM IV.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum est, utpote cujus actio non nisi in nisu quodam sese exerente consistit (§. 9 *Mechan.*), istiusmodi autem vires, massa existente eadem, in ratione celeritatum sunt (§. 280 *Mechan.*) in moleculis quoque simul incurrentibus major est vis percutiendi, si fluidum aliquod celerius movetur quam si movetur tardius.

SCHOLIUM.

275. Patet adeo celeritatem fluidi bis spectandam esse in percussione: nimirum primo in determinanda massæ multitudine quæ agit in corpus percussum, & secundo in determinando gradu quem vis a motu habet.

DEFINITIO XVII.

276. Si fluida in duo plana, vel directe, vel sub eodem angulo obliquo incurrunt; eodem modo incurrere dicuntur.

SCHOLIUM.

277. Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt; quia in percussione spectatur potissimum vis percutientis, quæ non modo a directione impingentis, verum etiam a massa & celeritate pendet.

AXIOMA II.

278. Si idem fluidum, eadem celeritate, eodem modo, in plana equalia incurrat, eadem vi eadem percutit. Nulla enim adest diversitatis ratio.

SCHOLIUM.

279. Vis percutientis pendet a celeritate, massa, & directione percutientis, nec non a plani percussi magnitudine. In hypothese adeo Axiomatis, omnia eadem præsupponuntur a quibus quantitas vis pendet qua fit percussio. Ex generalibus adeo principiis Metaphysicis (§. 193 *Ontol.*) constat, vim percutiendi hoc in casu differre minime posse.

THEOREMA XLI.

280. Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrat; vires quibus percutiuntur sunt in ratione planorum.

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A esse duplum plani B: erit adeo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142 *Arithm.*), sive $B = \frac{1}{2}A$. Quoniam itaque B & $\frac{1}{2}A$ eadem vi percutiuntur (§. 278), atque eadem adeo vi utraque pars ipsius A percuti debet (§. 87 *Arithm.*); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero simpla; hoc est, vires percutientes sunt in ratione dupla; consequenter in ratione planorum percussorum A & B. Idem cum eodem modo ostendatur in quacunque alia planorum ratione; patet in genere esse vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percussorum. Q. e. d.

THEOREMA XLII.

281. *Si idem fluidum, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana æqualia incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat fluidum dupla celeritate ejus qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique sub eodem angulo incurrat. Dico vires quibus percutiuntur plana A & B esse ut quadrata celeritatum, seu vim qua percutitur planum A esse quadruplo majorem ea qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diversa celeritate in plana A & B incurrit, *per hypoth.* massa percutientis planum A est ad massam percutientis planum B, ut celeritas qua movetur fluidum in planum A incurrens ad celeritatem qua movetur quod fertur in B (§. 273). Quamobrem fluida percutientia spectari possunt tanquam corpora inæqualis massæ. Enimvero si massæ inæquales sunt, vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 *Mechan.*), adeoque in casu præsentis, ubi massæ sunt ut celeritates, *per demonstrata*, in ratione duplicata celeritatum; veluti in casu speciali vis qua percutitur A quadruplo major est ea qua percutitur planum B (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

282. *Si fluidum idem, diversa celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione composita ex simplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcunque in plana quæcunque A & B, celeritatibus quibuscunque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate C, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit, erit $V : f = A : B$ (§. 280). Et si idem fluidum in planum B diversa celeritate C & c incurrit; erit in diversis istis percussionibus $f : v = C^2 : c^2$ (§. 281). Habemus adeo $fV : fv = A. C^2 : B. c^2$ (§. 213 *Arithm.*), consequenter $V : v = A. C^2 : B. c^2$ (§. 181 *Arithm.*); hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita ex simplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 . *Q. e. d.*

THEOREMA XLIV.

283. *Si fluida diversæ densitatis, eadem celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita densitatum fluidorum atque planorum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diversæ densitatis D & d in plana quæcunque A & B eadem celeritate, dicanturque vires percutientes f & v: erit $f : v = D : d$ (§. 272). Incurrat jam fluidum densitatis D in planum aliud A quod alteri B inæquale sit, dicaturque vis percutiens V; erit $V : f = A : B$ (§. 280). Erit itaque $fV : fv = A. D : B. d$ (§. 213 *Arithm.*); consequenter $V : v = A. D : B. d$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita planorum A & B atque densitatum fluidorum D & d. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLV.

284. Si fluida diversæ densitatis, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana inæqualia incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita ex rationibus planorum percussorum, & densitatum fluidorum simplicibus, atque duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia B & B, in quæ incurrat fluidum idem, seu ejusdem densitatis d , diversis celeritatibus C & c , dicanturque vires f & v : erit $f:v = C^2:c^2$ (§. 281). Incurrant jam fluida diversæ densitatis D & d , eadem celeritate c , in plana inæqualia A & B, dicanturque vires percutientes V & f ; erit $V:f = A.D:B.d$ (§. 283). Habemus itaque $fV:f v = A.D.C^2:B.d.c^2$ (§. 213 Arithm.), consequenter $V:v = A.D.C^2:B.d.c^2$ (§. 181 Arithm.), hoc est, vires percutientes fluidorum diversæ densitatis in plana utcumque inæqualia celeritatibus quibuscunque incurrentium, sunt in ratione composita ex simplicibus planorum A & B, densitatum fluidorum D & d , atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 . Q. e. d.

SCHOLIION.

285. Habemus adeo mensuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim si indirecte impingit fluidum aliquod in planum, tum variatio non una de causa accidit, etsi Theoremata in comparandis viribus sub eodem angulo impingentibus locum habeant.

THEOREMA XLVI.

Tab. VIII. Fig. 82. 286. Si aqua per declivem AD de-
lapsa directe incurrit in palmulam rotæ

circa centrum C convertibilis; erit vis percutiens ut palmula ducta in radium EC, densitatem aquæ, & altitudinem lapsus AB.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens absoluta est ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & quadratum celeritatis qua fuit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declivem AD delapsæ est in ratione subduplicata altitudinis lapsus AB (§. 204), adeoque quadratum ejusdem ut ipsa hæc altitudo. Quare vis percutiens absoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & in altitudinem lapsus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis, per hypoth. illa jam consideranda venit tanquam potentia ad Axem in Peritrochio applicata, cujus centrum motus in C; atque tum vis respectiva erit ut absoluta ducta in radium (§. 792, 153 Mechan.). Est igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in densitatem aquæ, altitudinem lapsus AB & radium rotæ EC. Q. e. d.

SCHOLIION.

287. Atque hinc patet modus ad mensuram revocandi vires percutientes aquarum rotas molares agitantium, easque inter se conferendi: quod ut evidentius pateat, sequentia adjicere lubet Corollaria.

COROLLARIUM I.

288. Sint radii rotarum R & r , palmulæ P & p , altitudines lapsus A & a ; cum densitatis, quæ eadem hic supponitur, in comparandis viribus percutientibus non habendo sit ratio (§. 181 Arithm.); erunt vires percutientes V & v , ut R. P. A : $r. p. a$ (§. 286).

COROLLARIUM II.

289. Quodsi ponamus palmulas rotarum esse æquales, erit $P = p$, adeoque $V : v = R : A : r : a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium sunt in ratione composita radiorum rotarum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM III.

290. Quodsi ulterius fuerit $R = r$, hoc est, si rotæ fuerint æquales; erit $V : v = A : a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est vires aquarum rotas molares æquales percutientium sunt in ratione altitudinum lapsus.

COROLLARIUM IV.

291. Si fuerit $R = r$, hoc est, si altitudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V : v = P : A : p : a$, hoc est, vires quibus palmulæ percutiuntur sunt in ratione composita palmularum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM V.

292. Quodsi fuerit $A = a$; hoc est, si aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V : v = R : P : r : p$. hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM VI.

293. Quodsi præterea $R = r$; erit $V : v = P : p$, hoc est, si rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes sunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM VII.

294. Si vero fuerit, præter $A = a$, etiam $P = p$; erit $V : v = R : r$, hoc est, si aqua per eandem declivitatem irruat in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM VIII.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R : P : A = r : p : a$ (§. 288), adeoque $A : a = r : p : R : P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si altitudines lapsus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione composita reciproca palmularum & radiorum seu altitudi-

num rotarum; vires percutientes æquales sunt, & contra.

COROLLARIUM IX.

296. Quodsi præterea fuerit $r = R$; erit: $A : a = p : P$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est si aqua incidit in rotas æque altas per declivitates quarum altitudines rationem palmularum reciprocā habent; vires percutientes æquales sunt; & contra, si rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debent ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM X.

297. Si vero fuerit $P = p$; erit $A : a = r : R$, hoc est, si aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales, æquali vi percutiuntur; & contra si rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM XI.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r : p = R : P$ (§. 292), adeoque $R : r = p : P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, aqua per eandem declivitatem delapsa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ sunt in ratione reciproca radiorum seu altitudinum earundem.

COROLLARIUM XII.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, adeoque, si ejusdem fuerint latitudinis, longitudinis rationem habeant (§. 389 *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, seu duæ rotæ sibi mutuo æquipollent, si habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales.

SCHOLIUM.

300. Hinc videmus in fluminibus admodum latis construi rotas molares, quæ exiguæ sunt altitudinis, sed magnæ longitudinis; latitudine defectum altitudinis compensante.

THEO-

THEOREMA XLVII.

301. Si plana per fluida diversa densitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; resistentiæ quas experiuntur sunt in ratione composita ex rationibus planorum, & densitatum fluidorum simpla, & celeritatum duplicata.

DEMONSTRATIO.

Etenim fluidum quiescens eadem vi resistit plano per ipsum lato qua impingeret in idem planum, si ipsum quiesceret & fluidum moveretur eâ celeritate qua planum fertur, eadem in utroque casu supposita directione: id quod per se manifestum assumitur. Jam vero vires quibus plana percutiuntur quiescentia a fluidis directe impingentibus, sunt in ratione composita densitatum & planorum simpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires quibus fluida directe resistunt planis per ea latis, sunt in ratione composita densitatum fluidorum, ac ipsorummet planorum simpla, & celeritatum quibus per eadem feruntur duplicata. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

302. Quodsi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, densitate existente eadem; vires quibus ipsis resistitur sunt in ratione simplici planorum & duplicata celeritatum quibus ea per fluidum feruntur (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

303. Quodsi porro plana fuerint æqualia; resistentiæ quas patiuntur erunt ut quadrata celeritatum.

COROLLARIUM III.

304. Si vero celeritates fuerint æquales; vires quibus planis resistitur erunt in ratione planorum.

DEFINITIO XVIII.

305. Celeritatem absolutam appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; Respectivam vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

SCHOLIUM.

306. Ponamus fluidum ferri celeritate ut AC, sed oblique incurrere in planum AB sub angulo incidentiæ BAC; celeritas illa respectiva dicitur, quæ in impactu directo æquipollente eidem substituenda venit. Tab. VIII. Fig. 83.

THEOREMA XLVIII.

307. Si fluidum indirecte impingit in rectam AB juxta lineas parallelas AC & DB: celeritas absoluta est ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ.

DEMONSTRATIO.

Exponat recta AC celeritatem absolutam, & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC resolvitur in laterales CF & AF eidem simul æquipollentes (§. 245 *Mechan.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit secundum directionem AF, sed tantummodo secundum perpendicularem CF, juxta quam fluidi motui resistit; evidens est celeritatem respectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodsi AC sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli incidentiæ CAF (§. 2 *Trigon.*). Quare cum sit celeritas absoluta ad respectivam, ut AC ad CF per demonstrata; erit illa quoque ad hanc, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLIX.

Tab. VIII. Fig. 83. 308. Si fluidum indirecte impingit in rectam AB juxta lineas parallelas CA & BD : massa ejus, qua percussio indirecta fit, est ad massam qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis : evidens est eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB quam ad rectam BE; consequenter si BD exponat celeritatem fluidi qua fertur, veluti spatium quod decurrit fluidum isto tempusculo quo absolvitur percussio; erit quantitas seu massa fluidi quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas ad massam quæ ad eandem juxta directionem perpendiculararem afflueret, ut BE.BD, ad AB.BD, consequenter ut BE ad AB (§. 181 Arithm.). Jam si AB sumatur pro sinu toto, erit BE sinus anguli incidentiæ EAB (§. 2 Trig.). Est igitur BE ad AB, consequenter massa fluidi qua percussio indirecta fit ad massam qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA L.

309. Si fluidum aliquod in rectam AB indirecte impingit; vis qua indirecte percutitur est ad eam qua eadem recta AB ab eodem fluido CABD juxta directiones ipsi perpendiculares affluente percuteretur, in ratione duplicata sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 83. Etenim vires quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 Mechan.), scilicet vis directa est ad indirectam, ut massa quæ in percussione directa ad rectam AB defertur ad massam quæ ad eandem in indirecta affluit, & ut celeritas absoluta ad respectivam. Enimvero & massa in percussione directa est ad massam in indirecta, & celeritas absoluta ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ, (§. 307, 308). Est igitur vis percutiens directa ad indirectam, in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA LI.

310. Si fluidum oblique impingat in rectam AB juxta directiones parallelas AC & BD in ipsam delatum, & ex B demittatur perpendicularis BE in AC, ex E vero denuo demittatur EG ad AB perpendicularis; vis qua fluidum urget directe rectam AB est ad vim qua eam urget indirecte, ut tota AB ad segmentum ejus BG.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AB : BE = BE : BG$ (§. 330 Geom.) & AB ad BE, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ BAC (§. 2 Trig.); consequenter BG est tertia proportionalis ad sinum totum & sinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 216 Arithm.). Quare cum sit vis qua percutitur recta AB directe ad eam qua indirecte percutitur, in ratione duplicata sinus totius ad

Tab. ad sinum anguli incidentiæ (§. 309);
VIII. crit etiam illa ad hanc, ut tota recta
Fig. 83. AB ad segmentum ejus BG (§. 167
Arithm.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

311. Quoniam $AB > GB$ (§. 84 *Arithm.*);
vis quoque qua recta AB a fluido directe
percutitur, est ea qua indirecte percuti-
tur major.

COROLLARIUM II.

312. Quodsi angulus incidentiæ fuerit
IAB, rectæ AB segmentum vi indirectæ re-
spondens erit BK (§. 310). Quare cum sit,
sub angulo incidentiæ CAB, vis directa ad
indirectam, ut AB ad GB, & sub angulo
incidentiæ minore HAB, ut AB ad KB
(§. cit.); vis directa ad indirectam, sub an-
gulo incidentiæ majore, minorem ratio-
nem habet quam sub minore (§. 205
Arithm.): consequenter vis indirecta, sub
angulo incidentiæ minore, minor est, quam
sub majore (§. 206 *Arithm.*): unde de-
crescente angulo incidentiæ etiam vis per-
cussionis decrescit, atque directione AC
coincidente cum AB, hoc est, si fluidum
juxta directionem AB movetur, percussio
nulla est.

COROLLARIUM III.

313. Quoniam vis directa sub angulo
incidentiæ CAB est ad indirectam, ut AB
ad GB: sub angulo vero incidentiæ HAB,
ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ, sub
diversis angulis incidentiæ eandem re-
ctam AB percutientes, sunt inter se ut re-
ctæ GB & KB (§. 196 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

314. Quodsi fluidum feratur celeritate
V, vis directa qua percutitur recta AB
exponitur per $V^2 \cdot AB$ (§. 282). Quare cum
sit vis directa ad indirectam, ut AB ad GB,
angulo incidentiæ existente CAB (§.
310); reperietur vis indirecta $\frac{V^2 \cdot AB \cdot GB}{AB}$

$= V^2 \cdot GB$; adeoque vis indirecta exponi-
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II,

tur per $V^2 \cdot GB$, angulo incidentiæ exi-
stente CAB.

PROBLEMA LVI.

315. Determinare vim, quam ven-
tus indirecte impingens in alas molen-
dini exerit ad eas convertendas.

Tab.
VIII.
Fig. 84.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Repræsentet recta IO axem, atque
planum ADCB alam, in quam ventus
secundum directiones obliquas KA &
HB agit. Ala axem, cui perpendi-
culariter insistit, secet ad angulum obli-
quum AEI (§. 929 *Mech.*). Quoniam
itaque ventus secundum directionem
obliquam IE in planum AC circa axem
IE convertendum agit, *per hypoth.* ideo
investiganda est vis quam ventus ad
planum ADCB circa axem IE conver-
tendum adhibet, dato angulo obliqui-
tatis AEI, magnitudine alæ ADCB,
ejus latitudine AB, & celeritate qua
aër movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendi-
cularis; cum aër secundum dire-
ctiones parallelas KA & HB defe-
ratur ad rectam AB, non plus aëris
ferit planum obliquum ad axem
ADCB, cujus latitudo AB, quam
planum æque altum axem ad angu-
los rectos secans, cujus latitudo AG.
Exponit igitur recta AG quantita-
tem aëris planum simul ferientis. Jam
porro exponat EL celeritatem, qua
movetur aër, cujus densitas sit $= d$;
erit massa aëris qua percussio ab-
solvitur in puncto E, ut AG ducta
in densitatem, ac porro in LE.

2. Demittatur ex L recta LM ad AB
perpendicularis: evidens est perpen-
dicularem LM exponere celeritatem

D d d

ref.

Tab. VIII. Fig. 84. respectivam, qua ventus in planum secundum directionem obliquam in E incurrrens agit (§. 245 *Mech.*).

3. Quoniam vero ventus planum ADCB movere nequit nisi circa axem IE, circa quem convertendum: non omnem vim quam habet a celeritate respectiva LM in actionem suam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem IE; evidens est celeritatem LM resolvi in duas alias LN & MN, & eam quæ est secundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.

4. Denique cum in P sit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 141 *Mechan.*), adeoque massæ totius plani ADCB; patet vim quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, concipi posse tanquam applicatam ad punctum P, & PE tanquam radium Axis in Peritrochio cuius centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per $d. AG. LE. MN. EP$ (§. 153 *Mech.*).

Q. e. i.

PROBLEMA LVII.

316. Determinare situm alarum molendini vi venti indirecte impingentis, agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, seu eas maxima celeritate convertit.

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in Problemate præcedente, dicaturque $AB=a$, $LE=b$, $EP=c$, densitas aëris $=m$, $GB=x$; erit, ob $AE=EB=\frac{1}{2}a$, per *hypoth.*

& IE rectæ HB parallelam, $EO=$ Tab. VIII. Fig. 84. $\frac{1}{2}GB=\frac{1}{2}x$ (§. 268 *Geom.*), & $AG=\sqrt{(a^2-x^2)}$ (§. 417 *Geom.*).

2. Quoniam in $\triangle\triangle AGB$ & LME anguli ad G & M recti, per *constr.* & $MEL=ABG$ (§. 255 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$AB:AG=LE:LM$$

$$a:\sqrt{(a^2-x^2)}=b:\frac{b\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$$

3. Similiter quia in $\triangle\triangle AEO$ & LMN , anguli ad O & N recti, per *constr.* & ob rectum LME per *constr.* & obliquum L, $\triangle\triangle LMN$ & LME communem, angulus $LMN=AEO$ (§. 246 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$AE:EO=LM:MN.$$

$$\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}x=\frac{b\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}:\frac{bx}{aa}\sqrt{(a^2-x^2)}$$

4. Quoniam vis quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, est ut $m. AG. LE. MN. EP$ (§. 315); erit ea

$$=m.\sqrt{(a^2-x^2)}.b.\frac{bx}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)}.c.$$

$$=b^2 cmx - \frac{b^2 cmx^3}{a^2}$$

5. Habemus itaque (§. 63 *Analys. infin.*)

$$b^2 cmdx - \frac{3b^2 cmx^2 dx}{a^2} = 0$$

$$1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$$

Tab. VIII. Fig. 84. Quodsi jam a sumatur pro sinu toto, erit $\sqrt{\frac{1}{3}} a^2$ sinus anguli GAB (§. 2 *Trigon.*), cujus complementum ad rectum est angulus AEI sub quo planum ADCB axem EI secatur. Sit itaque $a = 10000000$, erit $\frac{1}{3}a^2 = 33333333333333$, adeoque $x = 5773502$, cui in Tabulis sinuum quam proxime respondent $35^\circ 16'$. Est itaque angulus GAB $35^\circ 16'$, consequenter AEI qui quaeritur $54^\circ 44'$.

SCHOLION I.

317. Cum de constructione Molendinorum vi venti agitandorum ageremus (§. 929 *Mechan.*); angulum IEA 54° graduum fieri praecipimus appendicem minutorum negligentes: in praesente nimirum negotio parum refert, siue is fiat 54° , siue 55° . Vulgo faciunt 45° , sed nulla Theoria nixi.

SCHOLION II.

318. Quoniam resistentia quam patitur corpus intra fluidum motum, aequipollet percussioni eadem celeritate qua ipsum movetur a fluido factae; non absimili modo determinari potest optimus situs gubernaculi, cujus ope naves in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem deprehenditur, qui ante, $54^\circ 44'$.

PROBLEMA LVIII.

Tab. VIII. Fig. 85. 319. Datis radio basis majoris AE, & altitudine segmenti conici EF; invenire altitudinem coni, cujus segmentum ACDB, ita per fluidum motum ut basis minor eidem occurrat & axis EF sit ad sectionem fluidi perpendicularis seu horizonti parallelus, minimam patiatur resistentiam.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Quoniam perinde est, siue aqua in frustum conicum ACDB quiescens

impingat, siue ipsum in fluido quiescente moveatur; ponamus aquam in quiescens impingere juxta rectas GE & HI. Impinget ergo in basin CD directe, in superficiem indirecte (§. 269); eodem semper manente angulo incidentiae HCG vel ACI (§. 156 *Geom.*), quod directiones rectae IH constanter parallelae rectam AC in quocunque puncto sub eodem angulo secant (§. 255 *Geom.*). Quodsi jam AC sumatur pro sinu toto, erit AI sinus anguli incidentiae ACI (§. 2 *Trigon.*). Sit $EF = IC = a$, $AE = b$, $AI = x$; erit $AC = \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Enimvero cum sinus totus quantitas constans esse debeat, sumatur FE vel IC pro sinu toto: erit itaque ut AC ad AI, ita IC ad sinum anguli incidentiae, qui adeo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquae impingere, quam ad rectam CL ipsi AI aequalem deferatur, adeoque ad totam superficiem non plus aquae allabi quam quae annulum cujus AI latitudo est directe percuteret. Percussiones directae in eodem fluido eadem celeritate lato sunt ut plana quae percutiuntur (§. 280), adeoque annulus exponit percussionem directam ipsius, & circulus minor CD percussionem quam ipse patitur directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percussionum, circuli autem sunt ut quadrata radiorum (§. 409 *Geom.*); resistentia directa quam patitur circulus minor CD, recte exponitur per

Tab.
VIII.
Fig. 84.

CF² five IE² = b² - 2bx + x², & resis-
tentia annuli per AE² - EI² = 2bx - x².

3. Quod si jam infertur: ut quadratum
sinus totius a² ad quadratum sinus
anguli incidentiæ a² x² : (a² + x²),
ita resistentia directæ annuli 2bx - x²
ad resistentiam indirectam quam pa-
titur superficies frusti conici (§. 309);
reperietur hæc (2bx³ - x⁴) (a² + x²).
4. Quod si jam addatur resistentia dire-
ctæ basis minoris ba - 2bx + x², *vinum*.
2. prodibit integra resistentia frusti

$$b^2 - 2bx + x^2 + \frac{2bx^3 - x^4}{a^2 + x^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 + x^2}$$

5. Quoniam resistentia minima, quam
istiusmodi frustum patitur *per hypoth.*
differentiale ejus nihilo æquale (§. 63
Anal. infin.), adeoque (-2a²bdx
+ 2a²xdx + 2b²xdx)(a² + x²) - 2xdx
(a²b² - 2a²bx + a²x² + b²x²) per
(a² + x²)² div. = 0, hoc est,

$$\frac{2a^2 bx^2 dx - 2a^4 bdx + 2a^4 xdx}{(a^2 + x^2)^2} = 0$$

$$\frac{bx^2 - a^2 b + a^2 x}{(a^2 + x^2)^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2 x}{b} = a^2$$

Tab.
VIII.
Fig. 84.

$$x^2 + \frac{a^2 x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^2}{4b^2}$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b} \sqrt{(4b^2 + a^2)}$$

$$x = \frac{a}{2b} \sqrt{(4b^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam
per hypoth. erit (§. 268 *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

$$\text{Ergo } EG = \frac{2ab^2}{a \sqrt{(4b^2 + a^2)} - a^2}$$

$$= \frac{2ab^2}{\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}$$

Enimvero b² = √(b² + $\frac{1}{4}$ a²) - $\frac{1}{2}$ a
in √(b² + $\frac{1}{4}$ a²) + $\frac{1}{2}$ a. Quare si
hic valor substituatur; erit EG =
(√b² + $\frac{1}{4}$ a²) + $\frac{1}{2}$ a.

7. Fiat itaque EO = $\frac{1}{2}$ a; erit AO
= √(b² + $\frac{1}{4}$ a²): cui si æqualis fiat
OG, erit EG = √(b² + $\frac{1}{4}$ a²) + $\frac{1}{2}$ a;
atque adeo in G vertex conici, cu-
jus frustum ACDB minimam pati-
tur resistentiam, si ea conditione in
fluido moveatur quam fert hypo-
thesis Problematis.

Finis Hydraulicæ & totius Tomi II. Elementorum Matheſeos.

Fig. Hydrost.

Fig:1.

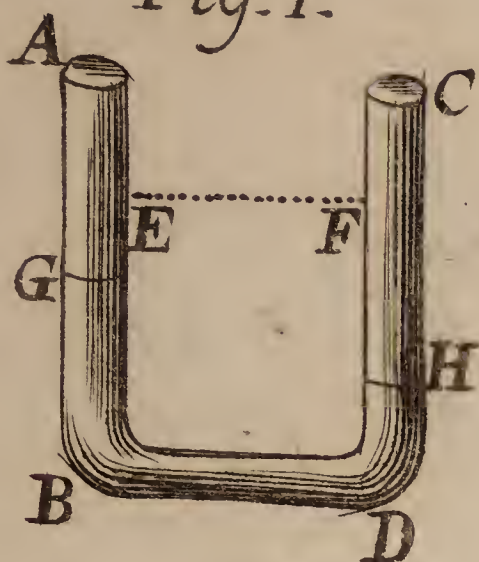


Fig:2.

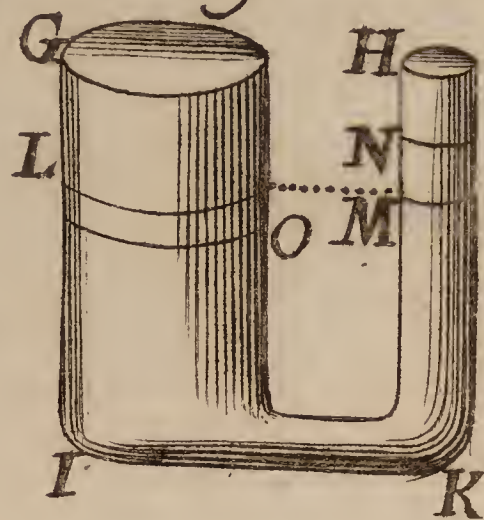


Fig:3.

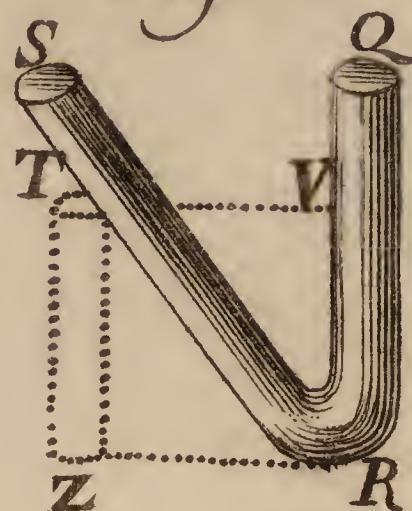


Fig:5.

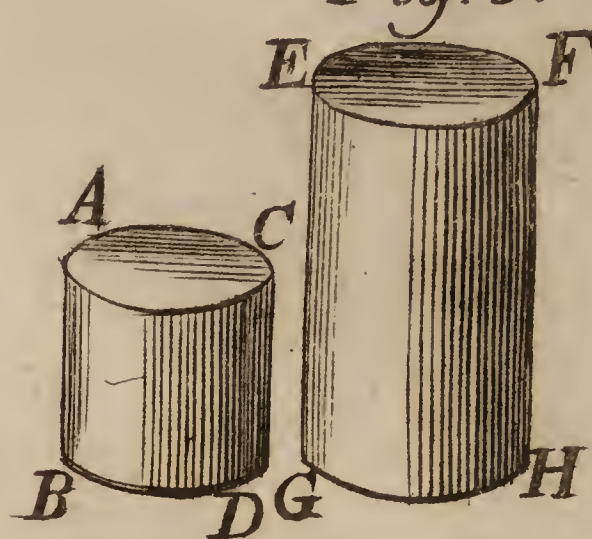


Fig:4.

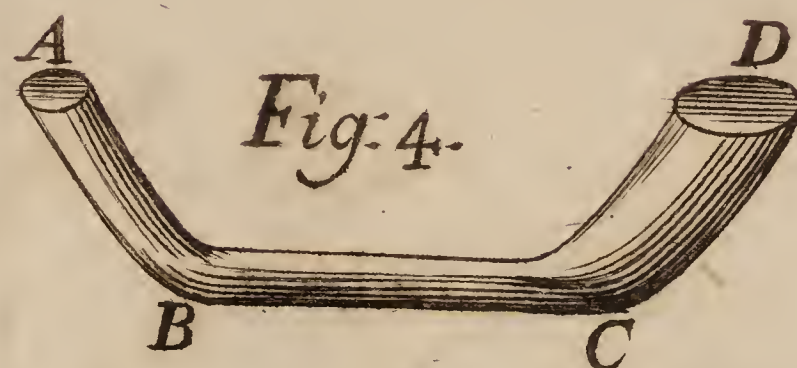


Fig:6.

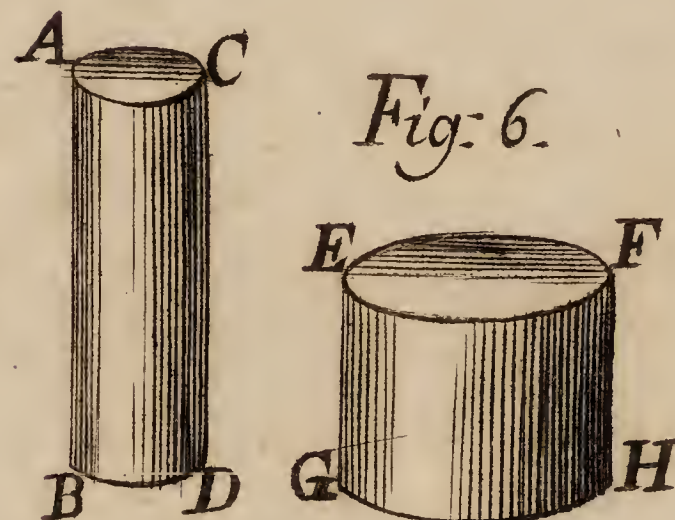


Fig:10.

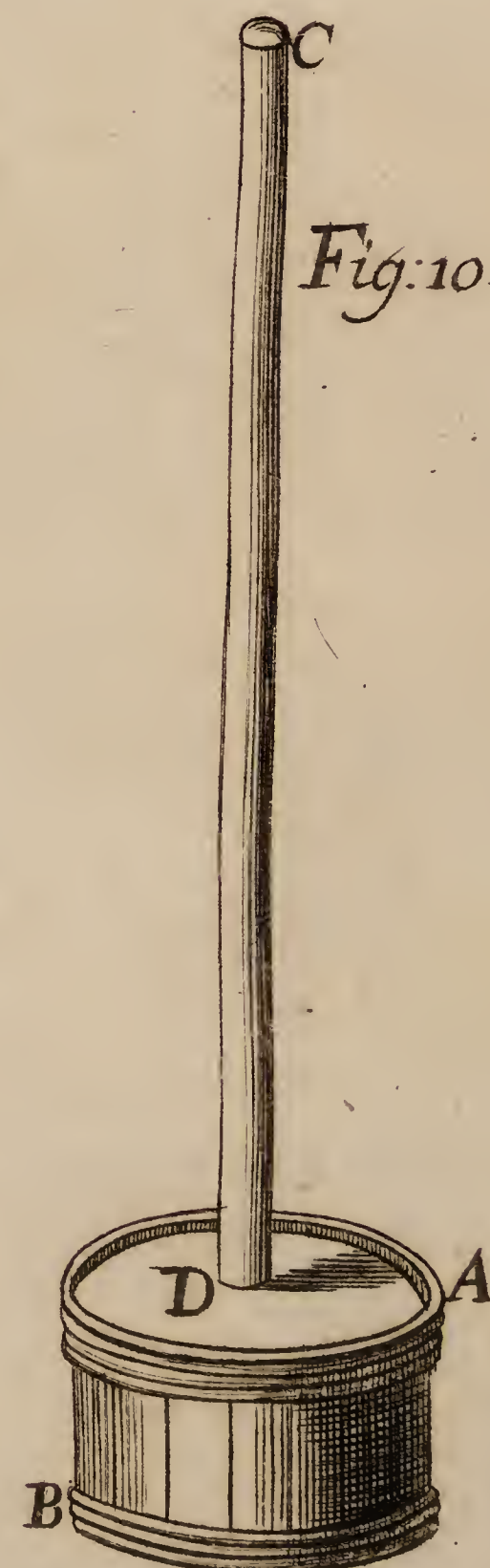


Fig:9.

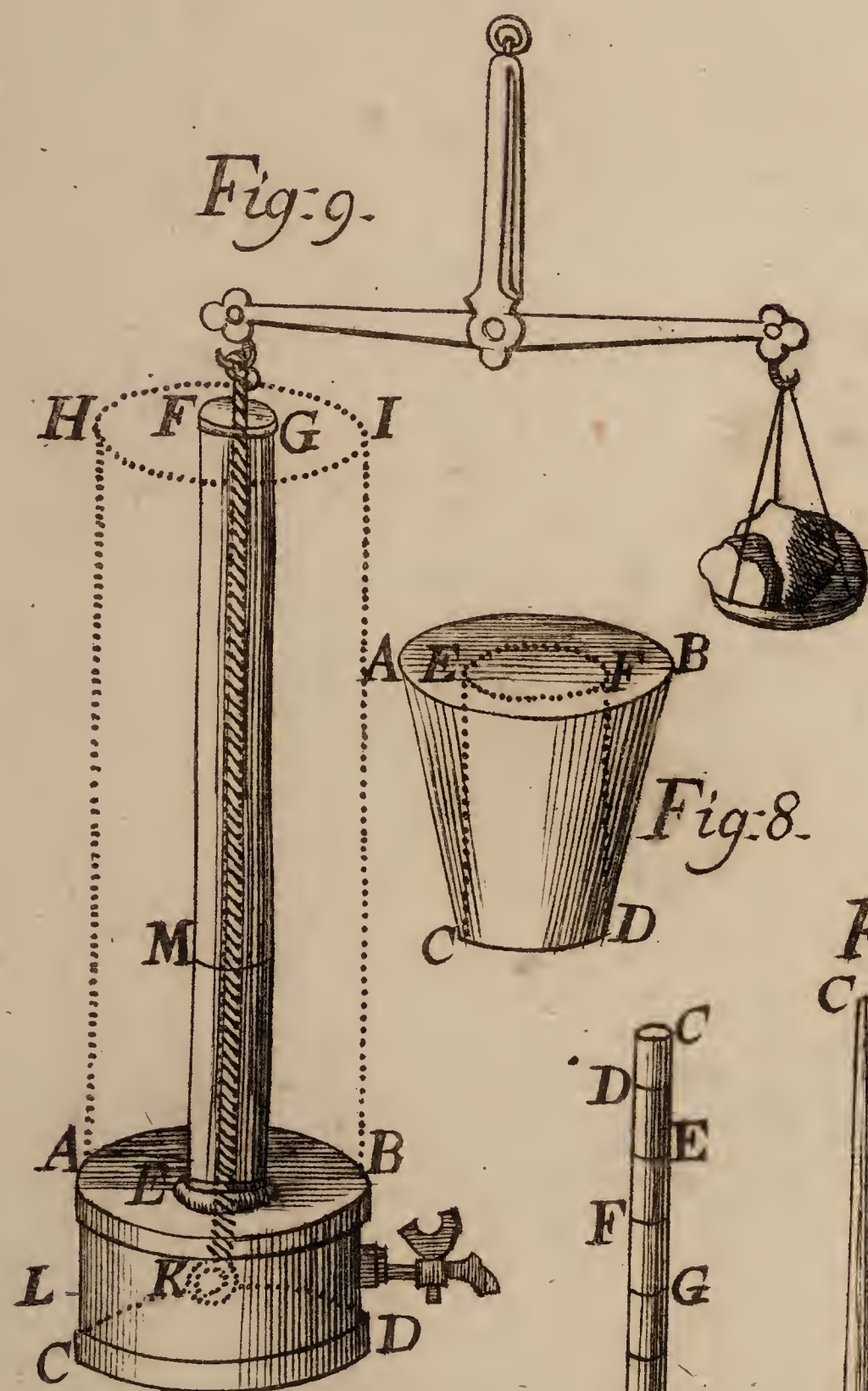


Fig:8.

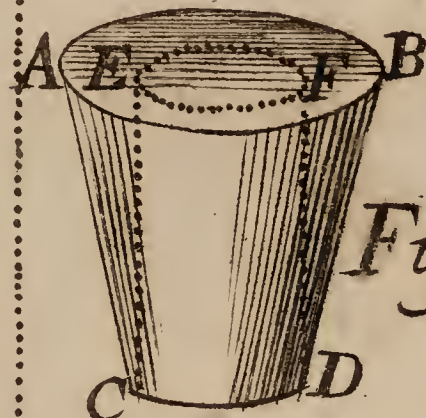


Fig:14.

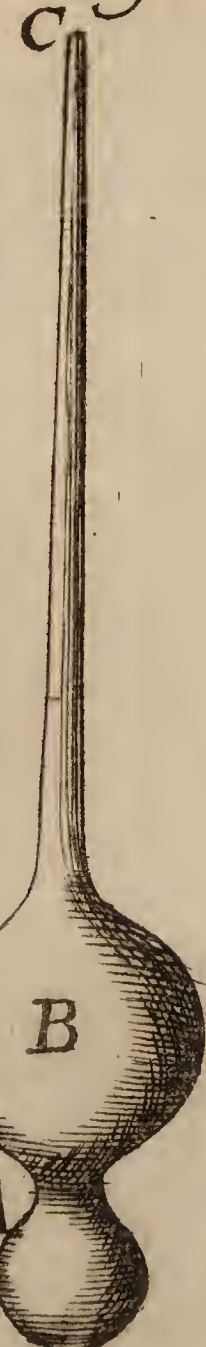


Fig:12.



Fig:13.

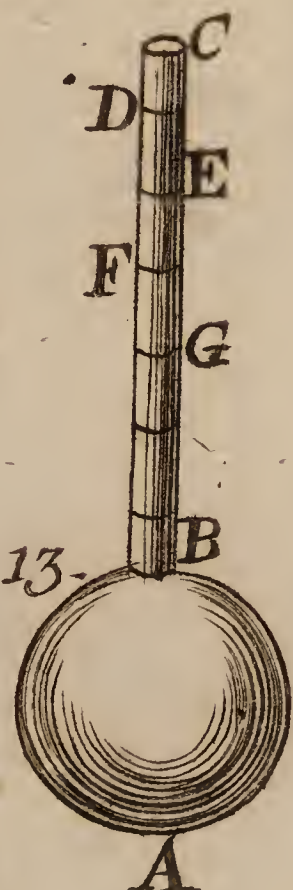


Fig:7.

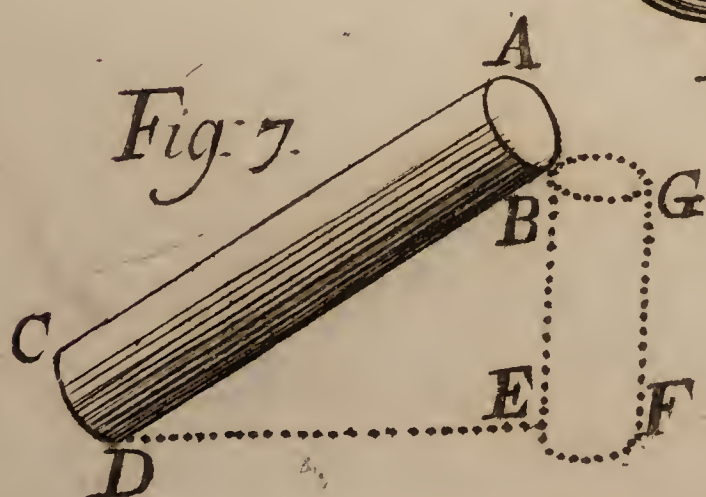


Fig:15.

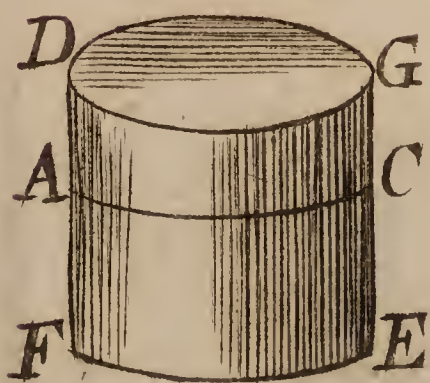
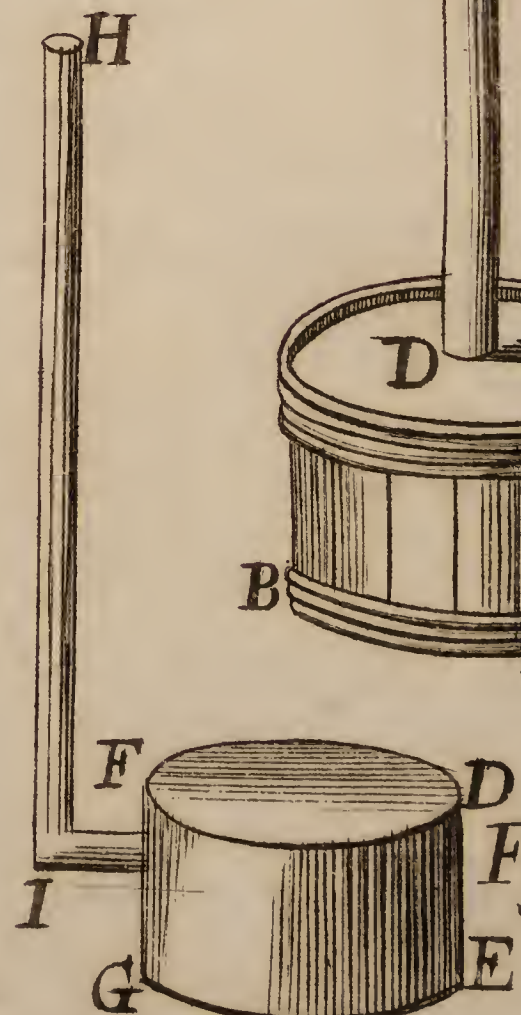


Fig:11.



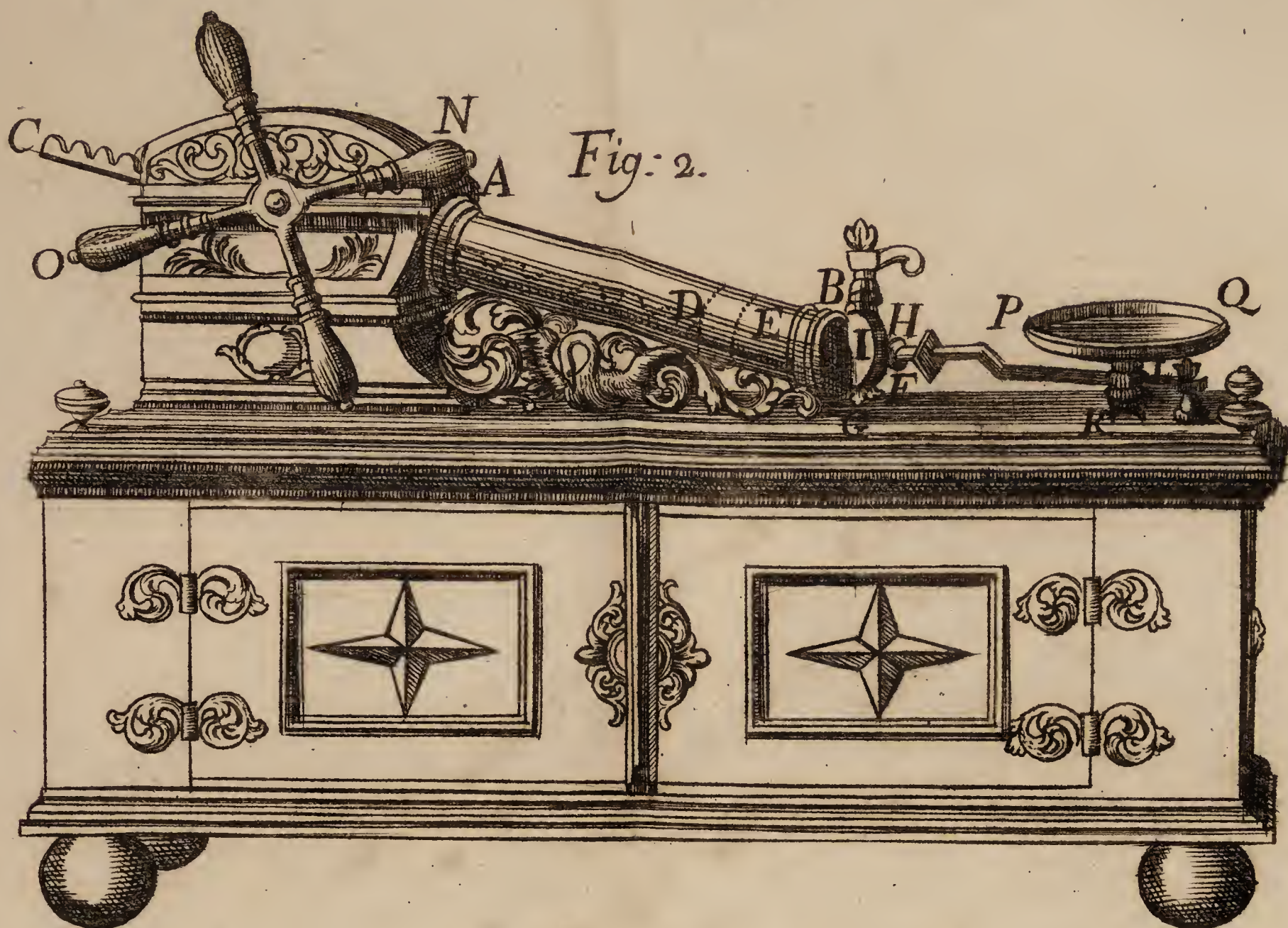


Fig: 3.

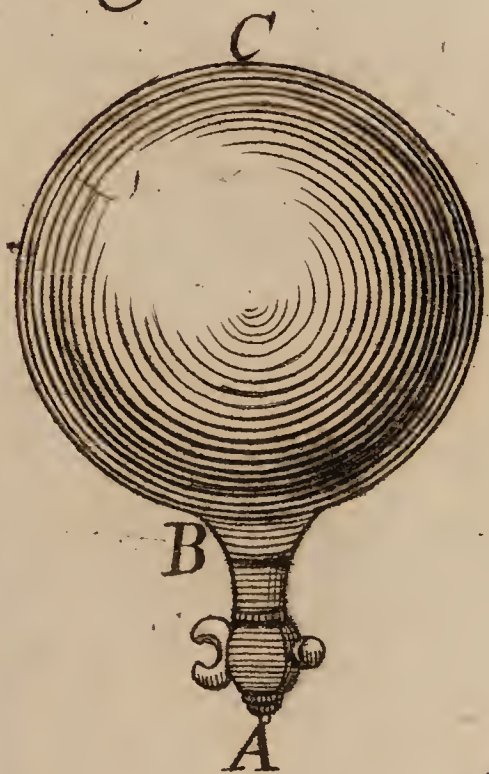


Fig: 6.

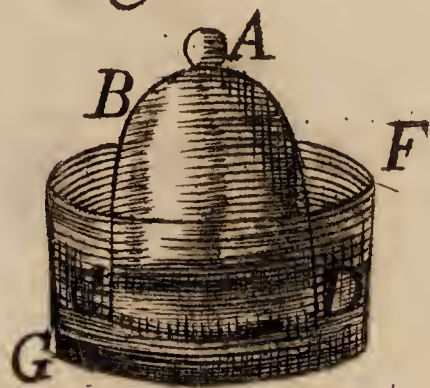


Fig: 12.

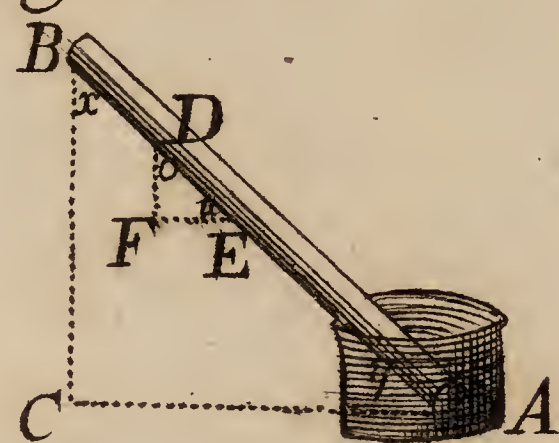


Fig: 4.

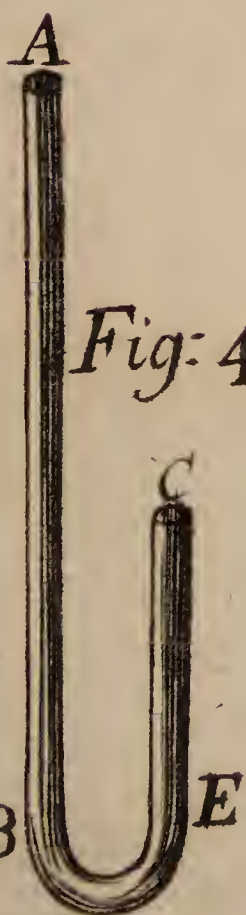


Fig: 5.

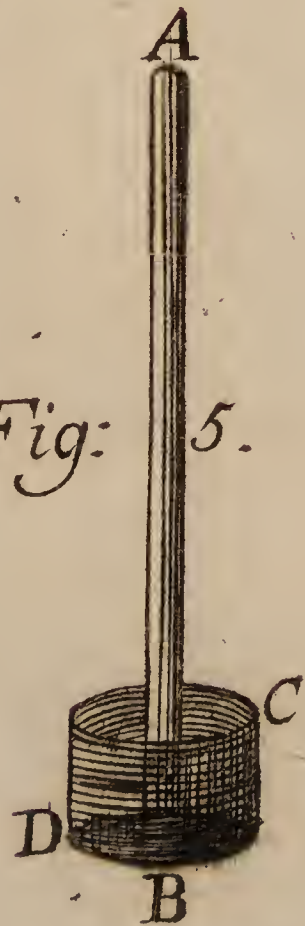


Fig: 7.

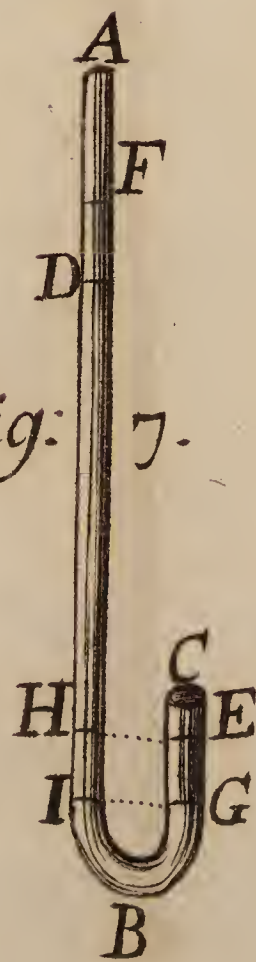


Fig: 10.

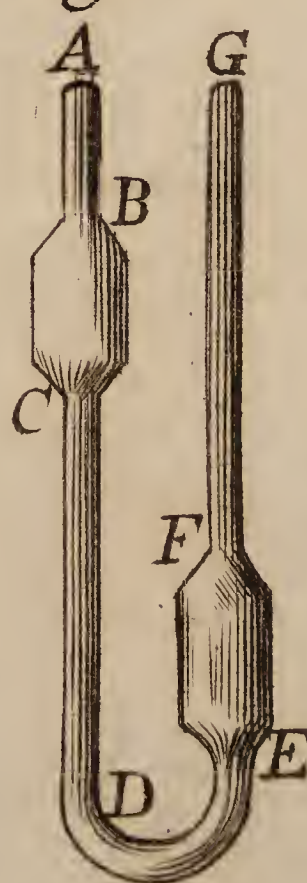


Fig: 11.

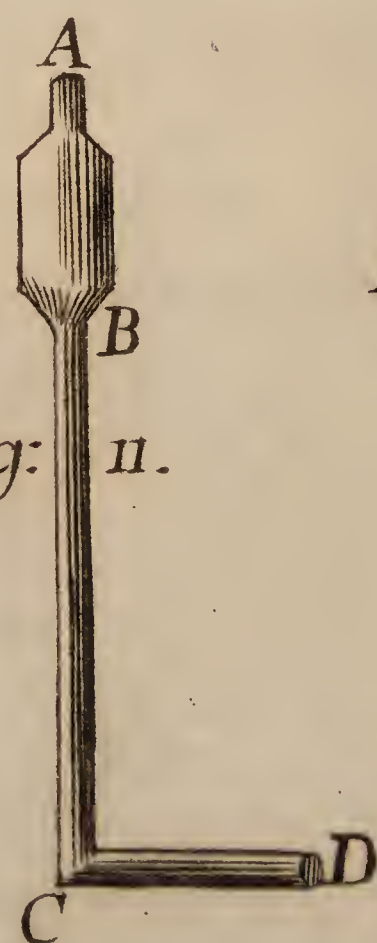
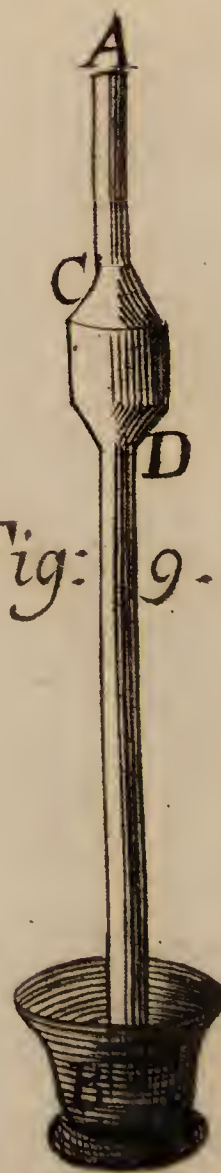


Fig: 9.



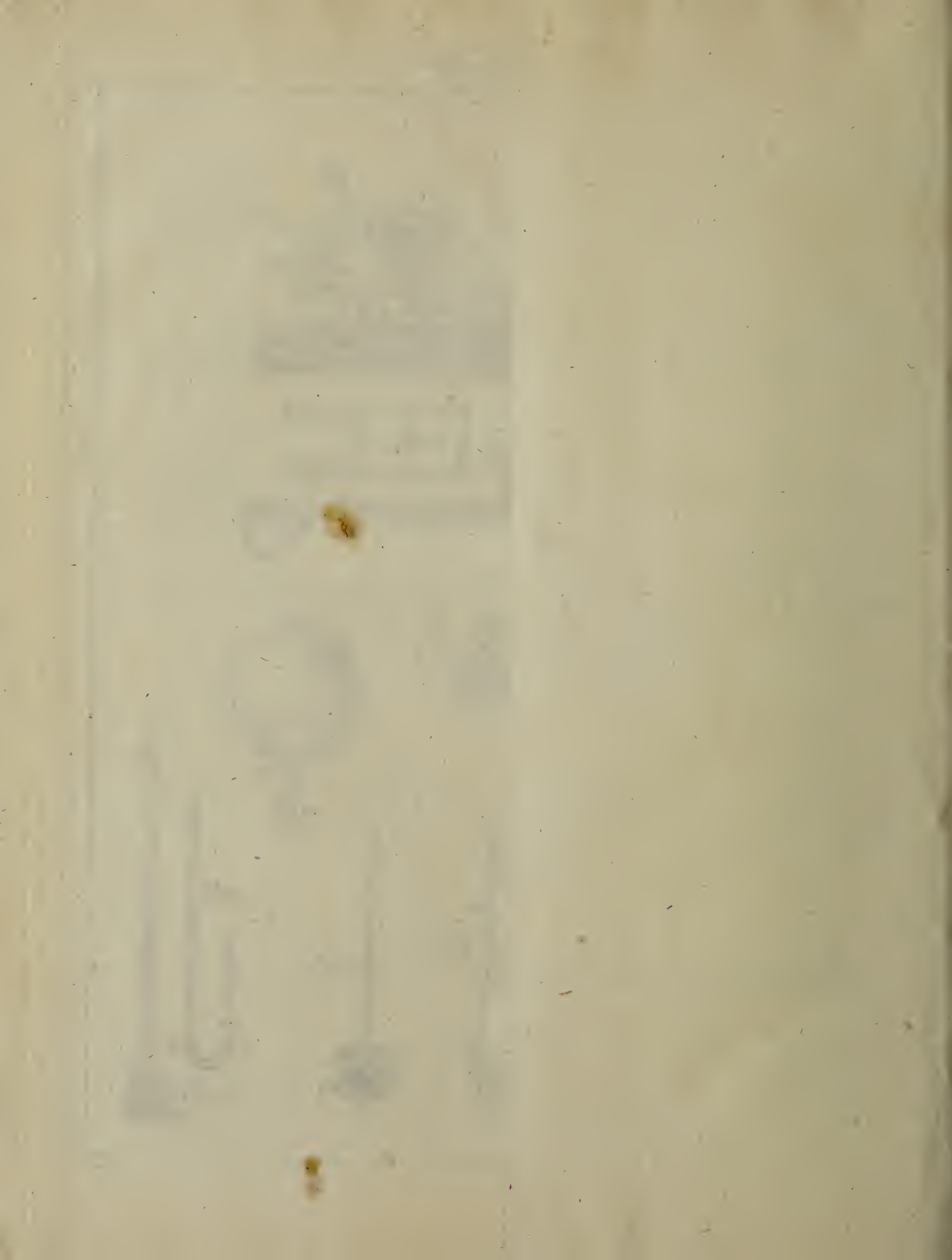


Fig: 8.

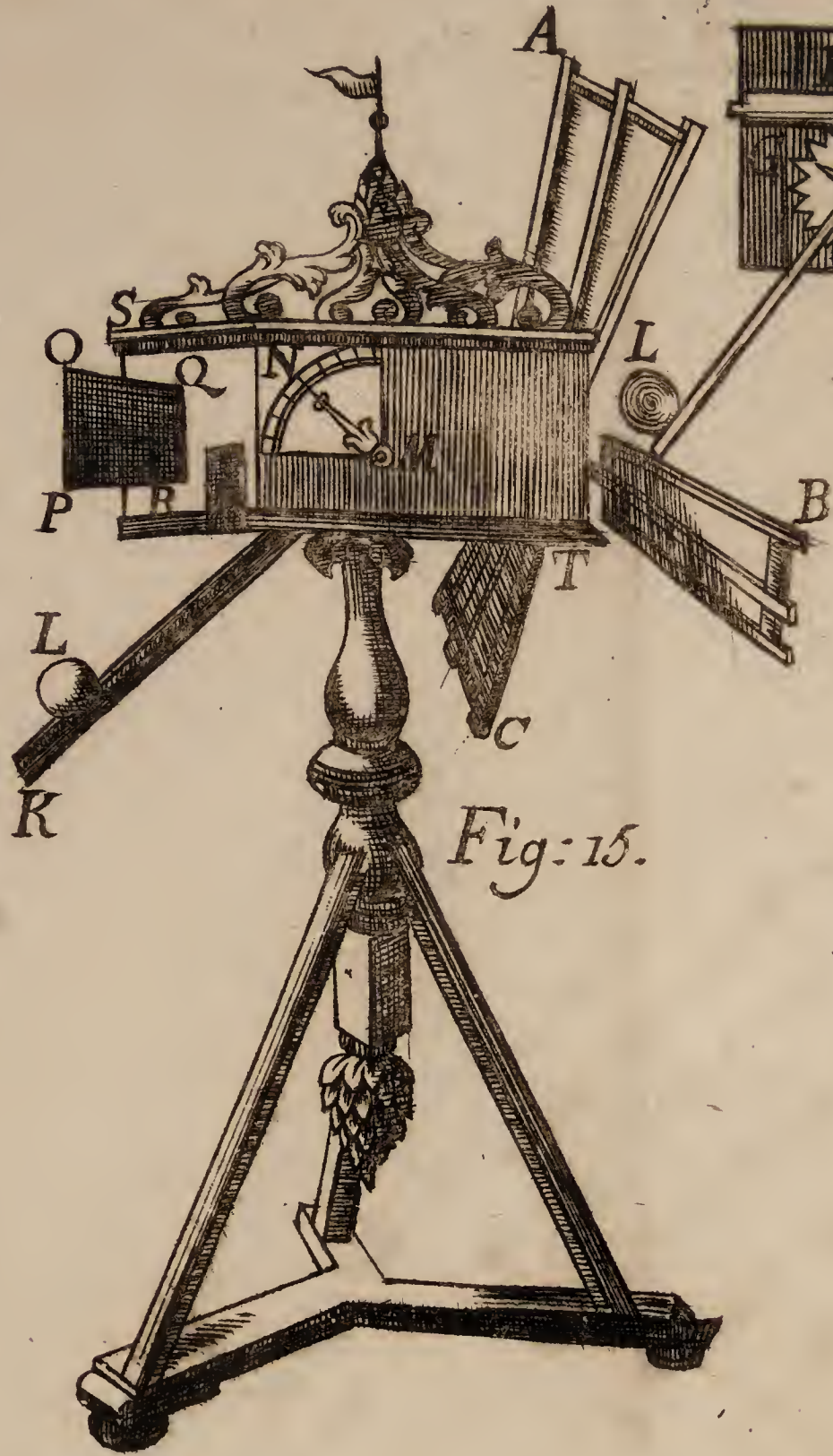


Fig: 15. N. 3.

Fig: 17.

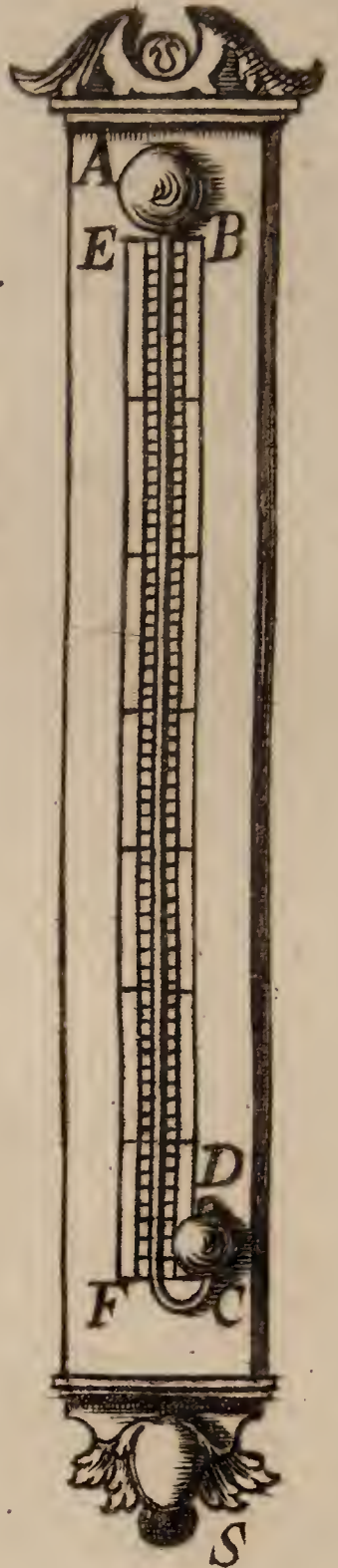


Fig: 16.

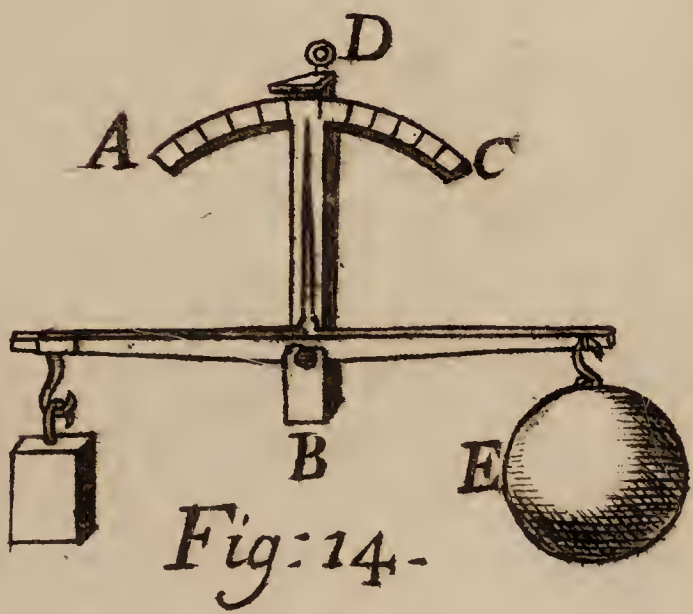
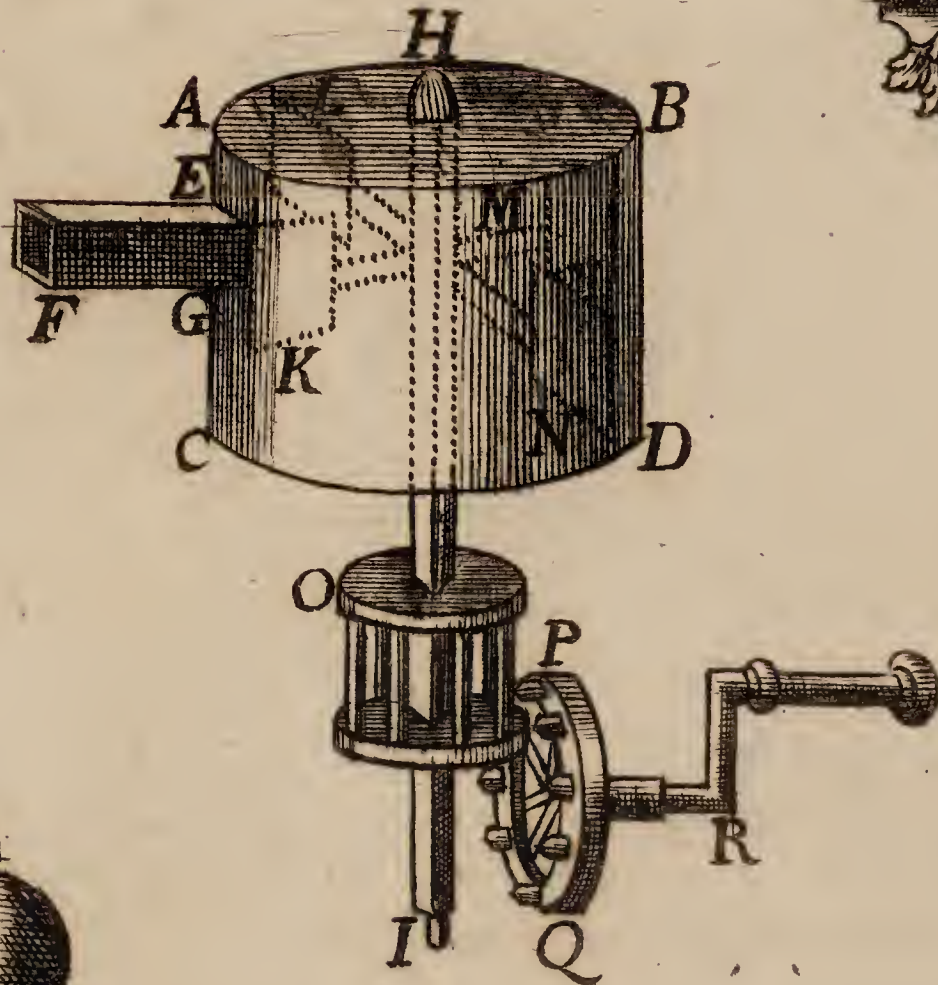


Fig: 19.

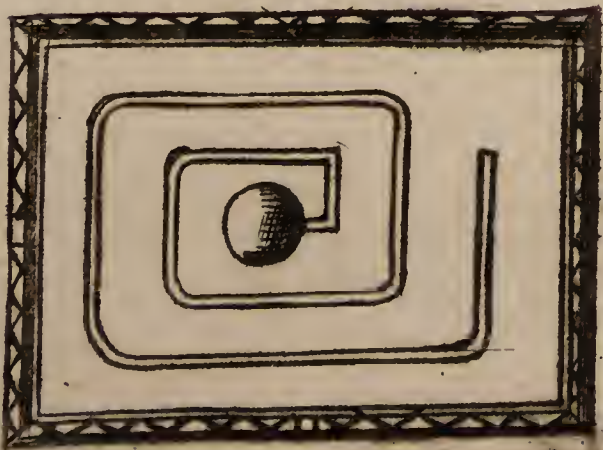


Fig: 13.

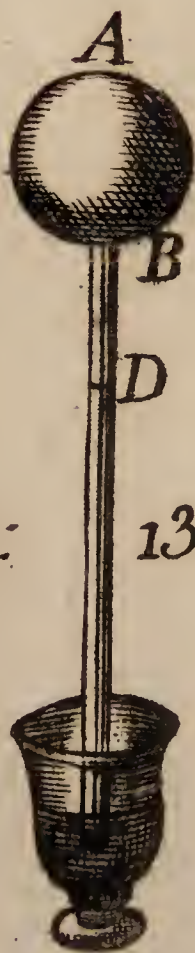
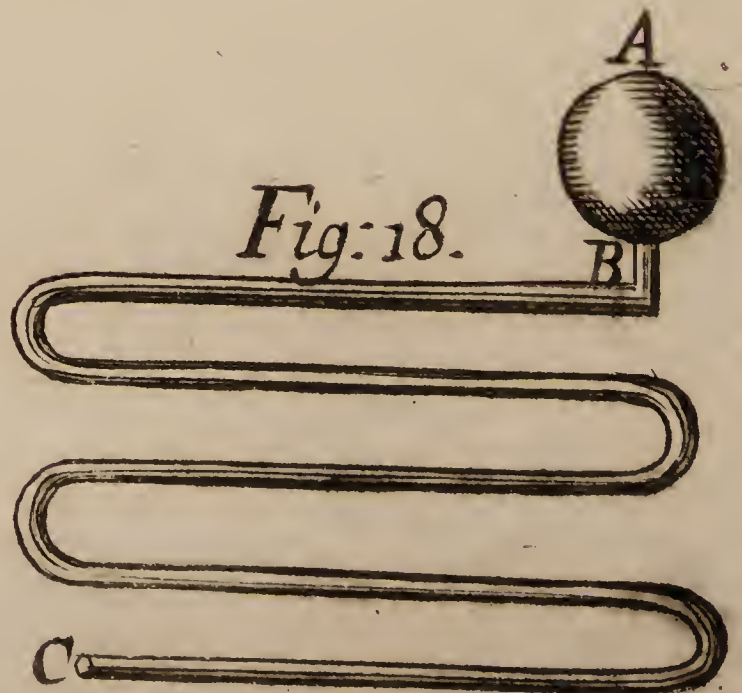


Fig: 18.



卷之

一

卷之

二

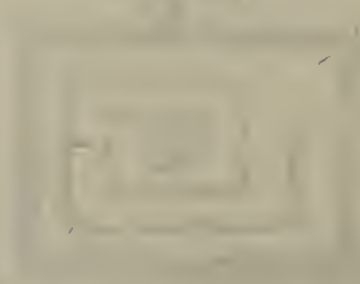


Fig: Aerom: Tab: III.

Fig: 19.

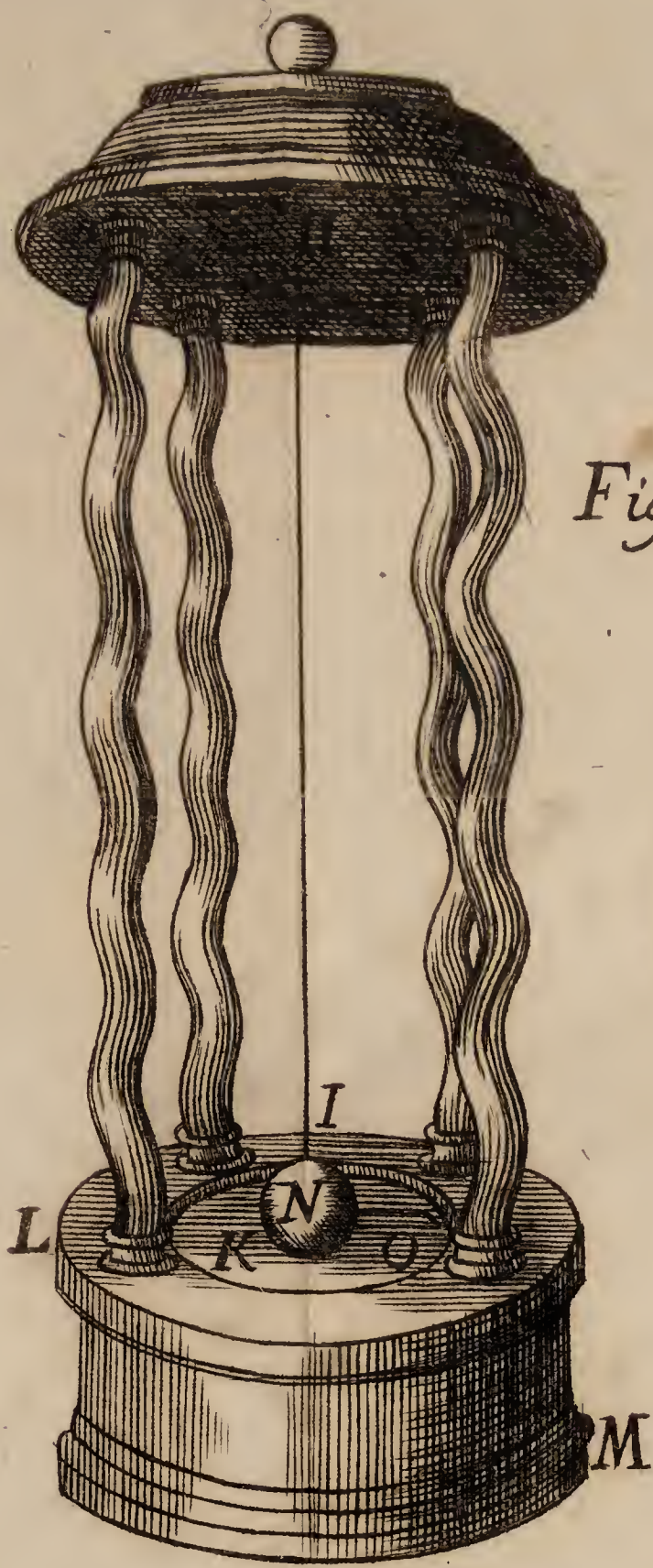
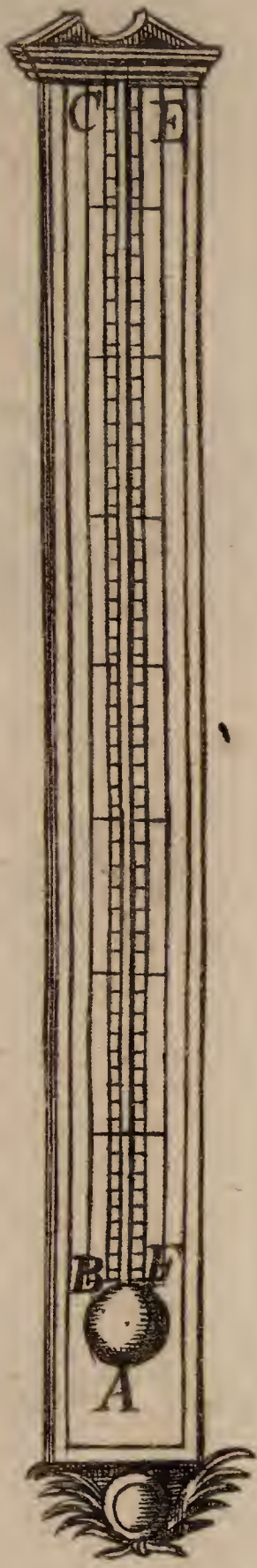


Fig: 23.

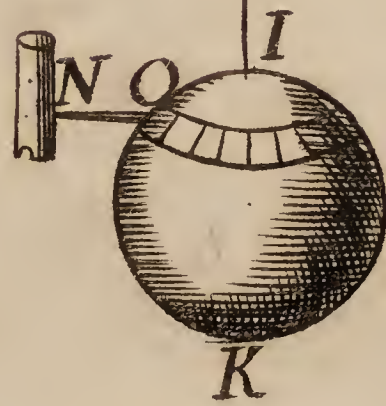


Fig: 22.

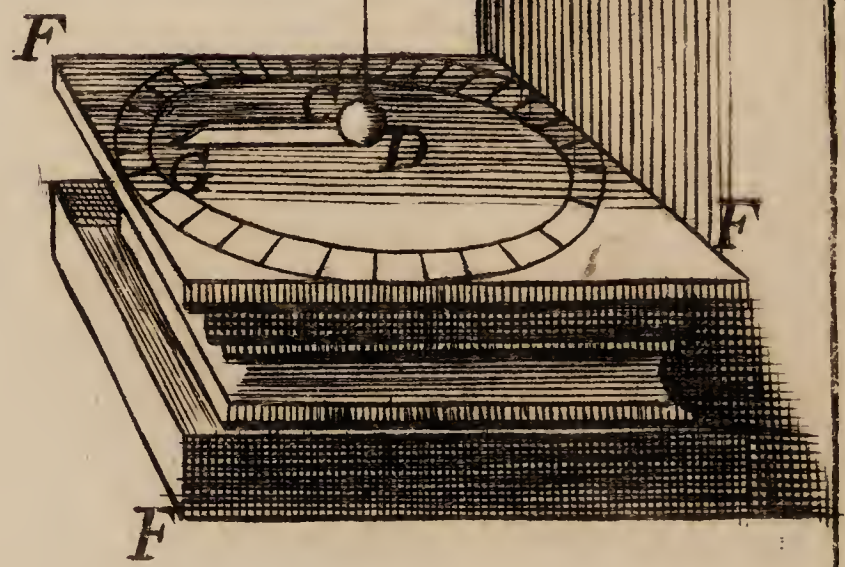


Fig: 21.

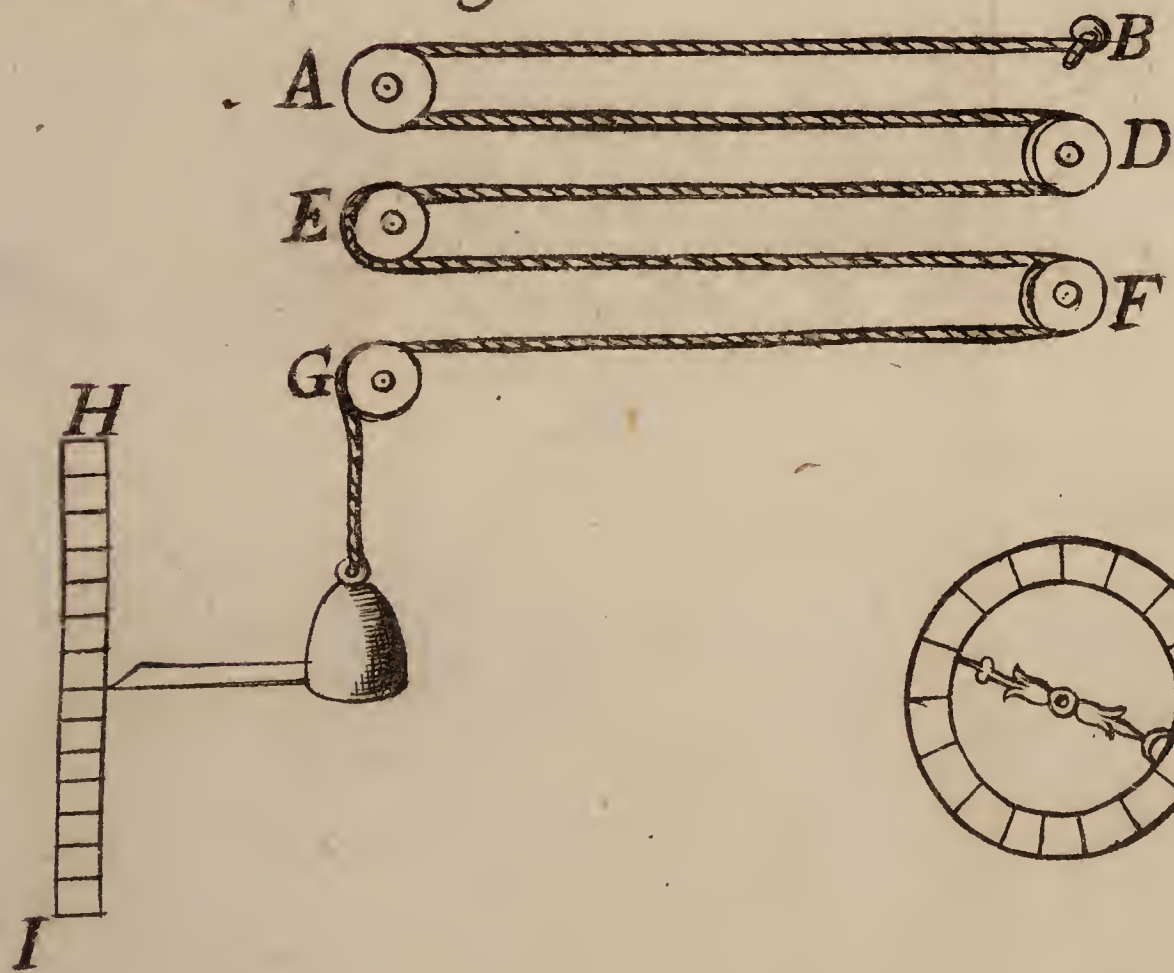


Fig: 24.

Fig: 24.

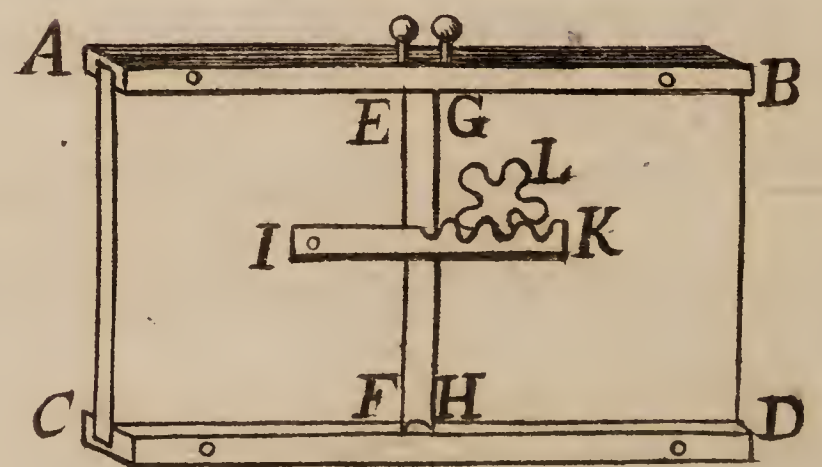


Fig: 20.

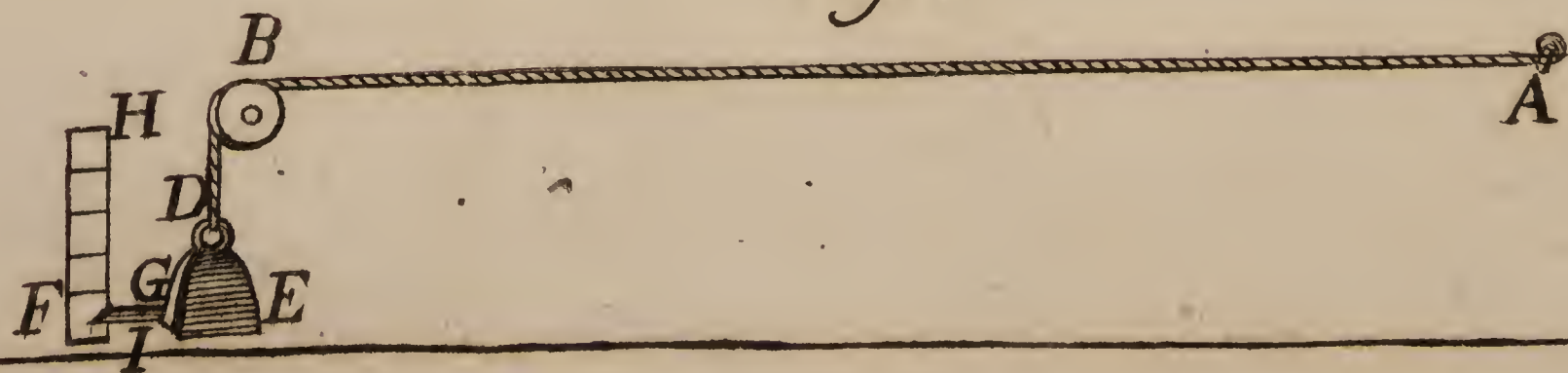




Fig:Hydraul:Tab:I.

Fig:1.

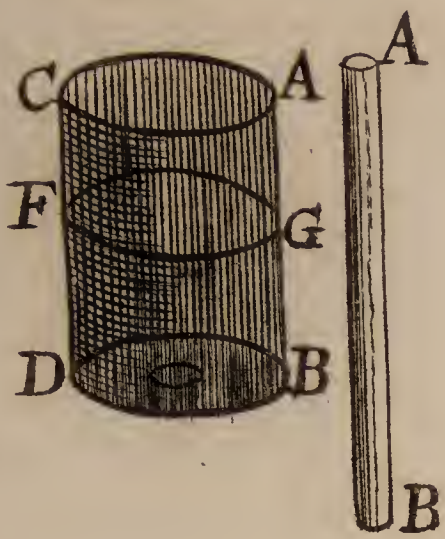


Fig:2.

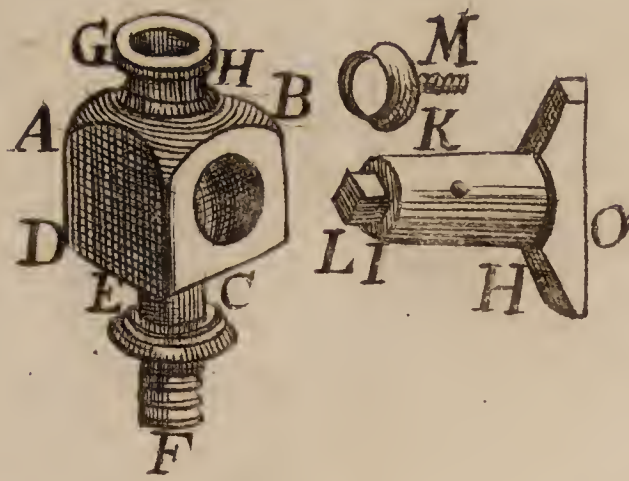


Fig:3.

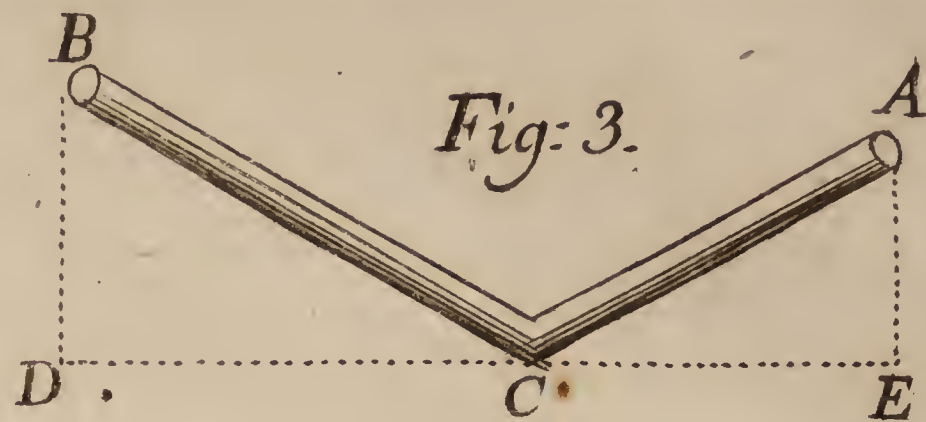


Fig:5.

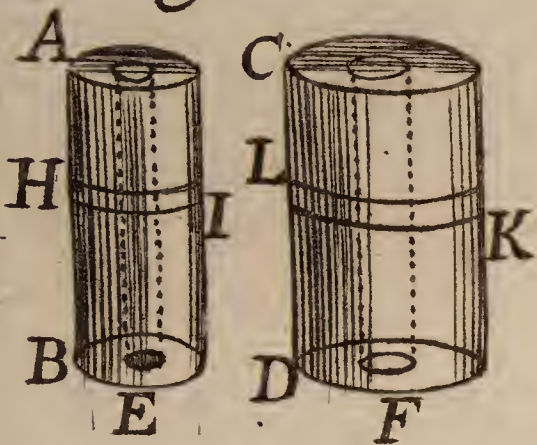


Fig:6.

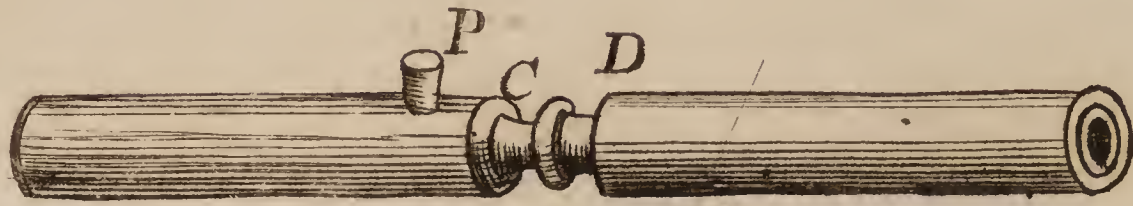
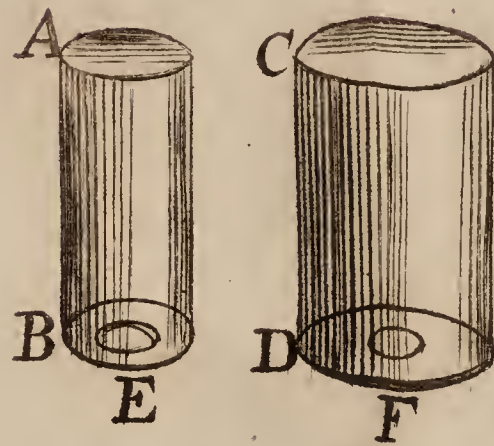


Fig:4.

Fig:12.

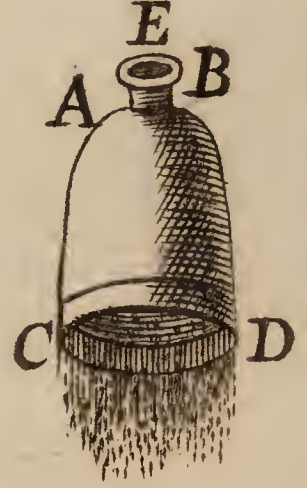


Fig:7.

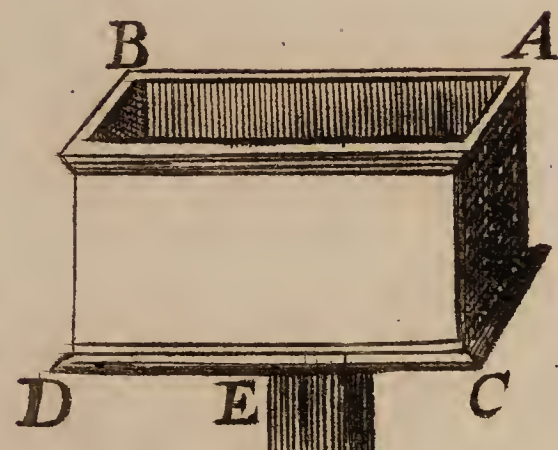
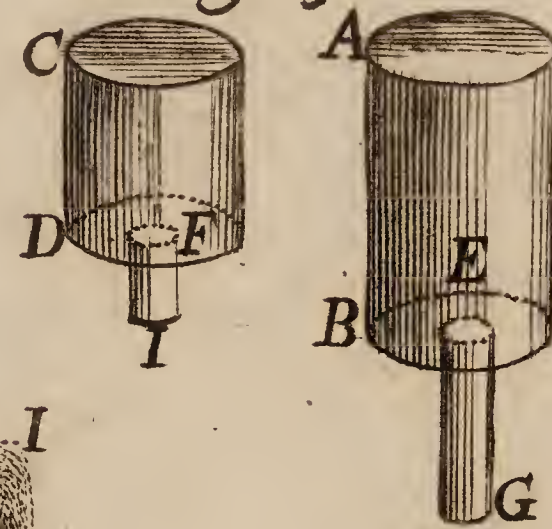


Fig:8.

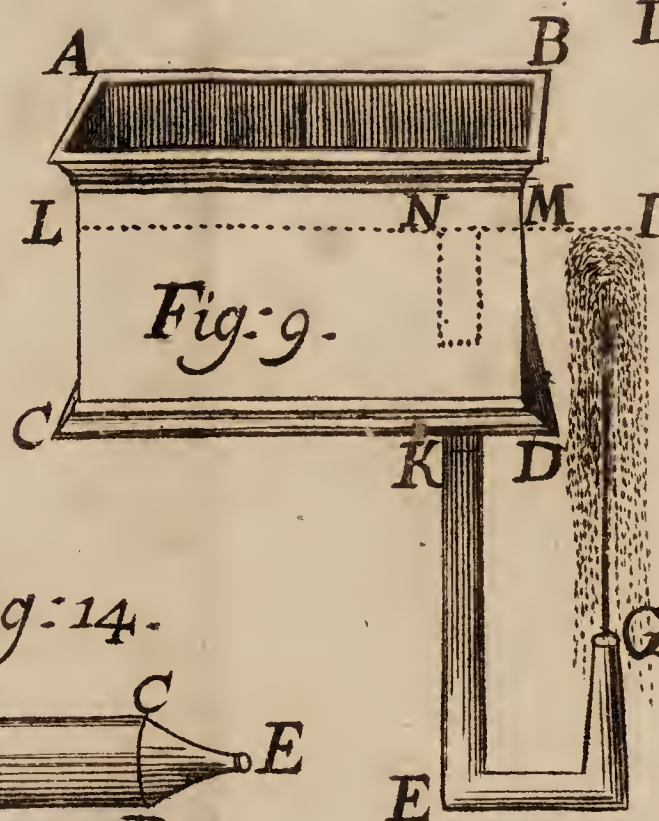


Fig:9.

Fig:n.

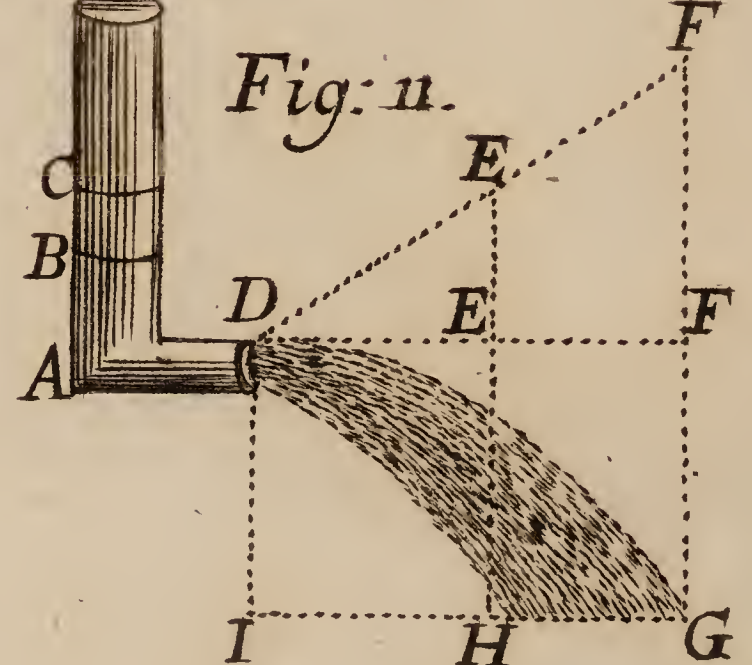


Fig:14.

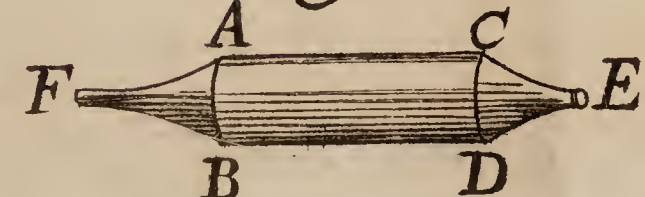


Fig:10.

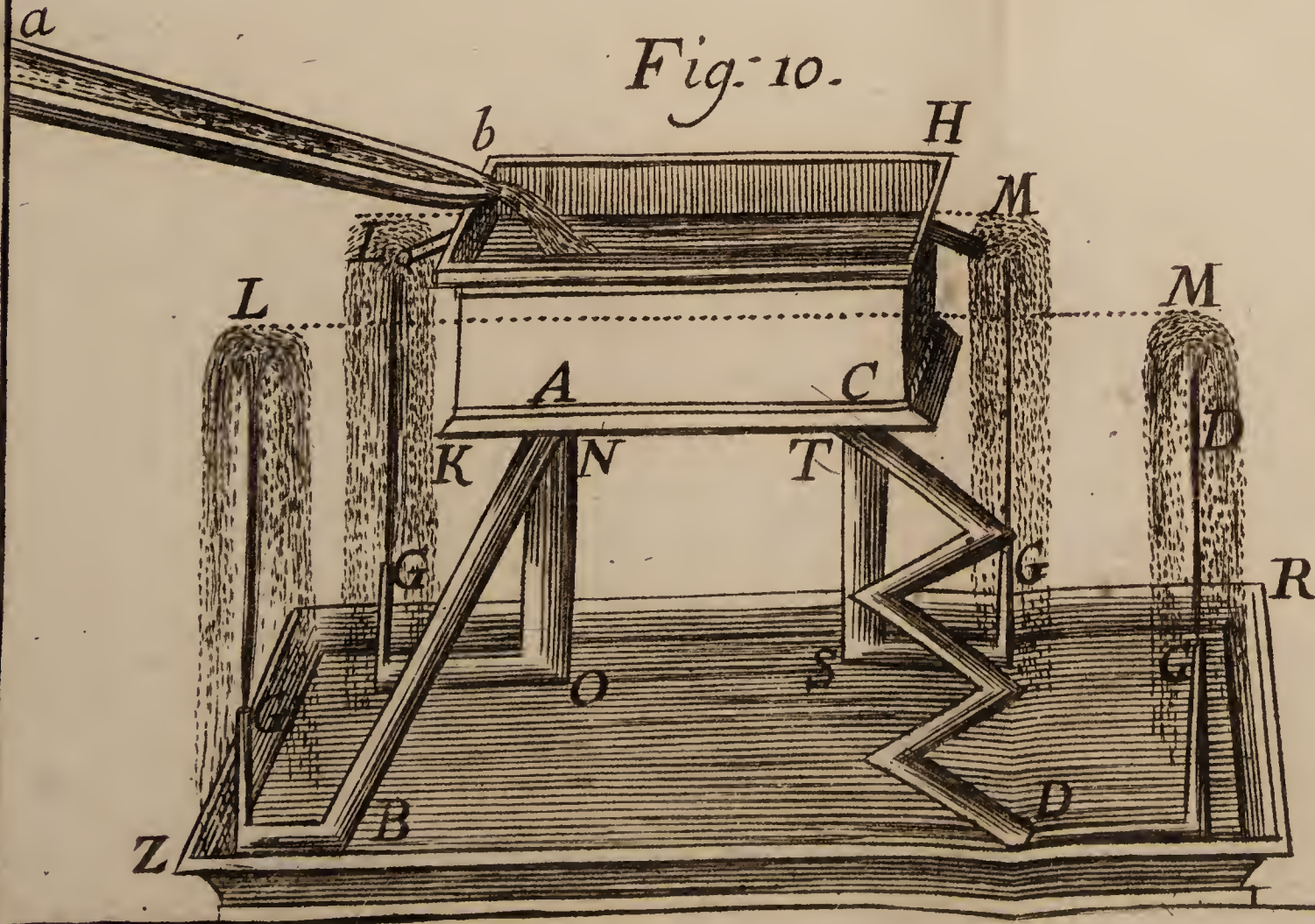


Fig:13.



Fig:15.

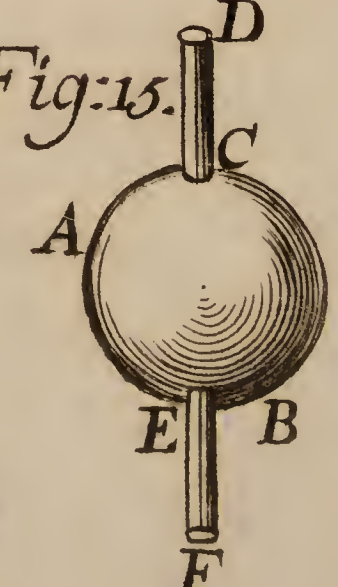


Fig:16.

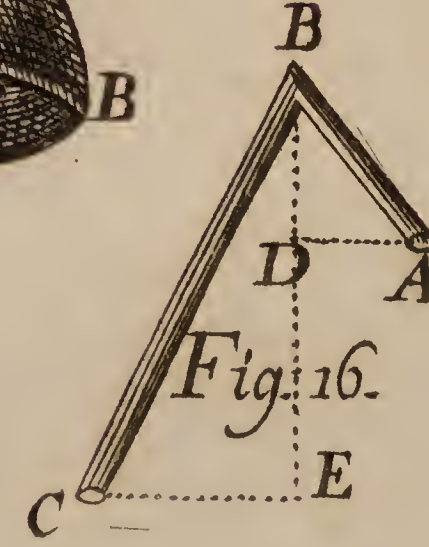


Fig. 17.

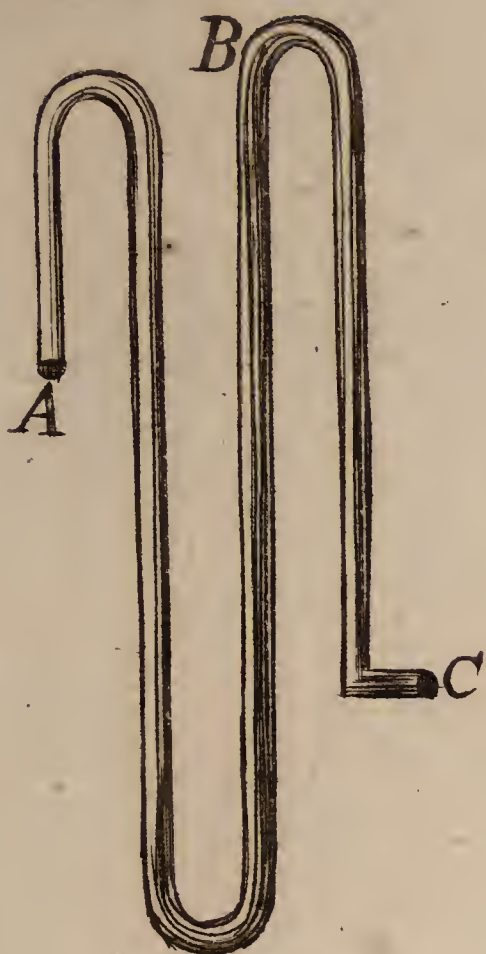


Fig. 18.

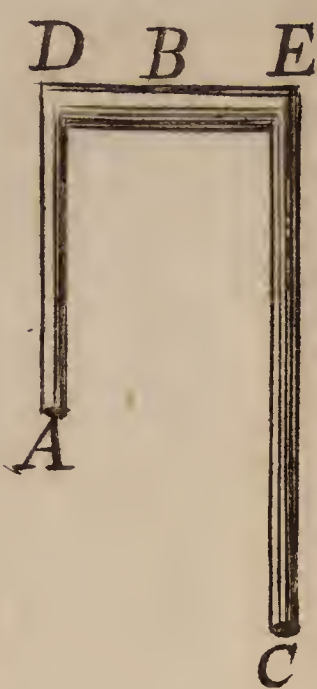


Fig. 19.

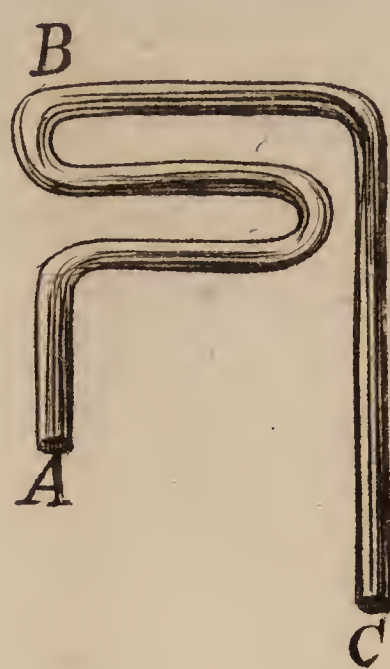


Fig. 20.

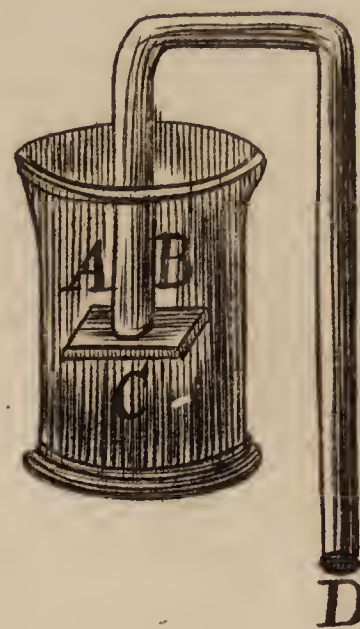


Fig. 22.

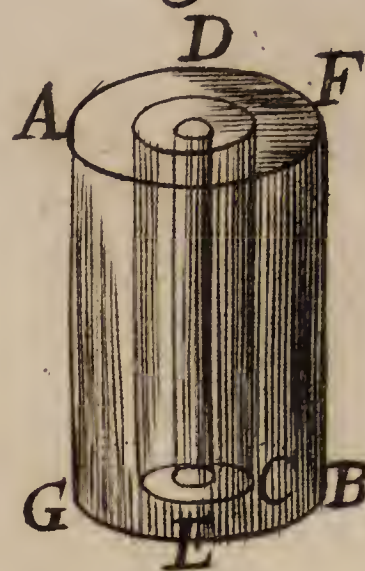


Fig. 23.

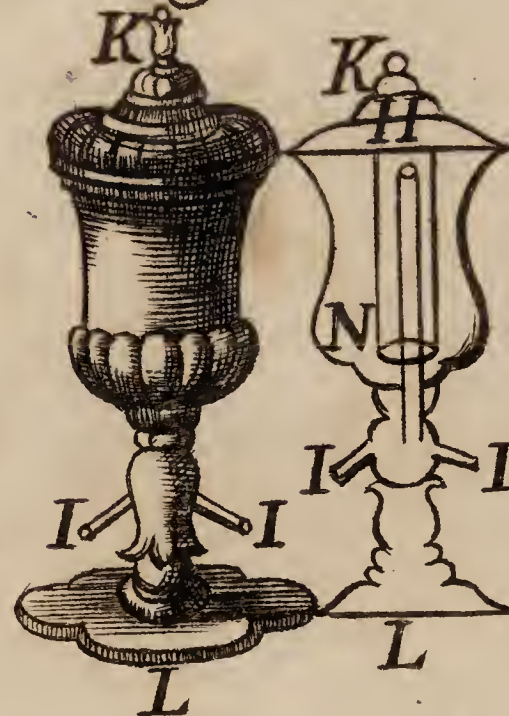


Fig. 21.



Fig. 26.

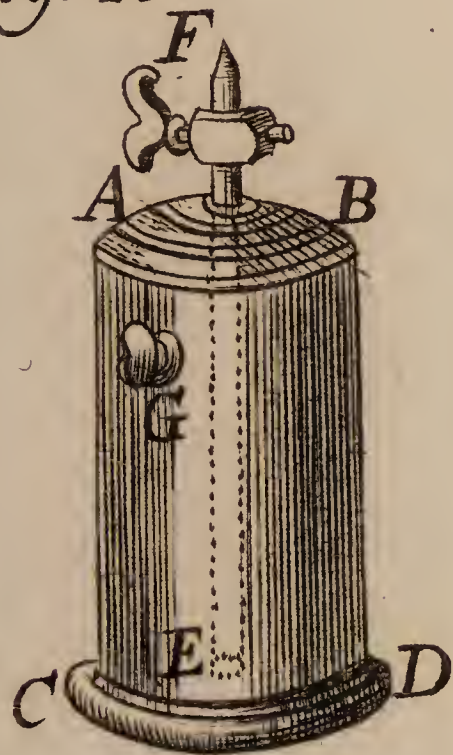


Fig. 24.

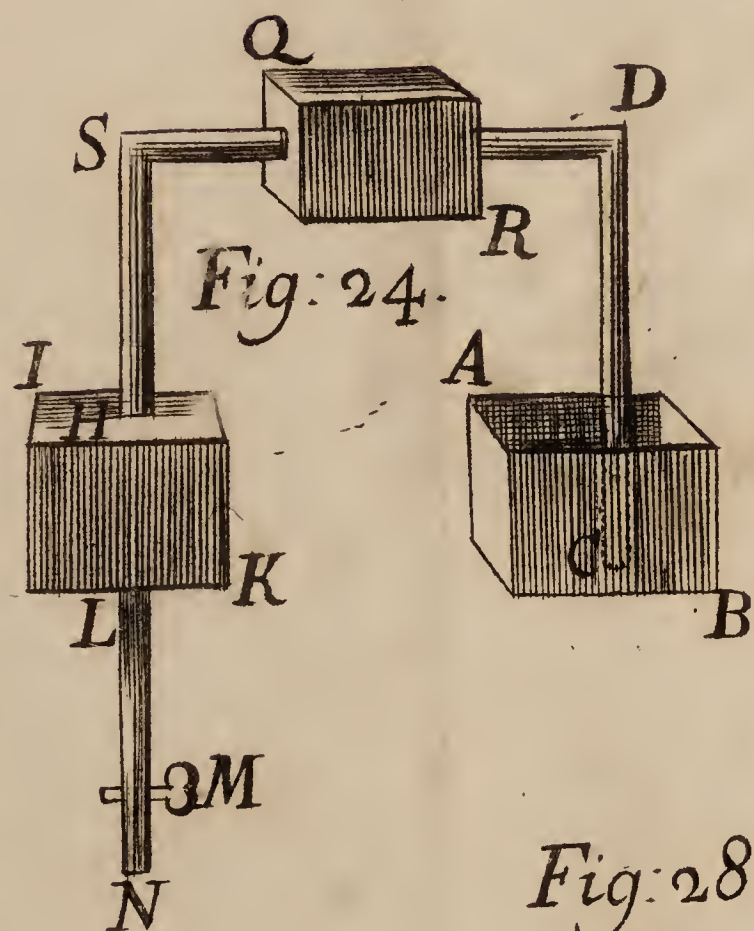


Fig. 28.

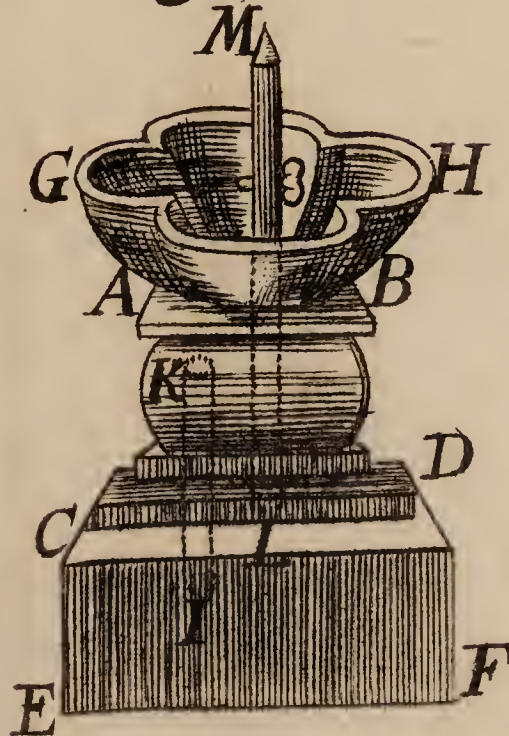


Fig. 29.

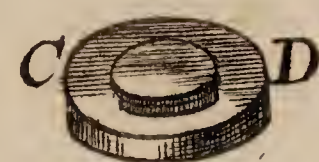


Fig. 27.

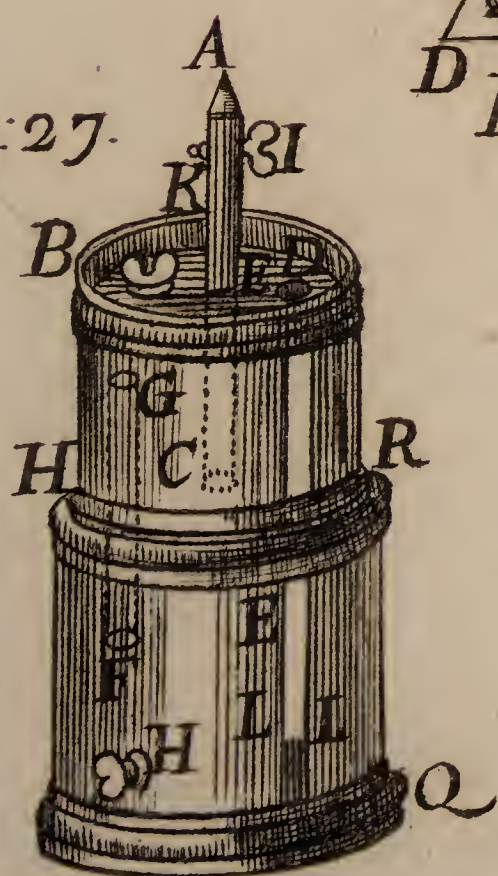


Fig. 30.

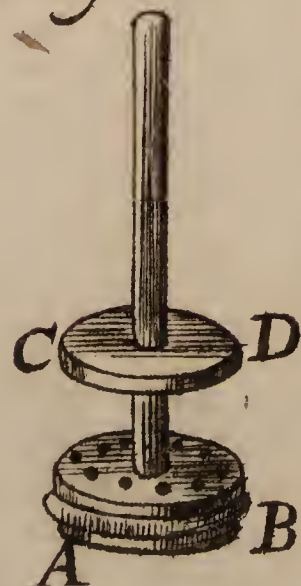


Fig. 32.

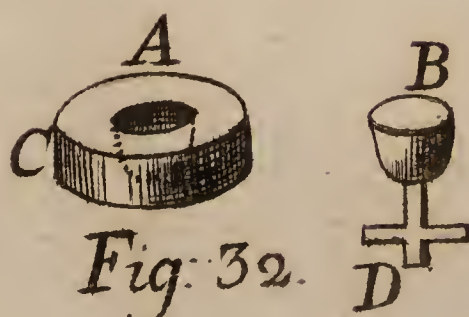
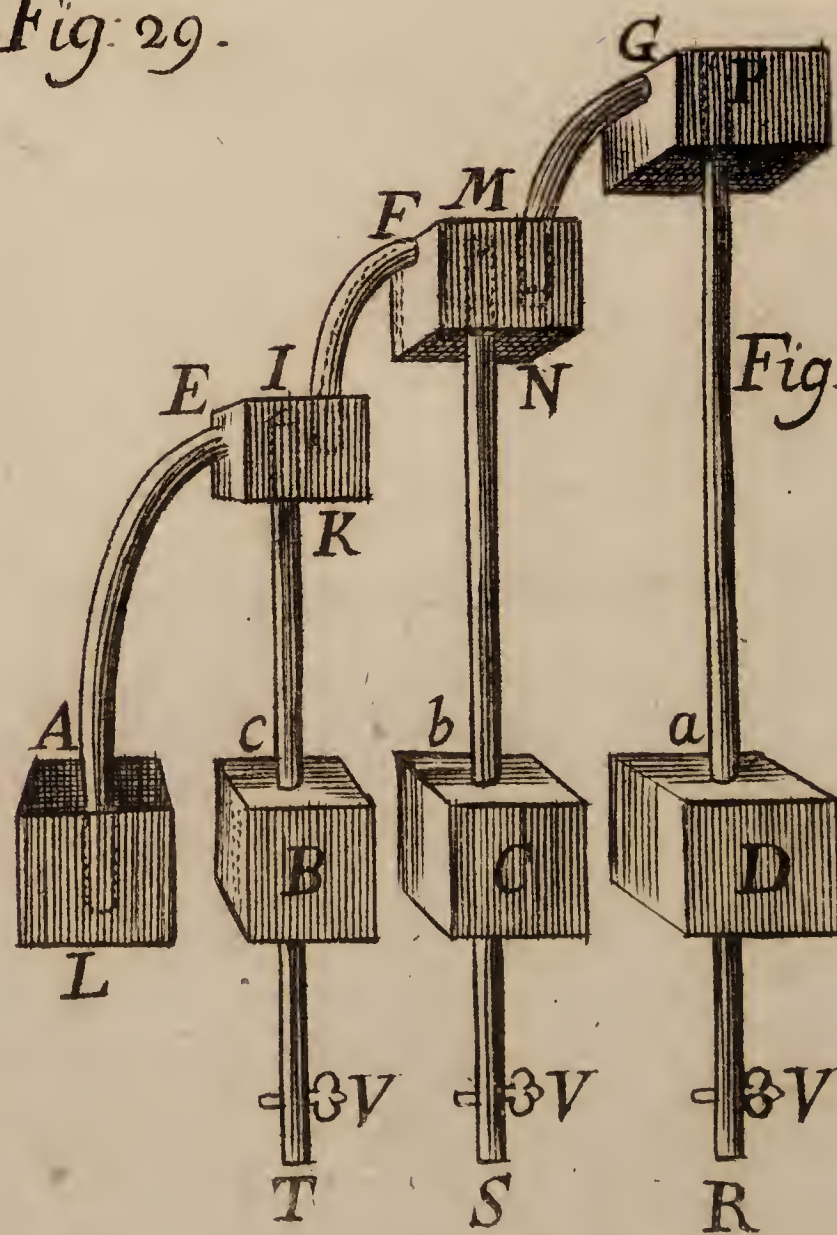


Fig. 25.



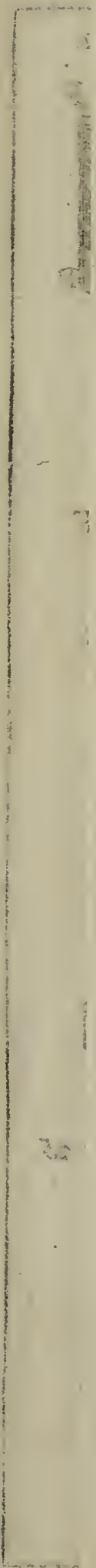


Fig: 33.



Fig: 34.

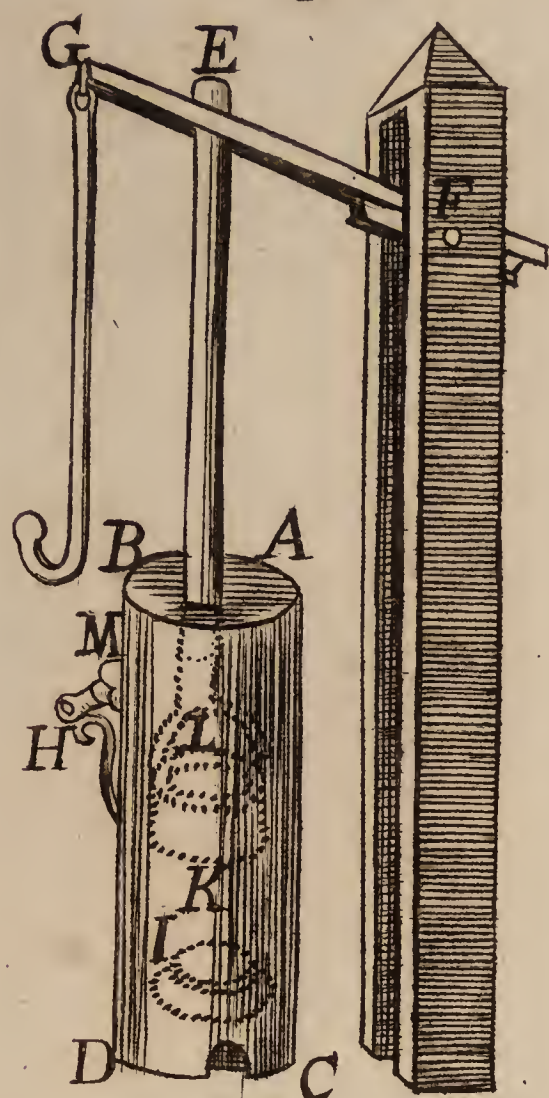


Fig: 35.

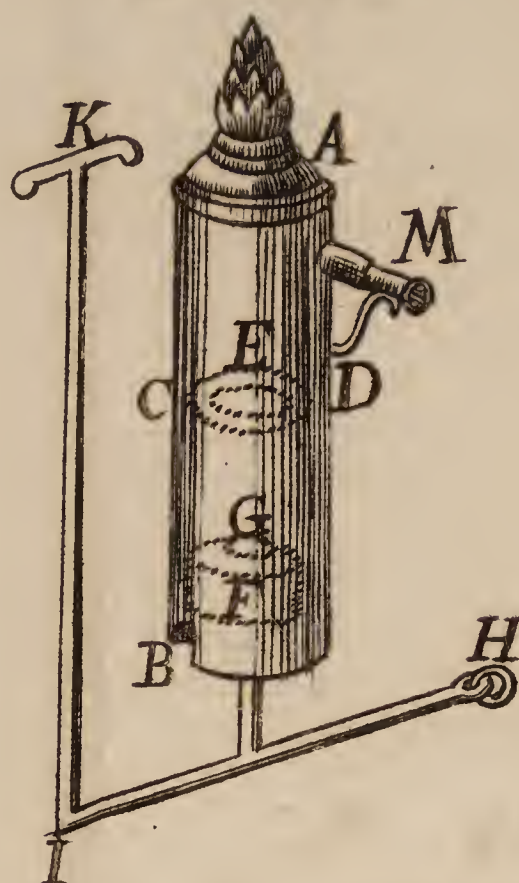


Fig: 36.

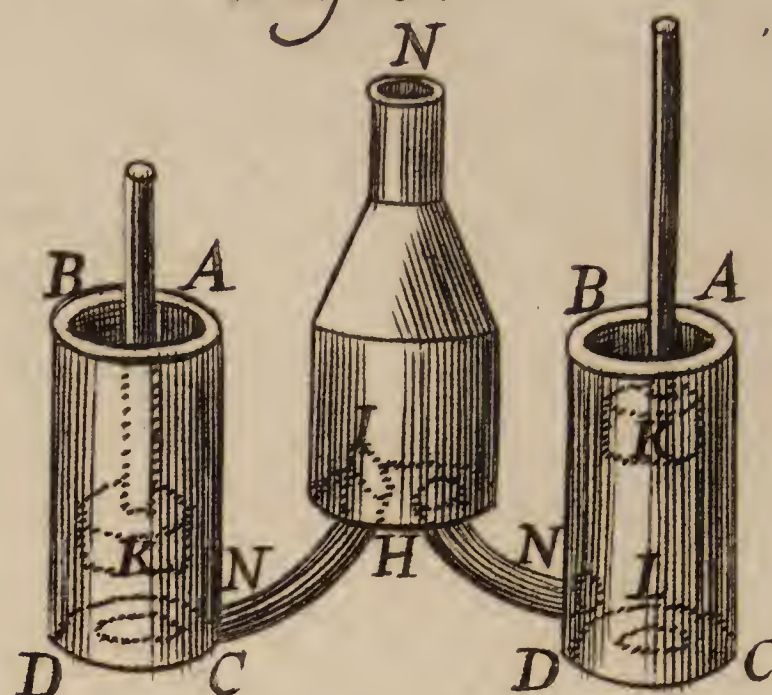


Fig: 37.

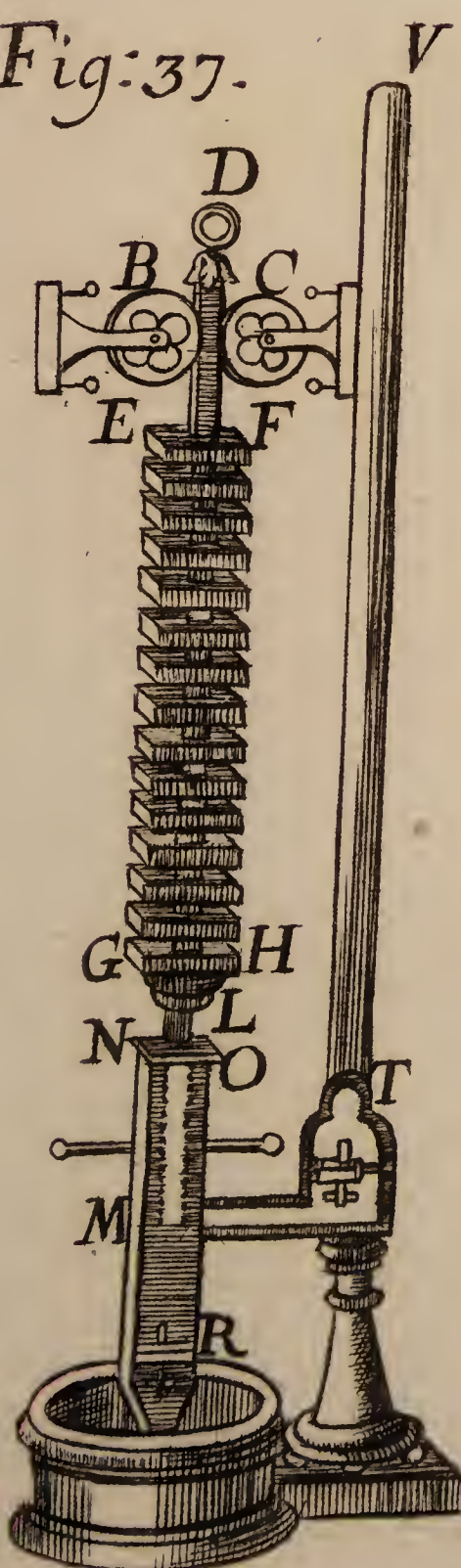


Fig: 38.



Fig: 39.

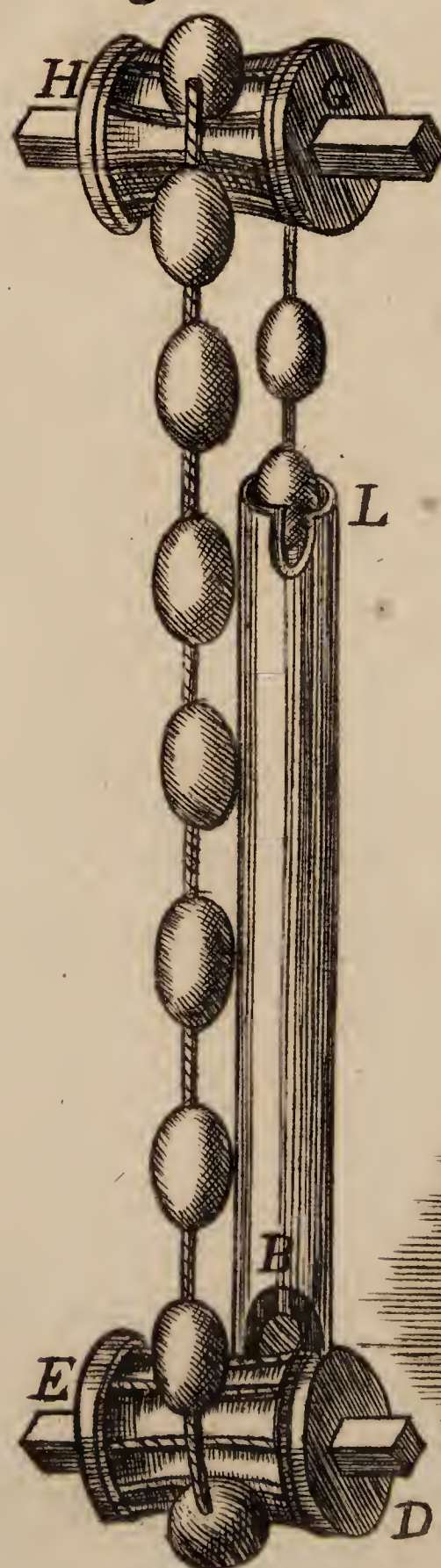


Fig: 40.

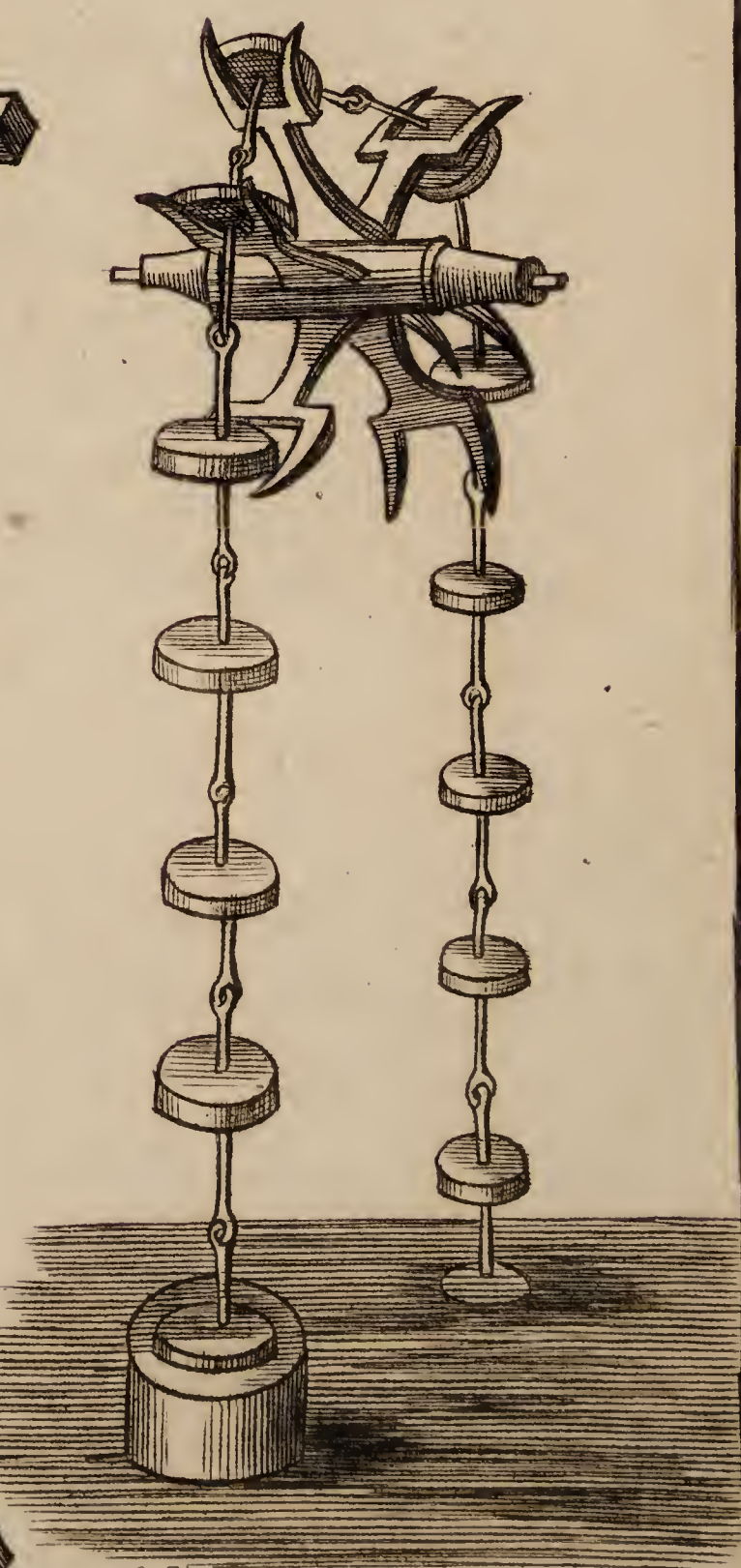




Fig. Hydraul: Tab: IV.

Fig: 41.

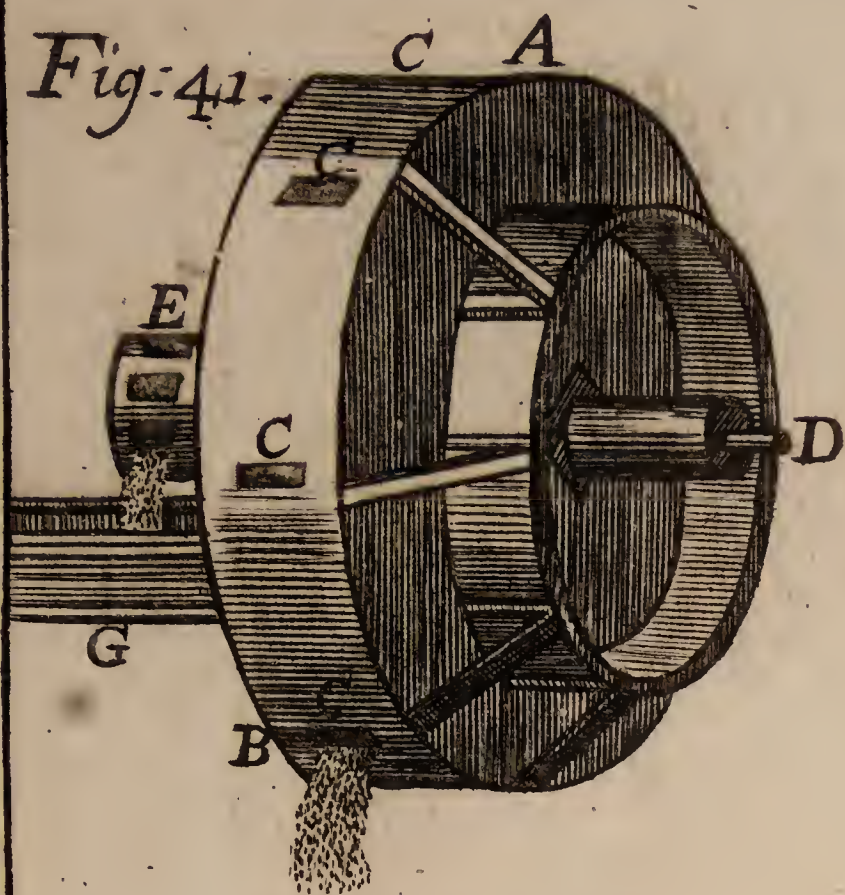


Fig: 44.

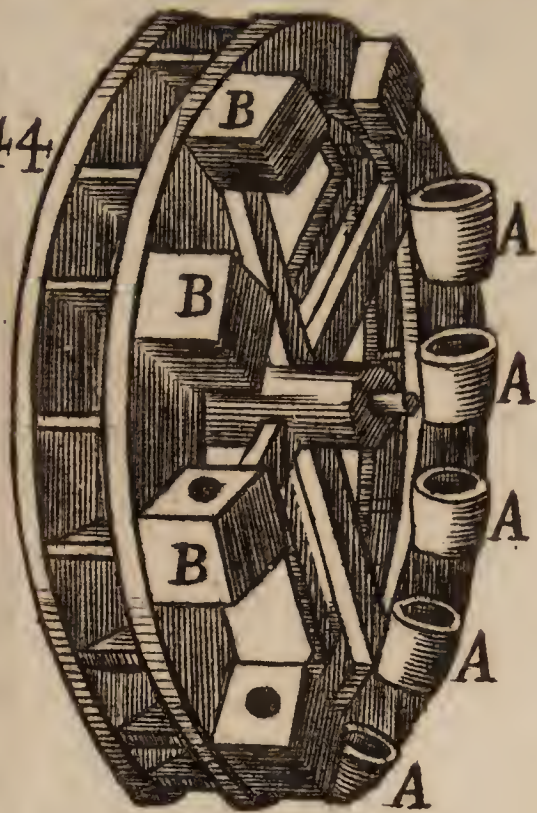


Fig: 46.

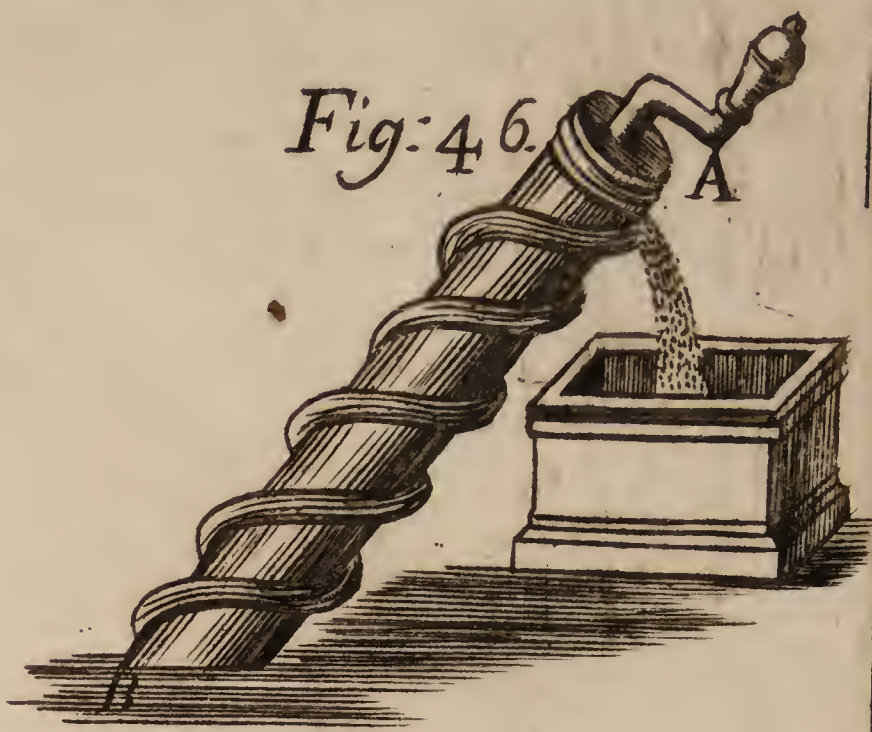


Fig: 47.

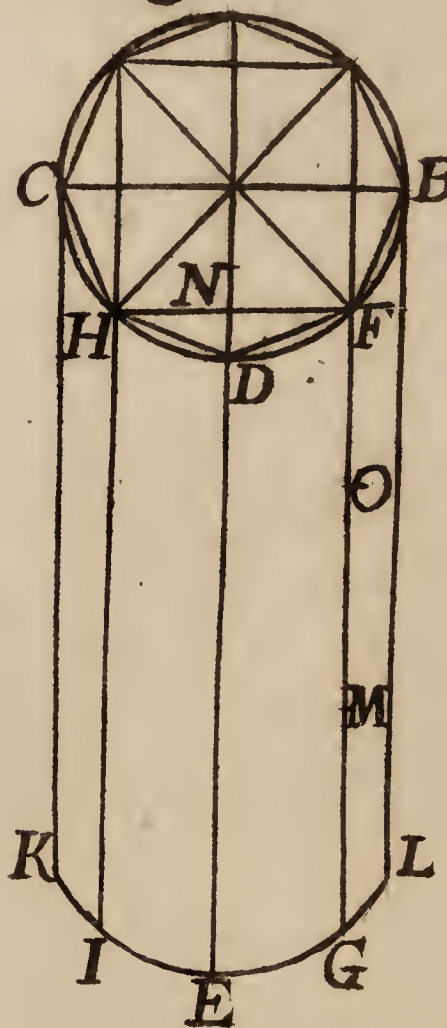


Fig: 45.



Fig: 42.

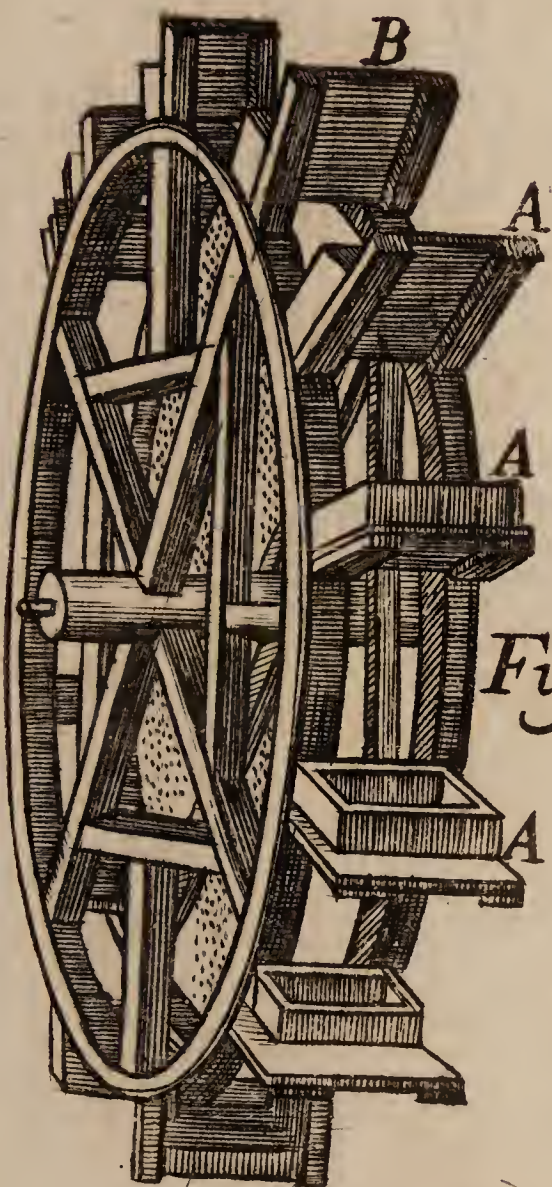


Fig: 48.

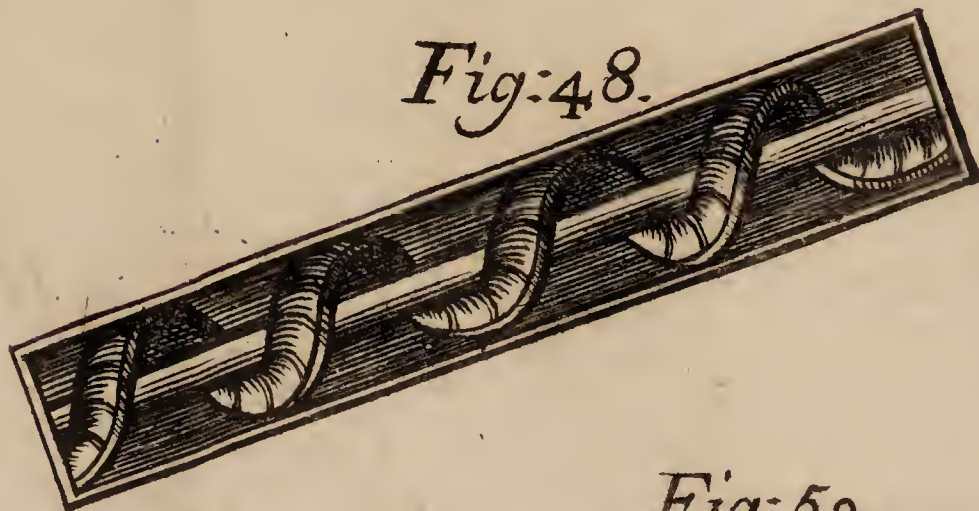


Fig: 43.

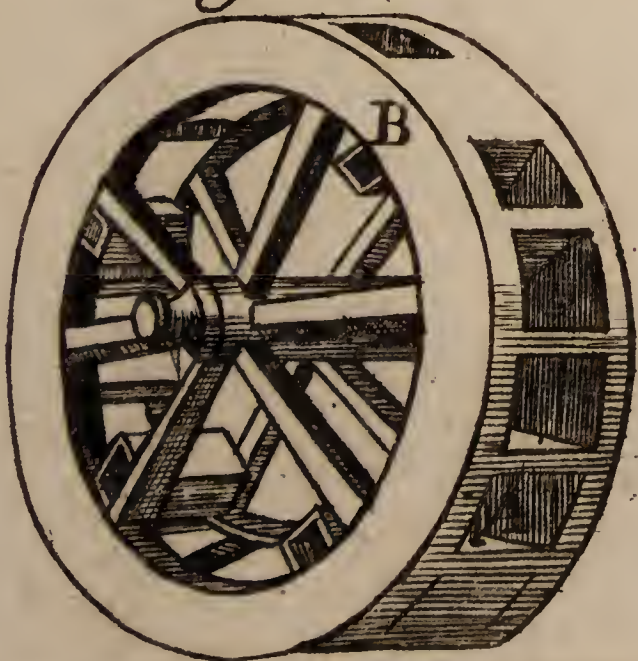


Fig: 51.

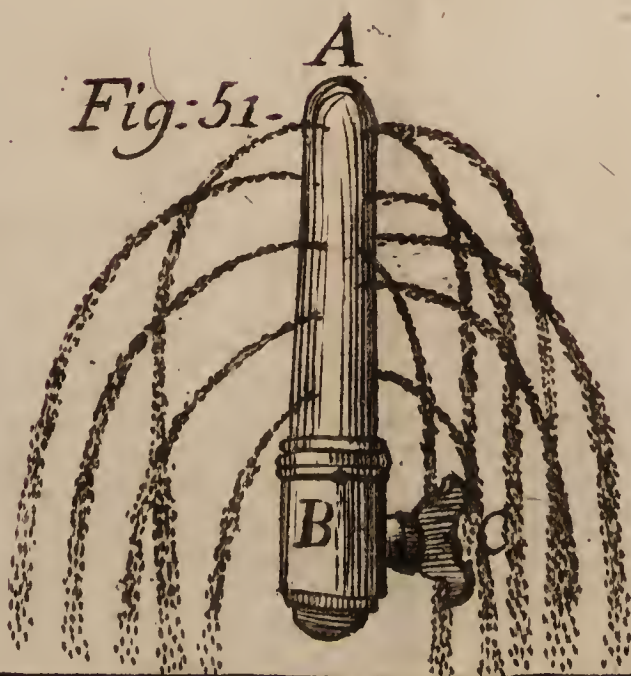


Fig: 52.



Fig: 53.



Fig: 49.



Fig: 50.

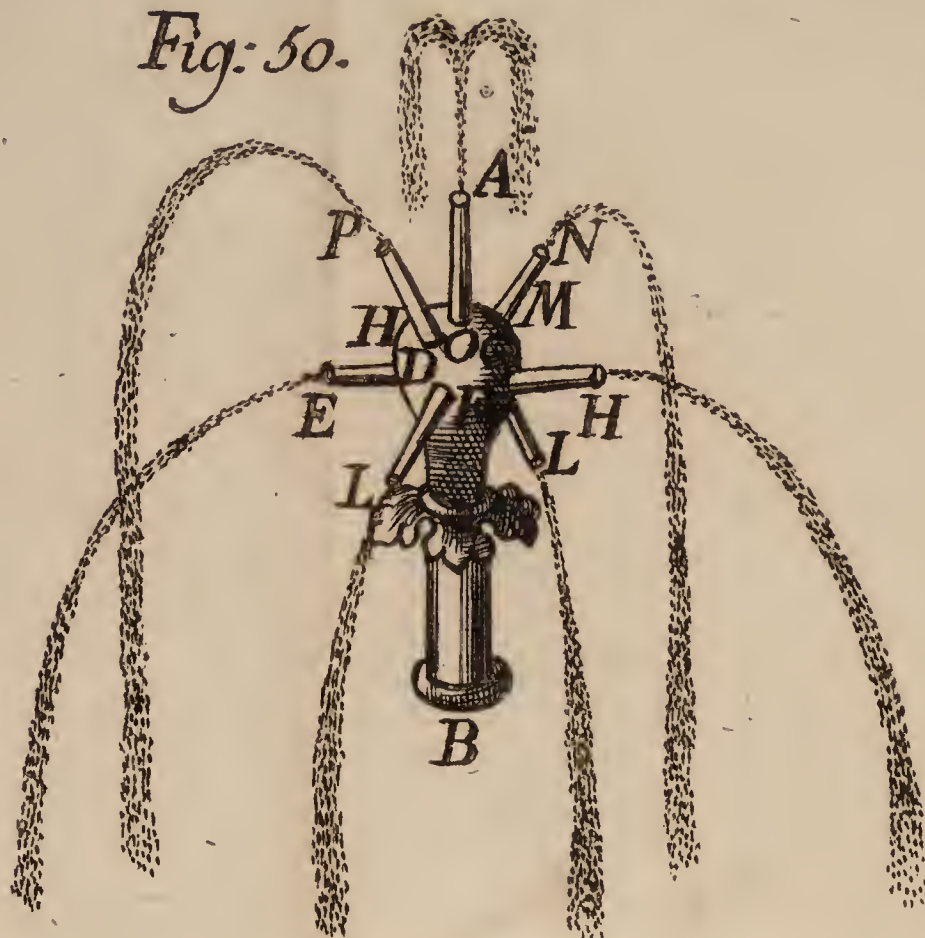


Fig: 54.



Fig: 55.



Fig: 56.

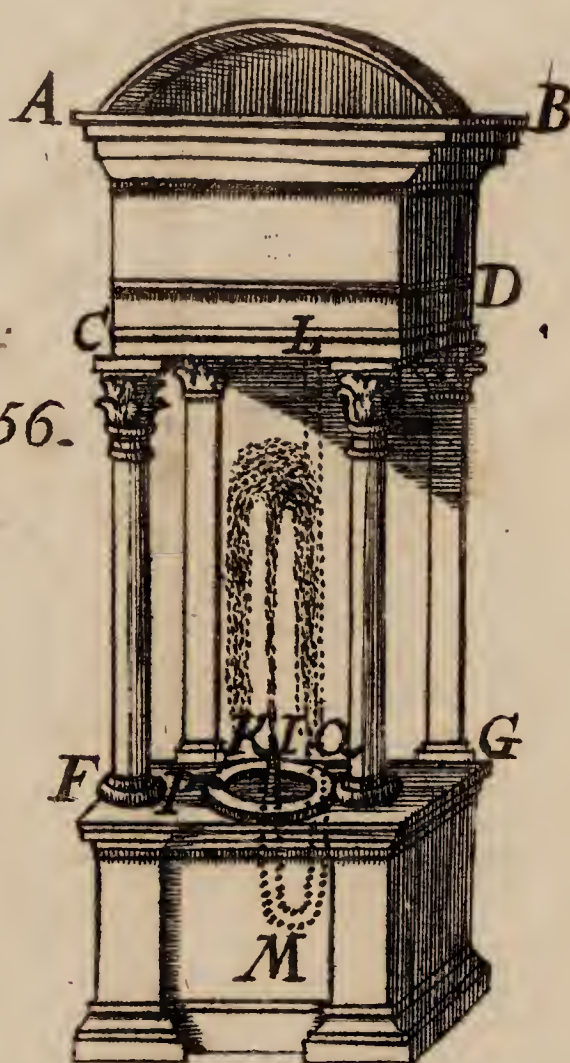


Fig: 58.

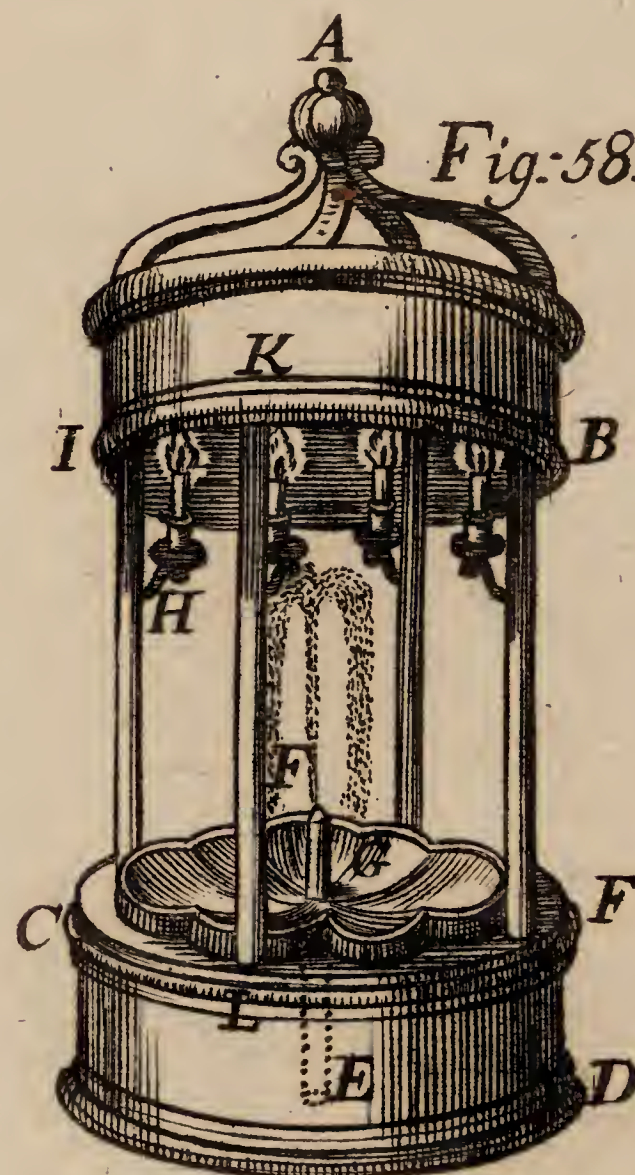


Fig: 61.

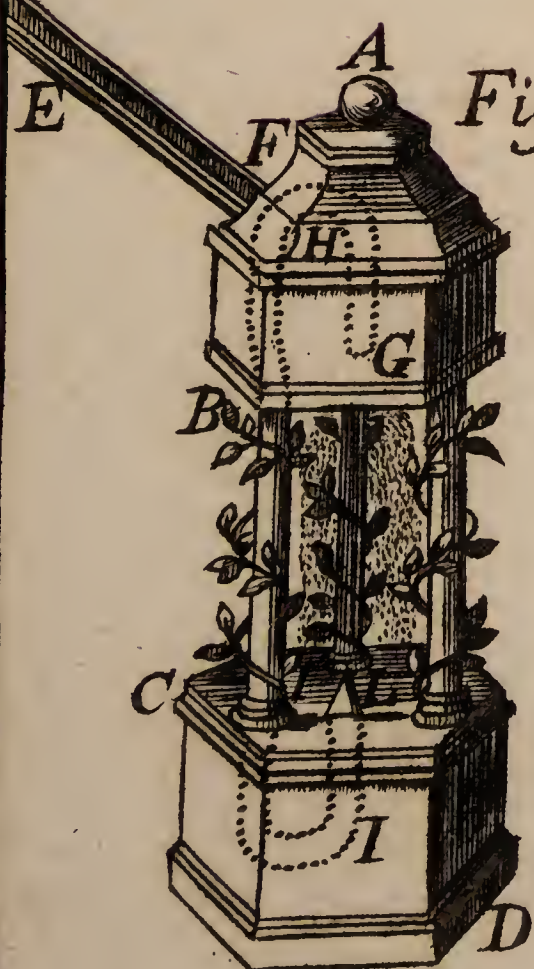


Fig: 57.

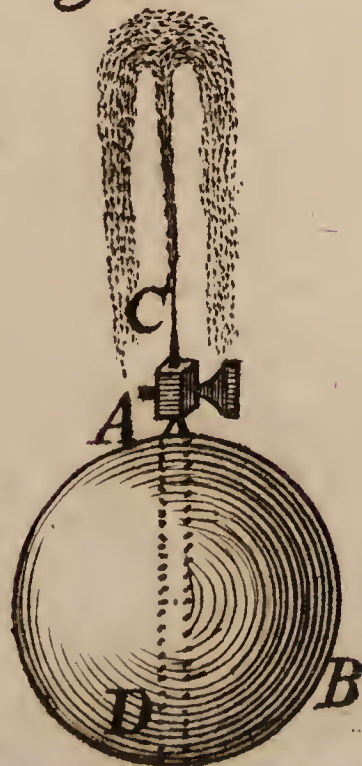


Fig: 60.

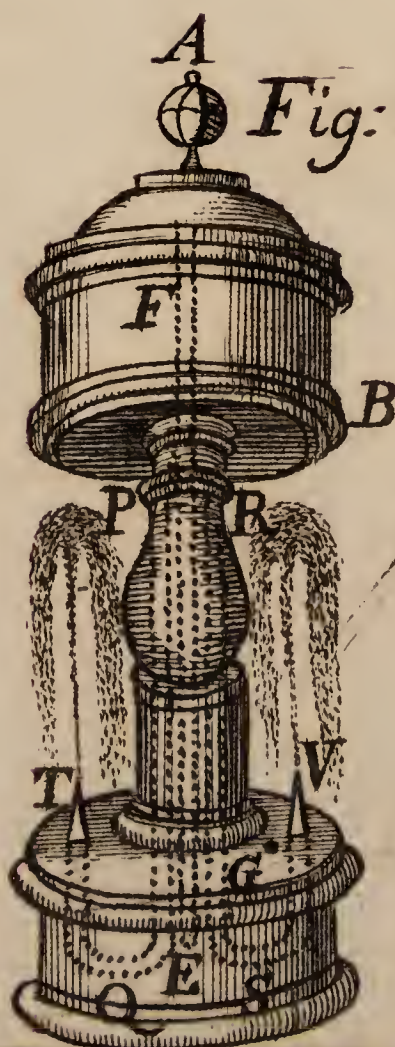


Fig: 59.

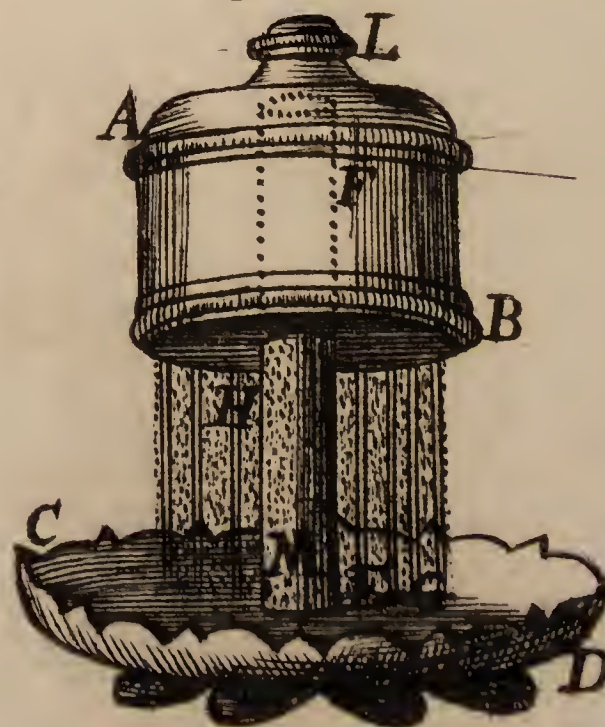


Fig. Hydraul: Tab: VI.

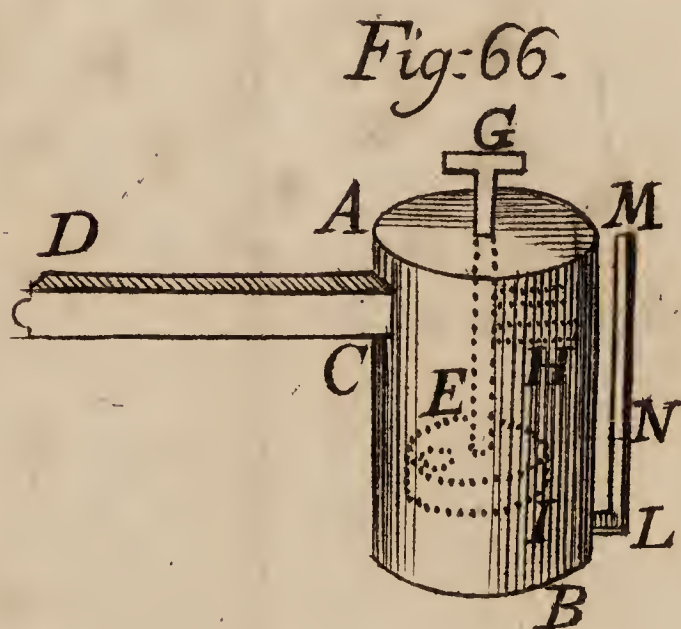
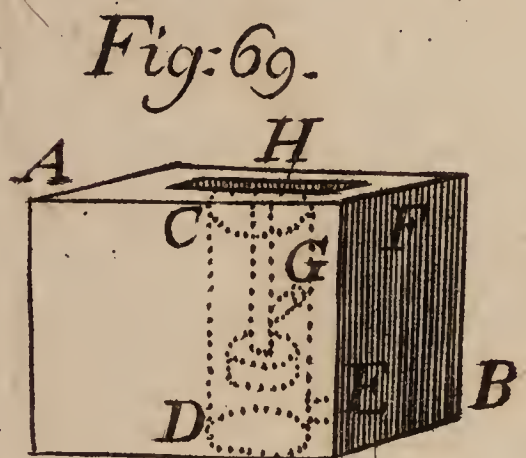
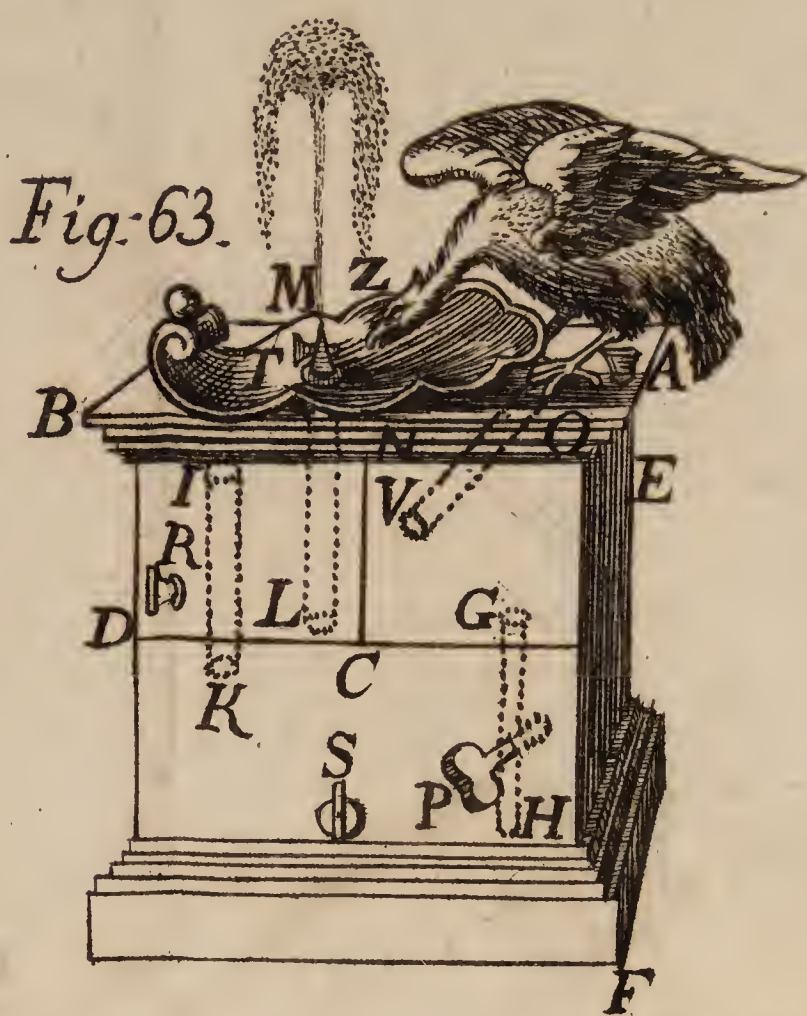


Fig. 65.

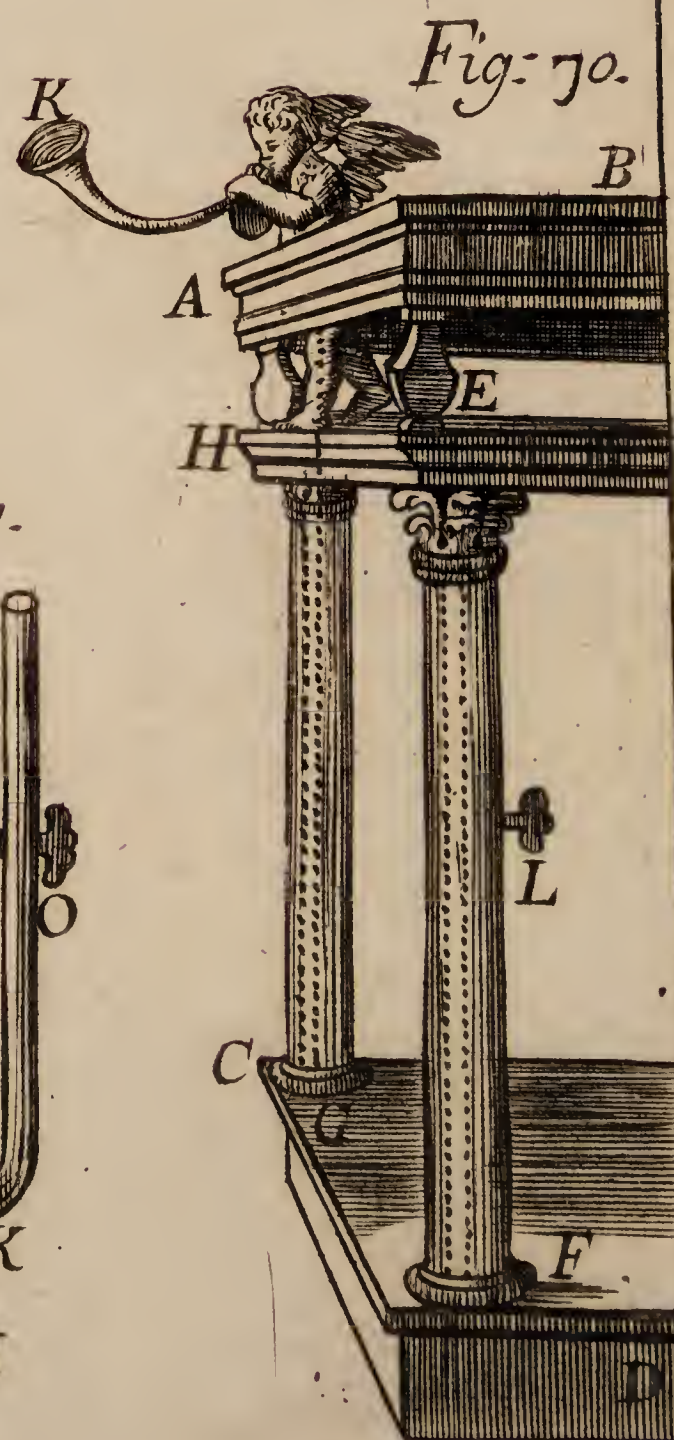
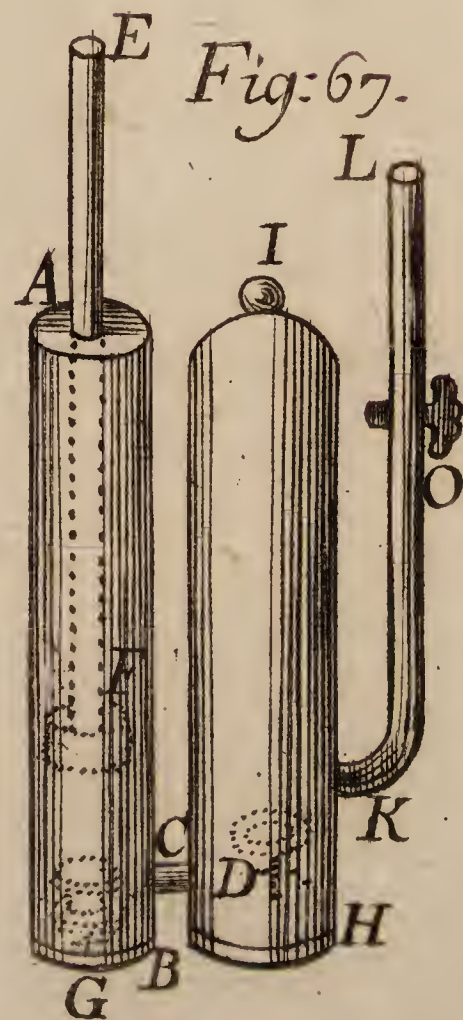


Fig: Hydraul: Tab: VII.

